УДК 517.53

Р. А. АВЕТИСЯН, Н. У. АРАКЕЛЯН

НАИЛУЧШИЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ МЕРОМОРФНЫМИ ФУНКЦИЯМИ В УГЛОВЫХ ОБЛАСТЯХ

Основной целью настоящей заметки является конструирование мероморфных функций, которые равномерно аппроксимировали бы заданную голоморфную в угловой области функцию в несколько более узкой угловой области и имели бы, в известном смысле, возможно медленный рост на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ (измеряемой ростом их неванлинновской характеристики). Эта задача впервые исследовалась в работе [1], где были получены близкие к точным результаты. Последние нуждаются в уточнении, особенно когда аппроксимируемые функции ограничены либо имеют сравнительно медленный рост. Интерес к такого рода приближениям стимулируется как потребностями самой теории приближений (см. [2]), так и возможными их приложениями в теории распределения значений мероморфных функций (см., напр., [3]).

1. Формулировка результатов. Помимо общепринятых обозначений неванлинновской теории (см. [4]), мы по мере надобности вводим новые.

Для открытого множества $\Omega \subset \mathbb{C}$ обозначим через $H(\Omega)$ множество голоморфных в Ω функций. Если $0 \in \Omega$ и K_r означает круг $|z| < r$, то обозначим через $H_B(\Omega)$ множество функций $f \in H(\Omega)$, для которых величина

$$M(r, f) = \sup \{ |f(z)| : z \in \Omega \cap \bar{K}_r \}$$

конечна при всех $r > 0$.

Рассмотрим далее конечную систему Δ открытых углов с общей вершиной в точке 0 и пусть для $\sigma > 0$

$$\Delta_\sigma = \{ z \in \Delta : \inf_{\zeta \in \Delta} |\arg z - \arg \zeta| > \sigma \}.$$

Теорема 1. Для функции $f \in H_B(\Delta)$ и чисел $\varepsilon, \sigma \in (0, 1]$ и $p > 1$ существует такая мероморфная функция g , что

$$|f(z) - g(z)| < \varepsilon \text{ для } z \in \Delta_\sigma, |z| \geq p\sigma, \quad (1)$$

$$T(r, \varepsilon^{-1}g) < c \int_0^{pr} \int_0^t \log \frac{M(\tau, f)}{\varepsilon} \frac{d\tau dt}{\tau} + c \log^2(r+1), \text{ при } r \geq p\sigma, \quad (2)$$

где константа $c > 0$ зависит только от σ, p и от системы Δ .

Замечание 1. По сравнению с (2) установленная в [1] оценка роста аппроксимирующих мероморфных функций менее точна и компактна, и там не указан явным образом характер зависимости от величины ε .

Замечание 2. Если дополнительно к условиям теоремы 1 предположить, что $f|_{K_{r_0}} \in H_B(K_{r_0})$ при некотором $r_0 > 0$, то тогда приближение вида (1) можно обеспечить не только на $\Delta_\sigma \setminus K_{r_0}$, но и на $\Delta_\sigma \cup \overline{K_{r_0}}$. При этом в (2) число σ всюду следует заменить на r_0 .

Что касается вопроса точности оценки (2), то заметим, во-первых, что рост функции g , с учетом (1), не может быть ниже роста функции f на Δ . Поэтому оценка (2) асимптотически точна по r , во всяком случае, для функций f , имеющих регулярный рост конечного порядка. Если же функция f ограничена—допустим, что $|f(z)| \leq 1$ для $z \in \Delta$, то для осуществляющих приближение (1) мероморфных функций g , согласно (2), имеем оценку

$$T(r, g) < c \left(\log \frac{1}{\varepsilon} \right) \log^2 r, \quad r \geq 2. \tag{2'}$$

Следующий простой пример иллюстрирует точность оценки (2') (без учета величины константы c).

Пример. Пусть Γ_0 и Γ_1 —лучи без общих точек, $f(z) = 0$ для $z \in \Gamma_0$ и $f(z) = 1$ для $z \in \Gamma_1$. Предположим, что для $0 < \varepsilon \leq 4^{-1}$ мероморфная функция g удовлетворяет неравенству

$$|f(z) - g(z)| < \varepsilon \quad \text{для } z \in \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \tag{3}$$

и оценим снизу величину

$$c_g = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{T(r, g)}{\log^2 r}.$$

Если $c_g < +\infty$, то тогда из (3) следует существование такой последовательности $r_k \uparrow +\infty$, что

$$T(r_k, g) = o(\sqrt{r_k}) \quad \text{при } k \rightarrow \infty, \quad \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{n(r_k, g)}{\log r_k} \leq 4c_g.$$

Полагая $\rho_k = r_k / \log r_k$, применим к функции g и к области $D = \mathbb{C} \setminus \Gamma_0$ теорему 2 работы [5], являющуюся аналогом на случай мероморфных функций обобщенного варианта теоремы Фрагмена—Линделёфа. Учитывая, что согласно (3), $|g(z)| < \varepsilon$ для $z \in \partial D$ и $M(r, g) > 1 - \varepsilon \geq \sqrt{\varepsilon}$ при $r \geq r_0$, из оценки (1.10) работы [5] получим, что

$$c_g > \frac{1}{8\pi^2} \log \frac{1}{\varepsilon}.$$

В качестве другого примера можно рассматривать зависящую от ε , $0 < \varepsilon < 1$, голоморфную функцию $f = f_\varepsilon$:

$$f_\varepsilon(z) = 2\varepsilon \sin \left[\left(\log \frac{1}{\varepsilon} \right) \log z \right] \quad \text{при } |\arg z| \leq 1,$$

где $\log z$ —главное значение логарифма. Имеем, что $M(r, f_\varepsilon) \leq 1$. Если для $f = f_\varepsilon$ выполнено приближение (3) при $z \in [1, +\infty]$, то заменяя $g(z)$ на $g_1(z) = 2^{-1}(g(z) + \overline{g(\bar{z})})$ и оценивая снизу число нулей g_1 на отрезке $[1, r]$, легко приходим к оценке $T(r, g) \geq$

$\geq k \left(\log \frac{1}{\varepsilon} \right) \log^2 r$, $r > 2$ где $k > 0$ — абсолютная константа.

С помощью теоремы 1 можно получить более общие и удобные для приложений результаты об асимптотическом (касательном) приближении мероморфными функциями на системе угловых областей с оценкой роста аппроксимирующих функций.

Теорема 2. Пусть $f \in H_\delta(\Delta)$, $\rho(r)$ — уточненный порядок, $\varepsilon, \sigma \in (0, 1)$ и $p > 1$. Тогда существует такая мероморфная функция G , что

$$|f(z) - G(z)| < \varepsilon |z|^{-\rho(|z|)} \text{ для } z \in \Delta_\sigma, |z| \geq r, \quad (4)$$

$$T(r, \varepsilon^{-1} G) < k \int_{\sigma/2}^r \int_{\sigma/2}^t \log \frac{M(t, f)}{\varepsilon} \frac{d\tau dt}{\tau t} + k\rho(r) \log^2(r+1) \text{ при } r \geq r_0, \quad (5)$$

где константа $k > 0$ не зависит от f и от чисел ε и r .

Замечание 3. Рассматривая уточненный порядок $\rho(r)$, мы подразумеваем, что $r^{\rho(r)} \uparrow \infty$ при $r \uparrow \infty$. Это условие, которое может нарушаться, когда $\rho(r) \rightarrow 0$ ($r \rightarrow \infty$) продиктовано желанием иметь в (4) касательное приближение.

Следующее следствие из теоремы 2 хорошо известно [6].

Следствие. Пусть ψ — произвольно медленно возрастающая к $+\infty$ функция на $[0, +\infty)$ и $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{C}$. Существует мероморфная функция G с асимптотическими значениями $a_1, a_2, \dots, a_n$, рост которой удовлетворяет условию

$$T(r, G) = O(\psi(r) \log^2 r) \text{ при } r \rightarrow \infty.$$

В самом деле, пусть Δ — система из n открытых углов $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ с вершиной 0 и попарно без общих точек, $f(z) = a_k$ для $z \in \Delta_k$. Далее можно считать, что $\psi(r) \leq \log(r+1)$. Для функции e^z существует (см. [7], теорему 2.1 и стр. 70–72) нижний уточненный порядок $\rho(r)$ так, что при $r \geq r_0$

$$e^{r^{\rho(r)}} \geq r^{\rho(r)}, \text{ т. е. } \rho(r) \log r \leq \psi(r).$$

Искомую функцию G мы получим, применяя к функциям f и ρ теорему 2 при $\varepsilon=1$, $p=2$ и достаточно малом δ (более подробно о количестве асимптотических значений мероморфных функций см. [5], теорема 1).

2. Доказательства. Для доказательства теоремы 1 мы применяем несколько более сложную, чем в работе [1], аппроксимационную схему. Нам понадобится следующая

Лемма 1. Для ветви аналитической функции $z \rightarrow \sqrt[n]{z}$, $\sqrt[n]{1} = 1$, однозначной в области $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, и для числа $\delta \in (0, 1]$ существует мероморфная функция $\omega = \omega_\delta$ с полюсами на $(-\infty, -1)$ такая, что

$$|\omega(z) - \sqrt[n]{z}| \leq \frac{1}{2} |\sqrt[n]{z}| \text{ при } |\arg z| \leq \pi - \delta, |z| \geq \delta, \quad (6)$$

$$T(r, \omega) = O(\log^2 r) \text{ при } r \rightarrow \infty. \quad (7)$$

а) Доказательство леммы 1. Определим функцию ω формулой.

$$\omega(z) = A_0 + z \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{z - \zeta_k}, \quad (8)$$

где $\zeta_k = -q^k$ для $k = 1, 2, \dots$ и $q = 1 + 4^{-1} \sin \delta$,

$$A_k = \frac{1}{\pi} \int_{\zeta_{k+1}}^{\zeta_k} \frac{d\zeta}{\sqrt{|\zeta|}} \quad \text{для } k = 0, 1, 2, \dots, \zeta_0 = 0. \quad (9)$$

Ряд в (8) сходится абсолютно в точке $z=0$, что гарантирует локально равномерную сходимость этого ряда в C . Свойства мероморфных функций, представимых рядами вида (8), исследовались М. В. Келдышем [7]. Из его результатов следует, в частности, что

$$T(r, \omega) = N(r, \omega) + O(\log r) \quad \text{при } r \rightarrow \infty.$$

Теперь оценка (7) следует из замечания, что если $|\zeta_k| \leq t < |\zeta_{k+1}|$, $k \geq 1$, то $n(t, \omega) = k \leq (\log q)^{-1} \log t$, поэтому $N(r, \omega) = O(\log^2 r)$. Для доказательства оценки (6) удобно представить ряд (8) в виде интеграла. С этой целью положим

$$Q(\zeta, z) = \frac{\zeta - \zeta_k}{z - \zeta_k} \quad \text{для } \zeta \in (\zeta_{k+1}, \zeta_k), k = 0, 1, \dots.$$

Учитывая, что при $\zeta \in (\zeta_{k+1}, \zeta_k]$ величина

$$\frac{Q(\zeta, z) - 1}{\zeta - z} = \frac{1}{z - \zeta_k}$$

не зависит от ζ . для $z \in C \setminus (-\infty, 0)$ согласно (8) и (9) имеем

$$\omega(z) = \frac{z}{\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{Q(\zeta, z) - 1}{\zeta - z} \frac{d\zeta}{\sqrt{|\zeta|}} = \frac{z}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{1 - Q(\zeta, z)}{\zeta - z} \frac{d\zeta}{\sqrt{|\zeta|}},$$

где Γ — положительно ориентированная граница области $C \setminus (-\infty, 0]$. Отсюда с учетом формулы Коши функции $1/\sqrt{z}$ получим представление

$$\omega(z) - \sqrt{z} = -\frac{z}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{Q(\zeta, z)}{\zeta - z} \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta}} = \frac{z}{\pi} \int_{\Gamma} \frac{Q(\zeta, z)}{\zeta - z} \frac{d\zeta}{\sqrt{|\zeta|}}, \quad z \in C \setminus (-\infty, 0].$$

Оценим последний интеграл при $|z| \geq \delta$ и $|\arg z| \leq \pi - \delta$, учитывая при этом неравенства

$$|Q(\zeta, z)| \leq \frac{q-1}{\sin \delta} = \frac{1}{4} \sin \delta, \quad |z - \zeta| \geq \frac{1}{2} (\sin \delta) (|z| + |\zeta|).$$

Мы приходим к оценке (6):

$$|\omega(z) - \sqrt{z}| \leq \frac{|z|}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{dt}{(|z| + t)\sqrt{t}} = \frac{1}{2} \sqrt{|z|}.$$

Лемма 1 доказана.

б) Доказательство теоремы 1. Пусть $\omega = \omega_\delta$ — построенная в лемме 1 мероморфная функция для числа $\delta = \frac{\sigma}{\rho}$. Заменяя $f(z)$ на $\varepsilon^{-1} f(\alpha z)$, можно свести доказательство к случаю, когда $\varepsilon = 1$ и считать (при подходящем выборе числа $\alpha \in \mathbb{C}$), что полюсы $(-\infty, -1)$ лежит в $\mathbb{C} \setminus \Delta$, т. е. полюсы ω лежат вне $\Delta \cup \bar{K}_1$. При этом в условиях замечания 2 можем также считать, что $r_0 = \sigma$.

Пусть теперь $E_0 = \Delta_\sigma \setminus K_\sigma$, $E = \Delta_\sigma \setminus K_{\rho\sigma}$, а если дополнительно известно, что $f|_{K_\sigma} \in H_2(K_\sigma)$, то естественно полагаем $E_0 = \Delta_\sigma \cup \bar{K}_\sigma$, $E = \Delta_\sigma \cup \bar{K}_\delta$. Обозначим через Γ положительно ориентированную границу E_0 и пусть $\Gamma_r = \Gamma \cap K_r$. Из оценки (6) леммы 1 следует, что

$$|\omega(\zeta)| \geq \frac{1}{2} V|\zeta| \text{ для } \zeta \in \Gamma, \quad |w(z)| \leq c_1 + \frac{3}{2} V|z| \text{ для } z \in E, \quad (10)$$

где константа c_1 зависит от δ . В дальнейшем через c_j , $j=2, 3, \dots$ будем обозначать положительные константы, зависящие лишь от чисел σ , ρ и от системы Δ . Заметим, в частности, что $E \subset E_0$ и существует такая константа $c_2 < 1$, что

$$|\zeta - z| > c_2 (|\zeta| + |z|) \text{ для } \zeta \in \Gamma, z \in E. \quad (11)$$

Рассмотрим рациональную по z и кусочно-аналитическую по $\zeta \in \Gamma$ функцию $Q(\zeta, z)$, $Q(\zeta, \zeta) \equiv 1$, вида

$$Q(\zeta, z) = \left(\frac{\zeta - \zeta'}{z - \zeta'} \right)^{n'},$$

где выбор полюсов ζ' и их кратностей n' , кусочно-постоянных по ζ , подлежит уточнению. С этой целью фиксируем число $q > 1$:

$$q = \min \{ V\bar{\rho}, 1 + c_2 / V\bar{\rho} \}$$

и возьмем произвольную пока последовательность $(n_k)_{k=0}^\infty$ целых чисел $n_k \geq 0$. Для полюсов $\zeta \in \Gamma_\sigma$ мы полагаем $n' = n_0$. Сами же полюсы $\zeta' \in \Gamma_\sigma$ выбираем так, чтобы они делили Γ_σ на дуги длины не больше $(1 - q^{-1})\sigma$. Каждой точке ζ любой из этих дуг сопоставим один и тот же конец ζ' этой дуги. Можно считать, что количество указанных точек $\zeta' \in \Gamma_\sigma$ (без учета их кратности n_0) ограничено числом c_3 .

Для определения полюсов на $\Gamma \setminus \Gamma_\sigma$ положим $q_k = \sigma q^k$ для $k=0, 1, 2, \dots$, $\gamma_0 = \Gamma_\sigma$ и $\gamma_k = \Gamma_{q_k} \setminus \Gamma_{q_{k-1}}$ для $k \geq 1$. Учитывая, что $\gamma_i \cap \gamma_j = \emptyset$ при $i \neq j$ и

$$\Gamma \setminus \Gamma_\sigma = \bigcup_{k=1}^{\infty} \gamma_k,$$

мы для точек $\zeta \in \gamma_k$ при $k \geq 1$ полагаем $\zeta' = (\zeta/|\zeta|) q_k$ и $n' = n_k$.

Таким образом, для $\zeta \in \Gamma$ соответствующий полюс $\zeta' \in \Gamma$ у нас выбран так, что $q^{-1}|\zeta| \leq |\zeta'| \leq |\zeta|$ и $|\zeta - \zeta'| \leq (1 - q^{-1})|\zeta'|$. Если теперь $z \in E$, то с учетом (11) имеем

$$\left| \frac{\zeta - \zeta'}{z - \zeta'} \right| \leq \frac{1 - q^{-1}}{c_2} \leq \frac{1}{q} < \frac{q^2 + 1}{q^2 + q} = d < 1,$$

так что при $k=0, 1, 2, \dots$ выполняется оценка

$$|Q(\zeta, z)| \leq d^k \text{ для } \zeta \in \gamma_k, z \in E \quad (12)$$

Оценка (12) выполняется не только для $z \in E$, но и для всех $z \in \bar{K}_\mu |\zeta|$, где $\mu = 2q(q^2+1)^{-1} < 1$, поскольку тогда

$$\left| \frac{\zeta - \zeta'}{z - \zeta'} \right| \leq \frac{|\zeta - \zeta'|}{(1-\mu)|\zeta| + |\zeta - \zeta'|} \leq \frac{q-1}{q-\mu} = d.$$

Наконец, оценка (12) выполняется еще в одном случае—когда $\zeta \in \Gamma \setminus \gamma_k$ и $|z| = \mu q_k$ для $k = 1, 2, \dots$. В самом деле, если $|\zeta| > q_k$, то мы приходим к предыдущему случаю, когда $|z| \leq \mu |\zeta|$. Если же $|\zeta| \leq q_{k-1}$, то тогда $\sigma q^{m-1} < |\zeta| \leq \sigma q^m$ при некотором $m \leq k-1$, так что $|z - \zeta'| \geq q_m (\mu q^{k-m} - 1)$, $|\zeta - \zeta'| \leq (1 - q^{-1}) q_m$, и поэтому

$$\left| \frac{\zeta - \zeta'}{z - \zeta'} \right| \leq \frac{q-1}{q(\mu-1)} = d.$$

Из сказанного об оценке (12) ясно, что если определить последовательность $(n_k)_{k=0}^\infty$ из условий

$$0 \leq n_k - c_1 [A + \log^+ M(q_k, f)] < 1, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (13)$$

где $c_1 = \left(\log \frac{1}{d}\right)^{-1}$, а $A > 0$ — пока произвольная константа, то тогда неравенство

$$|f(\zeta) Q(\zeta, z)| < e^{-A} \quad (14)$$

выполняется, если а) $\zeta \in \Gamma$ и $z \in E \cup \bar{K}_\mu |\zeta|$; б) $\zeta \in \Gamma \setminus \gamma_k$, $|z| = \mu q_k$ при $k = 1, 2, \dots$.

Рассмотрим теперь несобственный интеграл

$$I(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta) Q(\zeta, z)}{\omega(\zeta) \zeta - z} d\zeta, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma. \quad (15)$$

Из (10) и (14) следует, что подынтегральная функция при $|\zeta| \geq \mu^{-1}|z|$ мажорируется интегрируемой функцией $c_2 |\zeta|^{-\frac{1}{2}}$. Поэтому $I(z)$ сходится в $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ локально равномерно и представляет голоморфную функцию.

Полагая теперь $f_n(z) = f(z)$ для $z \in E_0$ и $f_0(z) = 0$ для $z \in \Gamma \setminus E_0$, покажем, что при подходящем выборе константы A требуемую мероморфную функцию g можно определить формулой

$$g(z) = f_0(z) - I(z) \omega(z) \text{ для } z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma. \quad (16)$$

Эта формула определяет g как мероморфную вне Γ функцию с возможными полюсами лишь в точках, где лежат полюсы функции ω . Убедимся однако, что g допускает голоморфное продолжение и на Γ , за исключением возможных полюсов в выбранных выше точках $(\zeta') \subset \Gamma$. В самом деле, учитывая (15), (16) и формулу Коши для функции f/ω применительно к контуру $\partial(E_0 \cap K_r)$, мы для $z \in K_r \setminus \Gamma$, при любом $r \geq \sigma$ получим представление

$$\frac{g(z)}{\omega(z)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\omega(\zeta)} \frac{1-Q(\zeta, z)}{\zeta-z} d\zeta + \\ + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma \setminus \Gamma_r} \frac{f(\zeta)}{\omega(\zeta)} \frac{Q(\zeta, z)}{\zeta-z} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_r} \frac{f(\zeta)}{\omega(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta-z},$$

где $L_r = E_0 \cap \partial K_r$. Здесь последние два интеграла допускают голоморфное продолжение на K_r , а первый интеграл — мероморфное, с возможными полюсами в точках $\zeta' \in K_r$, кратности соответственно не выше n' , если учесть, что $Q(\zeta, \zeta) \equiv 1$ для $\zeta \in \Gamma$.

Согласно (16) для доказательства оценки (1) (при $\varepsilon = 1$) нам необходимо иметь подходящие оценки функции $I(z)\omega(z)$ на E .

Из (15) с учетом (10), (11) и (14) (случай а)) следует, что

$$|I(z)|e^A \leq c_2^{-1} \int_{\Gamma} (|\zeta| + |z|)^{-1} \frac{|d\zeta|}{\sqrt{|\zeta|}} \text{ для } z \in E.$$

Здесь часть интеграла по Γ_0 [равна $c_6(\sigma + |z|)^{-1}$, а остальная часть (по $\Gamma \setminus \Gamma_0$) ограничена интегралом

$$c_7 \int_{\Gamma} (t + |z|^{-1}) \frac{dt}{\sqrt{t}} \leq c_7(1 + \sqrt{|z|})^{-1},$$

поэтому с учетом (10) для $z \in E$ получаем, что функция $I(z)\omega(z)$ ограничена величиной $c_8 e^{-A}$. Для выполнения оценки (1) достаточно фиксировать $A = \log^+ c_8$.

Перейдем к оценке характеристики $T(r, g)$. Из (16) следует, что

$$m(r, g) \leq \log^+ M(r, f) + m(r, I) + m(r, \omega) + 1.$$

Поскольку

$$N(r, g) \leq N(r, g/\omega) + N(r, \omega),$$

то с учетом оценки (7) получим

$$T(r, g) < N(r, g/\omega) + m(r, I) + \log^+ M(r, f) + c_9 \log^2(r+1) \\ \text{при } r \geq \sigma. \quad (17)$$

Полюсы функции g/ω расположены на множестве (ζ') , имея в ζ' кратность не выше n' , поэтому с учетом (13) получим (при некотором $c_{10} \geq c_9$)

$$N(r, g/\omega) \leq \sum_{|\zeta'| < r} n' \log \frac{r}{|\zeta'|} \leq c_{10} \sum_{q_k < r} n_k \log \frac{r}{q_k} \leq \\ \leq c_{11} \sum_{q_k < r} [1 + \log^+ M(q_k, f)] \log \frac{r}{q_k}, \quad r \geq \sigma.$$

Отсюда, учитывая, что

$$[1 + \log^+ M(q_k, f)] \log \frac{r}{q_k} \leq (\log q)^{-1} \int_{q_k}^{qr} [1 + \log^+ M(t, f)] \log \frac{qr}{t} \frac{dt}{t},$$

находим, что

$$N(r, g/\omega) < c_{12} \int_0^{qr} [1 + \log^+ M(t, f)] \log \frac{qr}{t} \frac{dt}{t}, \quad r > \sigma.$$

Интегрированием по частям отсюда получаем

$$N(r, g/\omega) < c_{12} \int_0^{qr} \int_0^t \log^+ M(\tau, f) \frac{d\tau dt}{\tau t} + c_{12} \log^2(r+1), \quad r \geq \sigma. \quad (18)$$

Величину $m(r, l)$ нам достаточно оценить при $r = r_k = \mu q_k, k=1, 2, \dots$. С этой целью разобьем в (15) интеграл $I(z)$ на сумму интегралов $I_k(z)$ и $J_k(z)$, соответственно, по контурам $\Gamma \setminus \gamma_k$ и γ_k .

Если $\zeta \in \Gamma \setminus \gamma_k$ и $|z| = r_k$, то тогда $|\zeta - z| > (1 - \mu) |\zeta|$. Учитывая также оценки (10) и (14) (случай б)), получим

$$|I_k(z)| < (1 - \mu)^{-1} \int_{\Gamma} |\zeta|^{-\frac{3}{2}} |d\zeta| < e^{c_{14}}, \quad |z| = r_k. \quad (19)$$

Если же $\zeta \in \gamma_k$ и $|z| = r_k$, то тогда

$$|Q(\zeta, z)| = \left| \frac{\zeta - \zeta'}{z - \zeta'} \right|^{\alpha'} \leq \left(\frac{q-1}{q+1} \right)^{2\alpha' k},$$

а согласно (10), $|\omega(\zeta)| \geq 0,5 \sqrt{\sigma}$, поэтому с учетом (13) имеем

$$|J_k(r_k e^{i\varphi})| \leq \exp(c_{15} + c_{15} \log^+ M(q_k, f)) \alpha_k(\varphi), \quad (20)$$

где

$$\alpha_k(\varphi) = \int_{\gamma_k} |\zeta - r_k e^{i\varphi}|^{-1} |d\zeta|.$$

Заменив в этом интеграле ζ на $q_{k-1}\zeta$ при $k > 1$ и учитывая, что $r_k = r_1 q_{k-1}$, мы обнаруживаем, что $\alpha_k(\varphi) \equiv \alpha_1(\varphi)$. Кроме того, $\alpha_1(\varphi)$ непрерывна на $\mathbb{R}$, за исключением конечного числа точек $\varphi = \varphi'$, где она возрастает, как $|\varphi - \varphi'|^{-1}$. Полагая поэтому

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ \alpha_1(\varphi) d\varphi = c_{16}.$$

из (19) и (20) выводим

$$m(r_k, l) \leq c_{14} + c_{15} [1 + \log^+ M(q_k, f)] + c_{16} + 1.$$

Сопоставляя эту оценку с (17) и (18) и учитывая, что $r_1 > \sigma$, для $k=1, 2, \dots$ получим

$$T(r_k, g) < c_{12} \int_0^{qr_k} \int_0^t \log^+ M(\tau, f) \frac{d\tau dt}{\tau t} + c_{17} \log^+ M(q_k, f) + c_{17} \log^2(r_k + 1).$$

Здесь второе слагаемое оценивается через первое. Так как

$$\int_{q_k}^{qr_k} \log \frac{qr_k}{t} \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} \log^2(\mu q) = c_{18},$$

то ясно, что

$$\begin{aligned} \log^+ M(q_k, f) &\leq c_{18}^{-1} \int_{q_k}^{qr_k} \log^+ M(\tau, f) \log \frac{qr_k}{t} \frac{dt}{t} = \\ &= c_{18}^{-1} \int_{q_k}^{qr_k} \int_{q_k}^t \log^+ M(\tau, f) \frac{d\tau dt}{\tau t}. \end{aligned}$$

Таким образом, мы приходим к оценке

$$T(r_k, g) < c_{19} \int_{\sigma}^{qr_k} \int_{\sigma}^t \log^+ M(\tau, f) \frac{d\tau dt}{\tau t} + c_{17} \log^2(r_k, f), \quad k \geq 1. \quad (21)$$

Пусть, наконец, $r \geq 1$. Так как $r_k = qr_{k-1}$ для $k=2, 3, \dots$, то существует такое $k \geq 1$, что $r \leq r_k < qr$. Поскольку $T(r, g) \leq T(r_k, g)$, то из оценки (21) окончательно получим

$$T(r, g) < c_{19} \int_{\sigma}^{qr} \int_{\sigma}^t \log^+ M(\tau, f) \frac{d\tau dt}{\tau t} + c_{20} \log^2(r+1), \quad r \geq r_1.$$

Для установления оценки (2) остается лишь заметить, что $q^2 \leq p$ и $r_1 > p\sigma$. Теорема 1 полностью доказана.

в) Доказательство теоремы 2. Можно считать, что $(-\infty, 0) \subset C \setminus \Delta$ и что $r^p(r) \geq 1$ для $r \geq \sigma$. Положим

$$\Lambda_\alpha = \{z : |\arg z| \leq \pi - \alpha\}.$$

Из теоремы 5.1 работы [4] следует существование такой голоморфной для $z \in \Lambda_{\sigma/4} \cup K_1$ функции $f_p(z)$ и константы c_1 , что

$$2 \leq |f_p(z)| |z|^{-p(|z|)} \leq c_1. \quad (22)$$

Применим к функции f_p и к области $\Lambda_{\sigma/4} \cup K_1$ теорему 1 (с учетом замечания 2) при $\varepsilon = 1$, $p = 2$ и заменой σ на $\sigma/4$.

Аппроксимирующая мероморфная функция g_p будет удовлетворять, в силу, (1) и (22), неравенствам

$$1 \leq |g_p(z)| |z|^{-p(|z|)} \leq 2c_1, \quad z \in \Lambda_{\sigma/2}, \quad (23)$$

а согласно (22) и (2) ее рост ограничивается неравенством ($\delta = \sigma/4$):

$$T(r, g_p) < c \int_{\delta}^{2r} \int_{\delta}^t \rho(\tau) \log \tau \frac{d\tau dt}{\tau t} + c_2 \log^2(r+1) \leq$$

$$\leq c_p (2r) \log(2r) \int_1^{2r} \int_1^t \frac{d\tau d\tau'}{\tau\tau'} + c_2 \log^2(r+1) \leq \\ \leq c_3 \rho(r) \log^2(r+1), \quad r > \sigma. \quad (24)$$

На последнем шагу мы использовали тот факт, что $r^{\rho(r)}$ является медленно растущей функцией (см. [4], стр. 72—73), если $\rho(r) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$. Константа c_3 зависит от выбора функции ρ и от σ (но не зависит от r). Замечая теперь, что $\Delta_{\sigma/2} \subset \Delta_{\sigma/2}$, применим к функции $f \cdot g$ и системе $\Delta_{\sigma/2}$ теорему 1 с заменой там σ на $\sigma/2$. Если g — аппроксимирующая функция, то требуемую в теореме 2 функцию G мы получим, полагая $G = g/g_r$. Тогда, согласно (1)

$$|f(z) - G(z)| < \frac{\varepsilon}{|g_r(z)|} \quad \text{для } z \in \Delta_{\sigma}, |z| > \rho\sigma,$$

откуда, с учетом (23), получим (4). Кроме того

$$T(r, \varepsilon^{-1}G) \leq T(r, \varepsilon^{-1}g) + T(r, \rho_3) + c_4,$$

где константа c_4 зависит только от σ и от выбора функции ρ . Теперь оценка (5) следует из оценок (2) и (24), если в (2) заменить f на fg , σ на $\sigma/2$ и учесть (23). Теорема 2 доказана.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 21. XI. 1988.

Ռ. Ա. ԱՎԵՏԻՍԻԱՆ, Ն. Հ. ԱՌԱՔԵԼԻԱՆ. Լավագույն մոտավորություններ մերմորֆ ֆունկցիաներով անկյունային տիրույթներում (ամփոփում)

Սույն աշխատանքում ստացված են արդյունքներ անկյունների վերջավոր համակարգերի վրա հոլոմորֆ ֆունկցիաների հարթության մեջ մերմորֆ ֆունկցիաներով հավասարաչափ կամ շոշափումով մոտավորության մասին, մոտարկող ֆունկցիաների աճի ճշգրիտ գնահատականներով:

R. A. AVETISIAN, N. U. ARAKELIAN. *Best approximations by meromorphic functions in angular domains (summary)*

In this paper results on uniform and tangential approximation of functions holomorphic on finite systems of angular domains by functions meromorphic in the complex plane, with exact estimates of their growth are established.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Тер-Израелян. Равномерные и касательные приближения голоморфных в угле функций мероморфными с оценкой их роста. Изв. АН АрмССР, «Математика», 6, № 1, 1971, 67—80.
2. Н. У. Аракелян, Р. А. Аветисян. О наилучшем равномерном приближении мероморфными функциями на вещественной оси, ДАН СССР, 257, № 6, 1981, 128—1293.
3. M. Domodaron. On the distribution of values of meromorphic functions of slow growth, Lecture Notes in Math., 599, Compl. Anal., Kentucky, 1976, Springer-Verlag, N. Y., 1977, 17—21.

4. А. А. Гольдберг, И. В. Островский. Распределение значений мероморфных функций. М., Наука, 1970.
5. Р. А. Аветисян, Н. У. Аракелян, А. А. Гончар. Об асимптотических свойствах мероморфных функций, Изв. АН АрмССР, «Математика», 24, № 2, 1989.
6. G. Valiron. Sur les valeurs asymptotiques de quelques fonctions meromorphes, Palermo Rend., 46, 1925.
7. М. В. Келдыш. О рядах по рациональным дробям, ДАН СССР, 94, № 3, 1954, 377—380.