ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XXIII, № 6. 1988 Математика

УДК 517.53

М. М. ДЖРБАШЯН

КРАТКИЙ ОБЗОР РЕЗУЛЬТАТОВ ИССЛЕДОВАНИЙ МАТЕМАТИКОВ АРМЕНИИ В ОБЛАСТИ ТЕОРИИ ФАКТОРИЗАЦИИ МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЙ*

Почти в самый начальный период развертывания в Армении научных исследований в области математики, в начале сороковых годов, лично меня, как аспиранта, привлекла одна из фундаментальных областей классического комплексного анализа—теория представлений аналитических функций и их граничных свойств. Началом зарождения этого направления в Армении явились результаты, анонсированные автором в статье [2] в 1945 г. Три года спустя, в 1948 году, развернутое изложение этой статьи, а также ряд новых результатов, были опубликованы автором в работах [3] и [4].

Указанные результаты были получены под свежим впечатлением выдающихся достижений в комплексном анализе, достигнутых в фундаментальных трудах Фату, Привалова, Рисса, Сегё, Неванлинны, Харди и других. Эти результаты, изложенные в замечательных монографиях Р. Неванлинны [5] и И. И. Привалова [6], сыграли решающую роль в становлении научных интересов автора, как начинающего математика.

Исследования, проведенные в нашей математической школе, в указанных выше важных направлениях классической теории функций и инициированные публикацией автора 1945 года, интенсивно продолжались как мною, так и моими учениками и последователями.

В данной статье, однако, я не коснусь исследований в том же кругу проблем, проведенных у нас за период с 1964 по 1971 г.г. Они были представлены в докладе автора на Ванкуверском международном математическом конгрессе в 1974 году (см. [7], где приведена также полная библиография публикаций этого периода).

Итак, настоящая статья посвящается краткому обзору как ранних, так и недавних результатов, полученных в исследованиях армянской школы советских математиков и инициированных первоначальными результатами автора 1945 года. Они посвящены интегральным и факторизационным представлениям функций, аналитических или мероморфных в круге и в полуплоскости, а также их применениям.

Отметим, что в недавно вышедшей в свет монографии A. E. Djrbashian, F. A. Shamoian. „Topics in the theory A^p_α spaces", Teubner-

* Содержание данного обзора в значительно менее полном виде было представлено автором в качестве доклада на международной конференции по комплексному анализу в г. Будва (Югославия) в мае 1986 г. и опубликовано там же [1].

Verlag, Leipzig, 1988, многие из основных результатов данного обзора приведены с подробными доказательствами.

§ 1. Классы аналитических функций одного и многих комплексных переменных и их интегральные представления

1.1. В первом сообщении [2] 1945 года впервые был введен класс аналитических в единичном круге $D=\{z;\ |z|<1\}$ функций $f(z)$, для которых

$$\frac{1+\alpha}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}(1-\rho^2)^\alpha\cdot|f(\rho e^{i\theta})|^\delta\rho\,d\rho\,d\theta<+\infty, \tag{1.1}$$

где $-1<\alpha<+\infty$ и $0<\delta<+\infty$ — произвольные параметры. Этот класс первоначально был обозначен через $B_\delta(\alpha)$, но впоследствии, начиная со второй публикации [3] и дальше, ввиду глубокой аналогии с классами Харди, в работе [4] автором было введено более удобное обозначение. А именно, через $H^p(\alpha)$ $(-1<\alpha<+\infty,\ 0<p<+\infty)$ обозначался класс функций $f(z)$, аналитических в круге $\mathbf{D}$, для которых конечна их норма, т. е.

$$\|f\|_{p,\alpha}\overset{\mathrm{def}}{=}\left(\frac{1+\alpha}{\pi}\iint_{\mathbf{D}}(1-|\zeta|^2)^\alpha\cdot|f(\zeta)|^p\,d\sigma(\zeta)\right)^{1/p}<+\infty. \tag{1.2}$$

Легко заметить, что при любом $\alpha>-1$ эти классы включают в себя класс H^p Харди, т. е. $H^p\subset H^p(\alpha)$ $(-1<\alpha<+\infty)$.

По-видимому, эти результаты прошли мимо некоторых исследователей. Частично лишь этим я могу объяснить то, что спустя десятилетия после публикации работы [2], а также работ [3] и [4], где впервые были введены классы $H^p(\alpha)$ и установлены их интегральные представления, появились публикации как у нас, так и за рубежом, авторы которых повторяя или обобщая лишь часть моих результатов, для этих же классов ввели, по моему убеждению, совершенно неудачные обозначения $A_{p,\alpha}$ и A_p^α и именовали их «пространствами Бергмана». Общеизвестны заслуги покойного профессора С. Бергмана в введении и изучении керн-функций в гильбертовых пространствах голоморфных функций (см., напр., его монографию [8] 1950 г.). Ни там, ни в какой-либо публикации С. Бергмана до и после 1945 года нет и следа введения им моих классов $H^p(\alpha)$. Именно поэтому «крещение» некоторыми математиками этих классов его именем является явным недоразумением.

1.2. (а) Важнейшее значение для всего данного цикла исследований имела следующая основная теорема ([2], [4]).

Теорема 1.1. *Для любой функции* $f(z)\in H^p(\alpha)$ $(1\leqslant p<+\infty,$ $-1<\alpha<+\infty)$ *имеют место интегральные представления*

$$f(z)=\frac{1+\alpha}{\pi}\iint_{\mathbf{D}}\frac{(1-|\zeta|^2)^\alpha}{(1-\bar\zeta\cdot z)^{2+\alpha}}f(\zeta)\,d\sigma(\zeta),\ z\in\mathbf{D}, \tag{1.3}$$

и

$$f(z)=-\overline{f(0)}+\frac{(1+\alpha)\cdot 2}{\pi}\iint_{\mathbf{D}}\frac{(1-|\zeta|^2)^\alpha}{(1-\bar\zeta\cdot z)^{2+\alpha}}\,\mathrm{Re}\,\{f(\zeta)\}\,d\sigma(\zeta),\ z\in\mathbf{D}, \tag{1.4}$$

где $d\sigma(\zeta)$—элемент площади $\mathbf{D}^*$.

Отметим, что для частных значений параметров $\alpha=0$ и $p=2$, интегральное представление (1.3) для класса $H^2(0)$ в неявной форме содержится в одной работе Виртингера [11] (см. также Дж. Уолш [12].

(б) В случае, когда $p=2$, справедливы также следующие теоремы ([3], [4]).

Теорема 1. 2. *1. Класс $H^2(\alpha)$ совпадает с множеством функций, представимых в виде*

$$f_F(z)=\frac{1+\alpha}{\pi}\iint\limits_{\mathbf{D}}\frac{(1-|\zeta|^2)^\alpha}{(1-\overline{\zeta}\cdot z)^{2+\alpha}}F(\zeta)\,d\sigma(\zeta),\ z\in\mathbf{D}, \tag{1.5}$$

где $F(z)$—произвольная функция, определенная на $\mathbf{D}$, с конечной нормой $\|f\|_{2,\alpha}$.

2. Функция $f_F(z)$ минимизирует интеграл

$$\iint\limits_{\mathbf{D}}(1-|\zeta|^2)^\alpha\cdot|F(\zeta)-f(\zeta)|^2\,d\sigma(\zeta) \tag{1.6}$$

в классе функций $f(z)\in H^2(\alpha)$.

В случае $\alpha=0$ (см. также [11] и [12]).

Теорема 1. 3. *1. Класс $H^2(\alpha)$ совпадает с множеством функций, представимых в виде*

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\partial\mathbf{D}}\frac{\varphi(\zeta)}{(1-\overline{\zeta}\cdot z)^{\frac{\alpha+3}{2}}}|d\zeta|,\ z\in\mathbf{D}, \tag{1.7}$$

где $\varphi(\zeta)$—произвольная функция на $\partial\mathbf{D}$ с конечной нормой

$$\|\varphi\|_{\partial\mathbf{D}}=\left(\int\limits_{\partial\mathbf{D}}|\varphi(\zeta)|^2\,|d\zeta|\right)^{1/2}. \tag{1.8}$$

2. Если $f(z)\in H^2(\alpha)$ $(-1<\alpha<+\infty)$, то функция

$$\varphi_f(z)=\frac{1+\alpha}{2}\int\limits_0^1(1-\rho)^{\frac{\alpha-1}{2}}f(\rho\cdot z)\,d\rho \tag{1.9}$$

в круге $\mathbf{D}$ принадлежит классу H^2 Харди, и имеет место формула обращения

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\partial\mathbf{D}}\frac{\varphi_f(\zeta)}{(1-\overline{\zeta}\cdot z)^{\frac{\alpha+3}{2}}}|d\zeta|,\ z\in\mathbf{D}. \tag{1.10}$$

При этом функция $\varphi_f(\zeta)$ минимизирует интеграл (1. 8) в семействе функций $\varphi(\zeta)$, определенных на $\partial\mathbf{D}$, у которых $\|\varphi\|_{\partial\mathbf{D}}<\infty$, и представляющих данную функцию $f(z)\in H^2(\alpha)$ в виде (1.7)

* Следует отметить еще, что в ряде публикаций, например, в монографии [9], а также в статье [10], ядрам типа ядер интегральных операторов теоремы 1.1 (а также приводимой нами дальше теоремы 1.7), как и классам $H_p(\alpha)$, столь же безосновательно «присуждается» имя С. Бергмана.

Классы $H^p(\alpha)$ $(0 < p < +\infty,\ -1 < \alpha < +\infty)$ являются естественными расширениями классов Харди, поскольку $H^p \subset H^p(\alpha)$, $\forall \alpha > -1$, и кроме того, справедлива следующая простая

Теорема 1.4. *Для того, чтобы аналитическая в* D *функция* $f(z)$ *принадлежала классу* H^p *Харди, необходимо и достаточно выполнения условия*

$$\lim_{\alpha\to -1} \sup \frac{1+\alpha}{\pi} \iint_{D} (1-|\zeta|^2)^\alpha \cdot |f(\zeta)|^p \, d\sigma(\zeta) < +\infty. \tag{1.11}$$

Можно доказать, что для любой функции $f(z) \in H^p (p \geq 1)$ предельный переход в формулах (1.3) и (1.10) при $\alpha \to -1$ приводит к интегральной формуле Коши

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta)}{1-\bar{\zeta}\cdot z} |d\zeta|, \quad z \in D,$$

где $f(\zeta)$ $(\zeta = e^{i\theta})$ — суть граничные значения функции $f(z)$.

(в) Расширив класс $H^p(\alpha)$ рассматриваемых функций, Ф. А. Шамоян [13] дал обобщение интегрального представления (1.3) теоремы 1.1. Но условия, налагаемые в лемме 1 его работы, целесообразно несколько видоизменить, и тогда его результат может быть сформулирован в таком виде.

Теорема 1. 5. *Пусть функция* $f(z)$ *непрерывно-дифференцируема в круге* D *и удовлетворяет условиям:*

$$\iint_{D} (1-|\zeta|^2)^\alpha \cdot |f(\zeta)|^p \, d\sigma(\zeta) < +\infty,$$

где $\alpha \in (-1, +\infty)$ *и* $p \in [1, +\infty)$.

2) *Пусть*

$$\sup_{\zeta\in D} \left\{ \left| \frac{\partial f(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}} \right| \right\} < +\infty.$$

Тогда справедлива формула

$$f(z) = \frac{1+\alpha}{\pi} \iint_{D} \frac{(1-|\zeta|^2)^\alpha}{(1-\bar{\zeta}\cdot z)^{2+\alpha}} f(\zeta)\, d\sigma(\zeta) +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \iint_{D} \left(\frac{1-|\zeta|^2}{1-\bar{\zeta}\cdot z} \right)^{1+\alpha} \cdot \frac{\partial f(\zeta)/\partial\bar{\zeta}}{z-\zeta} \, d\sigma(\zeta), \quad z \in D. \tag{1.12}$$

Заметим, что если функция $f(z)$ аналитична в круге D, то

$$\partial f(\sigma)/\partial\bar{\zeta} \equiv 0, \ \zeta \in D,$$

и формула (1.12) сводится к основному интегральному представлению (1.3) теоремы 1.1*.

* Во введении работы Шерпантье [14] приводится формула (1.12) для функций $f(z) \in C^1(\bar{D})$, при этом без какой-либо ссылки автор заявляет ее „известной" и, тем самым, пользуясь „математическим фольклором", обезличивает ее. Между тем выше

Отметим еще, что, например, в классе $C^1(\overline{\mathbf{D}})$ непрерывно-дифференцируемых в $\overline{\mathbf{D}}$ функций $f(z)$, формула (1.12), после надлежащего предельного перехода при $\alpha\to-1+0$, переходит в известную формулу Коши-Грина

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\partial\mathbf{D}}\frac{f(\zeta)}{1-\overline{\zeta}\cdot z}\,|d\zeta|+\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\mathbf{D}}\frac{\partial f(\zeta)/\partial\overline{\zeta}}{z-\zeta}\,d\sigma(\zeta),\ z\in\mathbf{D}. \quad (1.12')$$

1.3 (а) Теорема 1.1 допускает другие естественные обобщения в многомерном комплексном анализе. Чтобы привести их, сначала напомним принятые здесь простейшие обозначения.

Здесь $\mathbf{C}^n(n\geqslant1)$ означает декартово произведение n экземпляров комплексной плоскости $\mathbf{C}$. Точками $\mathbf{C}$ являются упорядоченные наборы n комплексных чисел $z=(z_1,\cdots,z_n)$, где $z_j\in\mathbf{C}$ $(1\leqslant j\leqslant n)$.

Множество точек $z=(z_1,\cdots,z_n)$, $|z_j|<1$ $(1\leqslant j\leqslant n)$, называемое единичным полидиском, обозначается символом $\mathbf{D}^n=\mathbf{D}\times\mathbf{D}\times\cdots\times\mathbf{D}$ (n раз).

Следующая теорема является тривиальным обобщением теоремы 1.1 и получается в результате ее n-кратного применения.

Т е о р е м а 1. 6. *Пусть функция $f(z)$ голоморфна в единичном полидиске D^n и принадлежит классу*

$$H^p_n(\alpha):\quad \iint\limits_{\mathbf{D}^n}W_\alpha(\zeta)\cdot|f(\zeta)|^p\,d\sigma_{2n}(\zeta)<+\infty, \quad (1.13)$$

где

$$W_\alpha(\zeta)=\prod_{j=1}^{n}(1-|\zeta_j|^2)^{\alpha_j}\ (-1<\alpha_j<+\infty,\ 1\leqslant j\leqslant n),$$

а $d\sigma_{2n}(\zeta)$ — $2n$-мерная мера Лебега для $\mathbf{D}^n$.

Тогда имеет место интегральное представление

$$f(z)=\prod_{j=1}^{n}\frac{1+\alpha_j}{\pi}\iint\limits_{\mathbf{D}^n}\Big\{\prod_{j=1}^{n}(1-|\zeta_j|^2)^{\alpha_j}\times$$

$$\times(1-\overline{\zeta}_jz_j)^{-2-\alpha_j}\Big\}f(\zeta)\,d\sigma_{2n}(\zeta). \quad (1.14)$$

(б) Более глубоким является обобщение теоремы 1.1 на случай единичного шара

$$\mathbf{B}^n=\Big\{z\in\mathbf{C}^n:|z|^2=\sum_{j=1}^{n}|z_j|^2<1\Big\},$$

где $z=(z_1,\cdots,z_n)$, $z_j\in\mathbf{C}$ $(1\leqslant j\leqslant n)$.

мы видели, что эта формула для функций $f(z)\in H^p(\alpha)$ $(-1<\alpha<+\infty,\ 1\leqslant p<+\infty)$ на самом деле известна с 1945 года, и была впервые установлена именно в работах автора [2], [4]. Что же касается формулы (1.12) теоремы 1.5, то мне неизвестны другие публикации, кроме работы Ф. А. Шамояна [13], где она была анонсирована с наметкой доказательства.

В данном случае мы сочли нужным привести не только формулировку, но краткое доказательство теоремы, содержащей в себе и одномерный случай—теорему 1.1.

Приводимое нами ниже доказательство является перенесением доказательства теоремы 1.1, изложенного в работе [4], на случай шара $\mathbf{B}^n$ $(n \geqslant 2)$.

Предварительно введем некоторые дополнительные обозначения.

Полагается, что скалярное произведение двух векторов $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbf{C}^n$ и $\zeta = (\zeta_1, \cdots, \zeta_n) \in \mathbf{C}^n$ задается формулой

$$<z, \zeta> = \sum_{j=1}^{n} z_j \overline{\zeta}_j, \tag{1.15}$$

$d\sigma_{2n}(\zeta)$, как и выше, будет означать меру Лебега в $\mathbf{C}^n = \mathbf{R}^{2n}$, а $ds(\zeta)$ — поверхностную меру Лебега на единичной сфере $S = \partial \mathbf{B}^n$.

Поскольку точки шара $\mathbf{B}_n$ в полярных координатах запишутся в виде $z = r \cdot \zeta$, где $\zeta \in S$, $r = |z| \in (0, 1)$, то указанные выше меры связаны соотношением

$$\int\limits_{\mathbf{B}^n} f(\zeta)\, d\sigma_{2n}(\zeta) = \int\limits_0^1 r^{2n-1}\, dr \int\limits_S f(r\cdot\zeta)\, ds(\zeta). \tag{1.16}$$

Обозначим через $\mathbf{Z}_+^n$ множество всех упорядоченных наборов целых чисел $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$, где $\alpha_j \geqslant 0$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$. Для произвольных $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbf{Z}_+^n$ и $z = (z_1, \cdots, z_n) \in \mathbf{C}^n$ полагается $z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \cdot \cdots \cdot z_n^{\alpha_n}$, $\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!$, $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$.

Наконец, определим класс $H^p(\alpha)$ $(0 < p < +\infty,\ -1 < \alpha < +\infty)$, как множество голоморфных в шаре $\mathbf{B}^n$ функций $f(z)$, для которых

$$\|f\|_{p,\alpha} \overset{\mathrm{def}}{\equiv} \left(\int\limits_{\mathbf{B}^n} (1 - |\zeta|^2)^\alpha \cdot |f(\zeta)|^p\, d\sigma_{2n}(\zeta) \right)^{1/p} < +\infty. \tag{1.17}$$

Справедлива следующая

Лемма 1.1 *Если* $\alpha, \beta \in \mathbf{Z}_+^n$, *то*

$$\int\limits_S \zeta^\alpha \cdot \overline{\zeta}^\beta\, ds(\zeta) = \begin{cases} 0 & , \text{ при } \alpha \neq \beta \\ \dfrac{2\pi^n\, \alpha!}{(n-1+|\alpha|)!} & , \text{ при } \alpha = \beta, \end{cases} \tag{1.18}$$

2. *Если* $\beta \in \mathbf{Z}_+^n$, $j \in \mathbf{Z}_+^1$ *и* $z \in \mathbf{C}^n$, *то*

$$\int\limits_S \zeta^\beta \cdot <z, \zeta>^j\, ds(\zeta) = \begin{cases} 0 & , \text{ при } |\beta| \neq j \\ \dfrac{2\pi^n \cdot |\beta|! \cdot z^\beta}{(n-1+|\beta|)!}, & \text{ при } |\beta| = j. \end{cases} \tag{1.19}$$

По поводу (1.18) см., например, [15] или [9].

Соотношение (1.19) следует из (1.18), если воспользоваться формулой Ньютона для $<z, \zeta>^j$.

Теорема 1.7. *Если* $f(z)\in H^p(\alpha)$ $(1\leqslant p<+\infty,\ -1<\alpha<+\infty)$, *то она допускает интегральное представление*

$$f(z)=\frac{\Gamma(1+\alpha+n)}{\pi^n\cdot\Gamma(1+\alpha)}\int\limits_{B^n}\frac{(1-|\zeta|^2)^\alpha}{(1-<z,\zeta>)^{1+\alpha+n}}f(\zeta)\,d\sigma_{2n}(\zeta),\quad z\in\mathbf{B}^n. \tag{1.20}$$

Доказательство. В шаре $\mathbf{B}^n$ функция $f(\zeta)$ допускает разложение в ряд Тейлора

$$f(\zeta)\equiv\sum_{|\beta|\geqslant 0}a_\beta\zeta^\beta,\ \zeta\in\mathbf{B}^n, \tag{1.21}$$

равномерно сходящийся в любом компакте $K\subset\mathbf{B}^n$.

Тогда при $t\in(0,\ 1)$ имеем разложение

$$f_t(\zeta)=f(t\cdot\zeta)\equiv\sum_{|\beta|\geqslant 0}a_\beta t^{|\beta|}\zeta^\beta, \tag{1.22}$$

равномерно сходящееся в $\overline{\mathbf{B}^n}$.

Заметим еще, что справедливо также биномиальное разложение

$$\frac{1}{(1-<z,\zeta>)^{1+\alpha+n}}=$$

$$=\sum_{j\geqslant 0}\frac{\Gamma(1+\alpha+n+j)}{\Gamma(1+\alpha+n)\cdot\Gamma(1+j)}<z,\zeta>^j,\quad z,\ \zeta\in\mathbf{B}^n. \tag{1.23}$$

Пользуясь разложениями (1.22) и (1.23), притом заметив, что второе также равномерно сходится при $\zeta\in\overline{\mathbf{B}^n}$, для любого фиксированного значения $z\in\mathbf{B}^n$, на основании формул (1.15) и (1.19) приходим к следующей цепочке равенств:

$$\frac{\Gamma(1+\alpha+n)}{\pi^n\cdot\Gamma(1+\alpha)}\cdot\int\limits_{B^n}\frac{(1-|\zeta|^2)^\alpha}{(1-<z,\zeta>)^{1+\alpha+n}}f_t(\zeta)\,d\sigma_{2n}(\zeta)=$$

$$=\frac{\Gamma(1+\alpha+n)}{\pi^n\cdot\Gamma(1+\alpha)}\cdot\sum_{\substack{|\beta|\geqslant 0\\ j\geqslant 0}}\Big\{a_\beta t^{|\beta|}\frac{\Gamma(1+\alpha+n+j)}{\Gamma(1+\alpha+n)\cdot\Gamma(1+j)}\times$$

$$\times\int\limits_{B^n}(1-|\zeta|^2)^\alpha\cdot\zeta^\beta\cdot<z,\zeta>^j\,d\sigma_{2n}(\zeta)\Big\}=$$

$$=\frac{1}{\pi^n\cdot\Gamma(1+\alpha)}\cdot\sum_{\substack{|\beta|\geqslant 0\\ j\geqslant 0}}\Big\{a_\beta t^{|\beta|}\frac{\Gamma(1+\alpha+n+j)}{\Gamma(1+j)}\times$$

$$\times\int\limits_0^1(1-r^2)^\alpha\cdot r^{2n-1+|\beta|+j}\,dr\int\limits_S\zeta^\beta\cdot<z,\zeta>^j\,ds(\zeta)\Big\}=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\cdot\sum_{|\beta|\geqslant 0}\Big\{a_\beta\cdot\frac{\Gamma(1+\alpha+n+|\beta|)}{\Gamma(n+|\beta|)}t^{|\beta|}\cdot z^\beta\times$$

$$\times 2\int_0^1 (1-r^2)^{\alpha}\cdot r^{2n-1+2|\beta|}\,dr \Bigg| = \sum_{|\beta|\geq 0} a_\beta t^{|\beta|} z^\beta = f_t(z). \quad (1.24)$$

Так как, очевидно, при $t\to 1-0$

$$\|f-f_t\|_{p,\alpha}\to 0,$$

то переходом к пределу в левом и крайнем правом членах формулы (1.24), получим интегральную формулу (1.20) теоремы.

(в) Из очевидных вложений $H^p(\alpha)\subset H^1(\beta)$, при $\beta > \frac{1+\alpha}{p}-1$ $(1<p<+\infty)$ и $H^1(\alpha)\subset H^1(\beta)$, $\beta\geqslant\alpha$, вытекает

Следствие. В условиях теоремы 1.7, т. е. при $f(z)\in H^p(\alpha)$ $(1\leqslant p<+\infty,\ -1<\alpha<+\infty)$ справедливо также представление

$$f(z)=\frac{\Gamma(1+\beta+n)}{\pi^n\cdot\Gamma(1+\beta)}\cdot\int_{B^n}\frac{(1-|\zeta|^2)^\beta}{(1-\langle z,\zeta\rangle)^{n+1+\beta}}f(\zeta)\,d\sigma_{2n}(\zeta),\quad z\in B^n, \tag{1.25}$$

если только $\beta>\frac{1+\alpha}{p}-1$ при $1<p<+\infty$, или $\beta\geqslant\alpha$ при $p=1$.

Замечание 1. Частный случай этого следствия, когда $\alpha=0$, содержится в работе Форелли и Рудина [10] (см. также [9]). То обстоятельство, что там соответствующий параметр β—комплексный, не меняет дела. Отметим также, что в этой работе представление (1.25) доказывается при $\beta>\frac{1}{p}-1$ и, тем самым, важный случай, когда $\beta=0$ при $p=1$, просто отсутствует.

Таким образом, теорема 1.7 является существенным обобщением теоремы 1.1, а также теоремы Форелли и Рудина (для $n\geqslant 2$).

Замечание 2. В публикациях автора [1] и [16] была допущена досадная ошибка, поскольку в них теорема 1.7 приписана Форелли и Рудину, между тем, как отмечено в замечании 1, это не так.

1.4. Методом специальных преобразований и предельного перехода, на основе теорем 1.1 и 1.7, были получены интегральные представления для классов $H_+^p(\alpha)$ функций, аналитических в верхней полуплоскости

$$G_+=\{z\in C^1,\ \operatorname{Im} z>0\}$$

и в ее n-мерном аналоге—в области Зигеля типа

$$G_+^n=\left\{z=(z_1,\cdots,z_n)\in C^n,\ \operatorname{Im} z_1>\sum_{j=2}^n|z_j|^2\right\}(n\geqslant 2).$$

Перейдем к формулировкам полученных здесь результатов.

(а) Условимся отнести к классу $H_+^p(\alpha)$ голоморфную в полуплоскости функцию $f(z)$, для которой

$$\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x+iy)|^p\cdot y^\alpha\,dx\,dy<+\infty\ (0<p<+\infty,\ -1<\alpha<+\infty). \quad (1.26)$$

Теорема 1.8 ([17]). *Если* $f(z) \in H^p_+(\alpha)$ $(1 \leqslant p < +\infty,\ -1<\alpha< +\infty)$, *то справедлива интегральная формула*

$$f(z) = c_\alpha \cdot \int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\zeta)}{(\overline{\zeta}-z)^{2+\alpha}} (\operatorname{Im}\zeta)^\alpha\, d\xi\, d\eta,\quad z \in G_+, \tag{1.27}$$

где $c_\alpha = -e^{-i\frac{\pi}{2}\alpha} \cdot 2^\alpha \cdot (1+\alpha)/\pi$, $\zeta = \xi + i\eta$.

Такое же представление справедливо с заменой α *на* β, *если только* $(p>1)$ $\beta > \dfrac{(1+\alpha)}{p} - 1$ *или* $\beta \geqslant \alpha$ $(p=1)$.

Замечание. Хотя первое последовательное и строгое доказательство теоремы 1.8 появилось только в 1985 г. в совместной с А. Э. Джрбашяном работе автора [17], на формулу (1.27) для целых значений α указывали и ранее, но не более, чем на уровне «математического фольклора» (см., напр., [18], [19]).

(б) Для формулировки аналога теоремы 1.8 для области Зигеля G^n_+ $(n \geqslant 2)$ введем некоторые дополнительные обозначения.

Для $z = (z_1, z_2, \cdots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ положим $z' = (z_2, \cdots, z_n) \in \mathbb{C}^{n-1}$, так что $z = (z_1, z')$. Кроме того, если $z, \zeta \in \mathbb{C}^n$, то будем полагать

$$\langle z', \zeta' \rangle = \sum_{j=2}^n z_j \cdot \overline{\zeta}_j,\quad |z'| = \langle z', z' \rangle^{1/2}.$$

Обозначим через $\mathrm{H}^p_+(\alpha)$ класс голоморфных в области Зигеля G^n_+ функций, для которых

$$\|f\|_{p,\alpha} \equiv \left(\int_{G^n_+} (\operatorname{Im}\zeta_1 - |\zeta'|^2)^\alpha \cdot |f(\zeta)|^p\, d\sigma_{2n}(\zeta) \right)^{1/p} < +\infty, \tag{1.28}$$

где $1 \leqslant p < +\infty$, $-1 < \alpha < +\infty$.

В работе автора, совместной с А. О. Карапетяном [16], на основе теоремы 1.7, была установлена

Теорема 1.9. *Пусть функция* $f(z)$ *голоморфна в области Зигеля* G^n_+ $(n \geqslant 2)$ *и принадлежит классу* $H^p_+(\alpha)$ $(1 \leqslant p < +\infty,\ -1<\alpha<+\infty)$. *Тогда справедлива интегральная формула*

$$f(z) = d_\alpha \cdot \int_{G^n_+} \frac{(\operatorname{Im}\zeta_1 - |\zeta'|^2)^\alpha}{[i(\overline{\zeta}_1 - z_1) - 2\langle z', \zeta' \rangle]^{1+\alpha+n}} f(\zeta)\, d\sigma_{2n}(\zeta),\quad z \in G^n_+, \tag{1.29}$$

где $d_\alpha = 2^{n-1+\alpha} \cdot \Gamma(1+\alpha+n)/\pi^n \cdot \Gamma(1+\alpha)$.

Такое же представление справедливо при замене α *на* β, *если только* $\beta > \dfrac{1+\alpha}{p} - 1$ *при* $1 < p < +\infty$ *и* $\beta \geqslant \alpha$, *при* $p = 1$.

Эта теорема при $\alpha=\beta=0$ и $p=2$ является следствием значительно более общей теоремы, установленной С. Г. Гиндикиным [20] методом применения техники преобразований Фурье-Планшереля.

(в) Легко видеть, что во всех формулах интегральных представлений теорем 1.1, 1.7—1.9 можно вместо аналитических функций подставить произвольные измеримые функции из классов L^p с соответствующим весом в каждой из рассматриваемых областей. В результате все интегралы будут иметь смысл и будут аналитическими функциями в соответствующих областях.

В этой связи справедлива

Теорема 1.10. *Пусть $G\subset\mathbf{C}^n$ $(n\geqslant 1)$ одна из областей из теорем 1.1 1.7—1.9, где мы имеем интегральное представление для надлежащих классов $H^p_G(\alpha)$. Пусть, далее, $K_\alpha(z;\zeta)$ и $\rho_G(z)$—соответствующие представляющие ядра и весовые функции.*

Если $L^p_\alpha(G)$—множество функций $f(z)$, $z\in G$, с конечным интегралом

$$\int\limits_G \rho^\alpha_G(\zeta)\cdot|f(\zeta)|^p\, d\sigma_{2n}(\zeta)<+\infty, \tag{1.30}$$

то оператор

$$T_\beta f(z)=\int\limits_G \rho^\beta_G(\zeta)\cdot K_\beta(z;\zeta)\cdot f(\zeta)\, d\sigma_{2n}(\zeta),\quad z\in G, \tag{1.31}$$

является непрерывным проектором из пространства $L^p_\alpha(G)$ в $H^p_G(\alpha)$ $(1\leqslant p<+\infty,\ -1<\alpha<+\infty)$ только при соблюдении условия $\beta>(1+\alpha)/p-1$.

В случае шара $\mathbf{B}^n$ теорема эта доказывается так же, как и в работе [10], где был рассмотрен частный случай, когда $\alpha=0$. В случае области $G^n_+\subset\mathbf{C}^n$ $(n\geqslant 1)$ доказательство приведено в работах [17] и [16].

§ 2. Каноническая факторизация подклассов мероморфных в круге D функций с неограниченной характеристикой Р. Неванлинны

2.1. Введенные в § 1 классы $H(\alpha)$ и их интегральные представления преследовали важную цель. Она заключалась в установленных в тех же работах [2] и [4] теоремах о канонической факторизации мероморфных в единичном круге D функций $F(z)$, для которых конечен интеграл вида

$$\int\limits_0^1 (1-r)^\alpha\cdot T(r,F)\,dr,\quad \alpha\in(-1,+\infty). \tag{2.1}$$

При этом здесь

$$T(r,F)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\log^+|F(re^{i\theta})|\,d\theta+\int\limits_0^r\frac{n(t,\infty)-n(0,\infty)}{t}\,dt+$$

$$+n(0,\infty)\log r\equiv m(r,\infty)+N(r,\infty) \tag{2.2}$$

характеристическая функция Р. Неванлинны, а $m(r,\infty)$ и $N(r,\infty)$—известные ее слагаемые.

(а) Пусть $w=F(z)$ мероморфна в круге D, и в окрестности $z=0$ ее разложение в ряд Лорана имеет вид

$$F(z)=c_\lambda\cdot z^\lambda+\cdots\quad(c_\lambda\neq 0), \tag{2.3}$$

где $\lambda\lesseqgtr 0$—целое.

Пусть $\{a_\mu\}$ и $\{b_\nu\}$, соответственно, означают отличные от $z=0$ последовательности всевозможных нулей и полюсов функции $F(z)$, расположенные в порядке неубывания их модулей, причем с условием, что каждый кратный нуль или полюс пишется столько раз, какова его кратность.

В работах [2] и [4], прежде всего, устанавливаются следующие результаты.

Теорема 2.1. *Пусть $F(z)$ мероморфна в круге $\mathrm{D}_R=\{z:|z|<R\}$ с нулями $\{a_\mu\}$ и полюсами $\{b_\nu\}$.*

Тогда при любом значении параметра $\alpha\in(-1,+\infty)$ и для любого $r\in(0,R)$ справедлива формула

$$\log F(z)=\frac{2(1+\alpha)}{\pi}\int_0^r\int_0^{2\pi}(r^2-\rho^2)^\alpha\frac{\log|F(\rho e^{i\theta})|}{(r^2-z\rho e^{-i\theta})^{\alpha+2}}\rho d\rho\, d\theta+$$

$$+\sum_{0<|a_\mu|<r}\log\left(1-\frac{z}{a_\mu}\right)\cdot\exp\left\{-U_\alpha\left(\frac{z}{r},\frac{a_\mu}{r}\right)\right\}-\sum_{0<|b_\nu|<r}\log\left(1-\frac{z}{b_\nu}\right)\cdot$$

$$\cdot\exp\left\{-U_\alpha\left(\frac{z}{r},\frac{b_\nu}{r}\right)\right\}+\lambda\log z+4\lambda(1+\alpha)\cdot r^{-2\alpha-2}. \tag{2.4}$$

$$\cdot\int_0^r(r^2-\rho^2)^\alpha\cdot\rho\log\frac{1}{\rho}\,d\rho-\log\bar{c}_\lambda,\quad z\in\mathrm{D}_r,$$

где

$$U_\alpha(z,\zeta)=\frac{2(1+\alpha)}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}(1-\rho^2)^\alpha\frac{\log\left|1-\frac{\rho e^{i\theta}}{\zeta}\right|}{(1-z\rho e^{-i\theta})^{\alpha+2}}\rho d\rho d\theta. \tag{2.5}$$

При этом отметим, что формула (2.4)—(2.5) явилась существенным обобщением классической формулы Иенсена-Неванлинны и после предельного перехода $\alpha\to-1+0$ совпадает с нею, в чем легко убедиться (см. [4], стр. 21—22).

(б)Введенная по формуле (2.5) функция $U_\alpha(z,\zeta)$ обладает важными свойствами.

Теорема 2.2. *При $z\in\mathrm{D}$ и $0<|\zeta|\leqslant 1$ функция $U_\alpha(z,\zeta)$ допускает разложение*

$$U_\alpha(z,\zeta)=\int_{|\zeta|^2}^1\frac{(1-t)^{1+\alpha}}{t}dt-$$

$$-\sum_{k=1}^\infty\frac{\Gamma(2+\alpha+k)}{\Gamma(2+\alpha)\Gamma(1+k)}\left(\frac{z}{\zeta}\right)^k\int_0^{|\zeta|^2}(1-t)^{1+\alpha}t^{k-1}dt, \tag{2.6}$$

а при $0 < |z| < |\zeta| < 1$ *она представима в виде*

$$U_\alpha(z, \zeta) = \log\left(1 - \frac{z}{\zeta}\right) + \int_{|\zeta|^2}^{1} \frac{(1-t)^{1+\alpha}}{\left(1 - \frac{z}{\zeta} t\right)^{\alpha+2}} \frac{dt}{t}. \tag{2.7}$$

Теорема 2.3. 1°. *Имеет место реккурентная формула*

$$U_{\alpha-1}(z, \zeta) - U_\alpha(z, \zeta) = \frac{1}{1+\alpha}\left(\frac{1-|\zeta|^2}{1-\overline{\zeta} z}\right)^{1+\alpha} (\alpha > 0). \tag{2.8}$$

2°. *При любом целом* $\alpha = p \geqslant -1$

$$U_p(z, \zeta) = \begin{cases} \log \dfrac{1-\overline{\zeta} z}{|\zeta|^2}, \text{ при } p = -1 \\ -\log \dfrac{|\zeta|^2}{1-\overline{\zeta} z} - \sum\limits_{j=0}^{p} \dfrac{1}{1+j}\left(\dfrac{1-|\zeta|^2}{1-\overline{\zeta} z}\right)^{1+j}, \text{ при } p \geqslant 0. \end{cases} \tag{2.9}$$

Из этой теоремы следует

Теорема 2.4. 1°. *Если* $p \geqslant 0$ *— целое число, то при* $0 < |\zeta| \leqslant 1$, $z \in D$

$$\left(1 - \frac{z}{\zeta}\right) \exp\{-U_p(z, \zeta)\} =$$

$$= \left(1 - \frac{1-|\zeta|^2}{1-\overline{\zeta} z}\right) \cdot \exp\left\{\sum_{j=0}^{p} \frac{1}{1+j}\left(\frac{1-|\zeta|^2}{1-\overline{\zeta} z}\right)^{1+j}\right\}. \tag{2.10}$$

2°. *Если* $p = -1$, *то*

$$\left(1 - \frac{z}{\zeta}\right) \cdot \exp\{U_{-1}(z, \zeta)\} = \frac{\zeta - z}{1 - \overline{\zeta} z} \overline{\zeta};\ z, \zeta \in D. \tag{2.11}$$

(в) Формула (2.8) теоремы 2.3 приводит нас к существенному расширению классического понятия функции Бляшке.

Здесь устанавливается следующий основной результат.

Теорема 2.5. *Пусть* $\{z_k\}_1^\infty \subset D$ $(0 < |z_k| \leqslant |z_{k+1}|)$ *— любая последовательность комплексных чисел, для которой при данном* $\alpha \in (-1, +\infty)$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1 - |z_k|)^{2+\alpha} < +\infty. \tag{2.12}$$

Тогда бесконечное произведение

$$\pi_\alpha(z, z_k) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_k}\right) \exp\{-U_\alpha(z, z_k)\} \tag{2.13}$$

абсолютно и равномерно сходится на любом компакте $K \subset D$, *не содержащем точек последовательности* $\{z_k\}_1^\infty$. *При этом оно представляет аналитическую в круге* D *функцию, равную нулю только в точках последовательности* $\{z_k\}_1^\infty$.

Здесь надо отметить важное

Следствие. *При* $\alpha=-1$

$$\pi_{-1}(z, z_k) = c_0 \cdot \mathrm{B}(z, z_k), \tag{2.14}$$

где

$$\mathrm{B}(z, z_k) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{z_k - z}{1 - \bar{z}_k \cdot z} \cdot \frac{|z_k|}{z_k} \tag{2.15}$$

произведение Бляшке, а $c_0 = \prod_{k=1}^{\infty} z_k \neq 0$ — постоянная.

Таким образом, $\pi_\alpha(z, z_k)$ $(-1<\alpha<\infty)$ является существенным обобщением функции Бляшке в том случае, когда последовательность ее нулей $\{z_k\}_1^\infty$ вместо условия Бляшке

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1 - |z_k|) < +\infty$$

подчинена условию вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1 - |z_k|)^{\alpha+2} < +\infty, \ \alpha \in (-1, +\infty).$$

(г) Обозначим через N_α^* $(-1<\alpha<+\infty)$ множество мероморфных в круге D функций $F(z)$, для которых

$$\int_0^1 (1-r)^\alpha \cdot T(r, F)\, dr < +\infty.$$

Тогда основная теорема факторизации класса N_α^* формулируется таким образом ([2], [4]).

Теорема 2.6. *Любая функция* $F(z) \in N_\alpha^*$ $(-1<\alpha<+\infty)$ *допускает каноническую факторизацию вида*

$$F(z) \equiv K(\lambda, \alpha)\, z^\lambda \frac{\pi_\alpha(z, a_\mu)}{\pi_\alpha(z, b_\nu)} \times$$

$$\times \exp\left\{\frac{2(1+\alpha)}{\pi} \iint_{\mathrm{D}} (1-|\zeta|^2)^\alpha \frac{\log|F(\zeta)|}{(1-\bar{\zeta}z)^{\alpha+2}}\, d\sigma(\zeta)\right\}, \ z \in \mathrm{D}, \tag{2.16}$$

где $\pi_\alpha(z, a_\mu)$ *и* $\pi_\alpha(z, b_\nu)$ *определяются из* (2.13), $\lambda \geqq 0$ — *целое число,*

$$K(\alpha, \lambda) = \bar{c}_\lambda^{-1} \cdot \exp\left\{\lambda(1+\alpha)\int_0^1 (1-\rho)^\alpha \log\frac{1}{\rho}\, d\rho\right\}. \tag{2.17}$$

По поводу этой теоремы отметим, что если $p \geqslant 0$ — наименьшее целое число, для которого

$$\int_0^1 (1-\rho)^p \cdot T(\rho, F)\, d\rho < +\infty,$$

то в представлении (2.16) факторы произведений π_p, отделяющих нули и полюсы функции $F(z)$, могут быть записаны в более простом виде (2.10), напоминающем классические факторы Вейерштрасса.

Впрочем, при $\alpha=p\geqslant 0$ целом, вид соответствующих факторов (2.10) и произведений легко угадать, если применить схему построения факторов Вейерштрасса к факторам Бляшке вида $\frac{\zeta - z}{1-\bar\zeta z}\bar\zeta$.

Наконец отметим, что спустя 11 лет после нашей публикации [2] этот частный случай факторов и произведений $\pi_p(z)$ был вновь введен японским математиком Цудзи [21].

2.2. В связи с основной теоремой факторизации 2.6 естественно возникли постановки ряда соответствующих задач.

Приведем здесь краткую сводку решений такого рода задач, которые в основном были даны Ф. А. Шамояном [22].

(а) Пусть $\dot{A}_\alpha$ $(-1<\alpha<+\infty)$ — класс голоморфных в круге D функций $f(z)$, для которых

$$\iint\limits_{D} (1-|\zeta|^2)^\alpha \cdot \log^+ |f(\zeta)|\, d\sigma(\zeta) < +\infty. \tag{2.18}$$

Очевидно, что имеет место включение $\dot{A}_\alpha \subset \dot{N}_\alpha$ и, тем самым, любая функция $f(z)\in \dot{A}_\alpha$ допускает факторизационное представление (2.16) теоремы 2.6, но без множителя $\pi_\alpha^{-1}(z, b_\nu)$.

Теорема 2.7. *Если* $\{z_k\}_1^\infty \subset D$, *то*

1. *При условии*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1-|z_k|)^{\alpha+2} < +\infty \quad (-1<\alpha<+\infty) \tag{2.19}$$

для любого $\beta>\alpha$ *будем иметь*

$$\pi_\beta(z, z_k) \in \dot{A}_\alpha. \tag{2.20}$$

2. *При условии*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1-|z_k|)^{\alpha+2} \cdot \log\frac{1}{1-|z_k|} < +\infty \tag{2.21}$$

имеет место включение $\pi_\alpha(z, z_k)\in \dot{A}_\alpha$.

3. *Если* $\{z_k\}_1^\infty \subset D$ *лежит внутри некоторого угла Штольца раствора* $<\pi$ *с вершиной на* ∂D *и ряд* (2.21) *расходится, то* $\pi_\alpha(z, z_k)\,\overline{\in}\,\dot{A}_\alpha$.

Из утверждений теоремы 2.7, в частности следует, что в факторизации функции $f(z)\in\dot{A}_\alpha$ возможны случаи, когда отдельные факторы все же не входят в тот же класс $\dot{A}_\alpha$.

Однако, имеет место следующее усиление теоремы 2.6 [23].

Теорема 2.8. *Класс* $\dot{A}_\alpha$ $(-1<\alpha<+\infty)$ *совпадает с множеством функций* $f(z)$, *допускающих представление вида*

$$f(z) = c(\alpha, \beta)\, z^\lambda \cdot \pi_\beta(z, a_\mu) \times$$

$$\times \exp\left\{\iint\limits_{D} \frac{(1-|\zeta|^2)^\beta}{(1-\bar\zeta z)^{\beta+2}}\, d\mu(\zeta)\right\},\ z\in D. \tag{2.22}$$

Здесь $\beta > \alpha$ любое, $c(\alpha, \beta)$ — постоянная, $\lambda \geqslant 0$ — целое, а последовательность $\{a_\mu\} \subset D$ и подчинена условию

$$\sum_\mu (1 - |a_\mu|)^{\alpha+2} < +\infty. \tag{2.23}$$

Наконец, $\mu(\zeta)$ — произвольная вещественная мера на D с конечным интегралом

$$\iint_D (1 - |\zeta|^2)^\alpha \, |d\mu(\zeta)| < +\infty. \tag{2.24}$$

(б) Приведем некоторые замечания к результатам этого пункта ([23], [24], [25]).

1. Положим, что функция $\omega(t) \in C^1(0, 1)$ и такова, что

$$\omega(t) > 0, \ t \in (0, 1); \ \int_0^1 \omega(t)\, dt < +\infty;$$

$$\sup_{t \in (0, 1)} \frac{|\omega'(t)| \cdot (1 - t)}{\omega(t)} < +\infty. \tag{2.25}$$

Тогда аналог теоремы 2.8 при надлежащих переформулировках останется в силе и для класса

$$A_\omega^* : \iint_D \omega(|\zeta|) \log^+ |f(\zeta)| \, d\sigma(\zeta) < +\infty. \tag{2.26}$$

2. Введем класс X_φ^{**} аналитических в круге D функций $f(z)$ с мажорантой вида

$$|f(z)| < \exp\left\{C_f \cdot \varphi\left(\frac{1}{1 - |z|}\right)\right\}, \ z \in D, \tag{2.27}$$

где $C_f > 0$ — постоянная, а функция $\varphi(t)$ из класса $C^1(0, +\infty)$ и подчинена условиям типа

$$\alpha_\varphi = \limsup_{x \to +\infty} \frac{x \cdot \varphi'(x)}{\varphi(x)} < +\infty, \ \beta_\varphi = \liminf_{x \to +\infty} \frac{x \cdot \varphi'(x)}{\varphi(x)} > 1. \tag{2.28}$$

В цитированных выше работах Ф. А. Шамояна для классов X_φ^{**} была получена полная характеристика нулей и аналог теоремы 2.8. При этом было установлено также, что условия (2.28) существенно необходимы для справедливости соответствующих результатов.

Наконец, последние результаты в дальнейшем были успешно применены в исследовании замкнутых идеалов в алгебрах аналитических в круге D функций.

В заключение отметим, что приведенные выше результаты были получены на основе фундаментальных свойств произведений $\pi_\alpha(z, a_\mu)$, введенных в нашей первоначальной работе [2].

§ 3. Канонические факторизации классов голоморфных в полуплоскости G_+ функций с неограниченной характеристикой М. Цудзи

Существенное продвижение в исследованиях наших математиков за последние десять лет было достигнуто благодаря циклу работ в области интегральных и факторизационных представлений мероморфных в полуплоскости функций обобщенно-ограниченного вида ([26]—[29]). Эти результаты по духу родственны общей теории факторизации мероморфных в круге $\mathbf{D}$ функций, развитой нами в период 1964—1971 г.г. На них, как и на результатах автора указанного периода мы останавливаться не будем.

В случае полуплоскости $G_+=\{z, \operatorname{Im} z>0\}$ так же как и в случае круга $\mathbf{D}$, представляет особый интерес нахождение аналогичных приведенным в § 2 простых, но вместе с тем удобных для приложений классов функций и их факторизационных представлений. Недавно результаты такого рода для полуплоскости G_+ также были получены А. М. Джрбашяном [30]. Их мы приводим ниже в пунктах 3.1, 3.2. В конце параграфа, в пункте 3.3, приводятся другие результаты А. М. Джрбашяна [35], которые, в частности, также посвящены изучению классов аналитических в G_+ функций с неограниченной характеристикой Цудзи.

3.1 (а) Характеристическая функция $T(r, F)$ Р. Неванлинны (2.2) инвариантна относительно вращения круга вокруг начала координат. Естественным ее аналогом для полуплоскости можно считать специальный тип характеристики М. Цудзи, инвариантный при параллельном перемещении верхней полуплоскости относительно вещественной оси.

Для любой функции $F(z)$, мероморфной в верхней полуплоскости $G_+=\{z, \operatorname{Im} z>0\}$, характеристикой Цудзи будем называть функцию

$$\mathbf{L}(\rho, F)\equiv\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\log^+|F(x+i\rho)|\,dx+\int_{\rho}^{+\infty}(t-\rho)\,d\varkappa(t, F)\equiv$$

$$\equiv\mathbf{m}(\rho, F)+\mathbf{N}(\rho, F)\quad(0<\rho<+\infty), \tag{3.1}$$

где $\varkappa(t, F)$—количество полюсов $F(z)$, лежащих в полуплоскости $G_+(t)=\{z, \operatorname{Im} z>t>0\}$.

Заметим, что величина $\mathbf{L}$ представляет собой инверсию специального случая характеристики М. Цудзи [31] с интегралом, взятым по всей касательной к вещественной оси окружности.

Впервые классы аналитических в G_+ функций $F(z)$, для которых

$$\sup_{\rho>0}\int_{-\infty}^{+\infty}\log^+|F(x+i\rho)|\,dx<+\infty \tag{3.1'}$$

(т. е. ограничена характеристика $\mathbf{L}(\rho, F)$), были рассмотрены В. И. Крыловым [32] в 1939 г., при этом, значительно раньше работ Б. Я. Левина [33] и М. Цудзи [31], связанных соответственно с вопросом выявления и исследованием такого рода характеристик.

Применив специальный способ исчерпания полуплоскости G_+, намеченный в статье [17], автор работы [30], опираясь на теорему 2.6, методом тонких предельных переходов установил каноническую факторизацию классов типа В. И. Крылова $N^m_{\alpha,\beta}$ $(-1 < \alpha < +\infty, \quad 0 \leqslant \beta \leqslant 2 + \alpha)$ мероморфных в полуплоскости G_+ функций $F(z)$, у которых характеристика Цудзи $L(\rho, F)$, вообще говоря, не ограничена.

Ниже с некоторыми незначительными, но целесообразными для данного изложения видоизменениями, приводится основное содержание работы [30]. С этой целью сначала же необходимо отметить, что далеко не для всех функций $F(z)$, мероморфных в полуплоскости G_+, имеет место соотношение равновесия между характеристиками $L(\rho, F)$ и $L(\rho, F^{-1})$. По этой причине в работе [30] классы $N^m_{\alpha,\beta}(-1<\alpha<+\infty, 0\leqslant\beta\leqslant2+\alpha)$ естественно было определить как множества тех мероморфных в G_+ функций $F(z)$, для которых

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha}}{1+t^{\beta}} [L(t, F) + L(t, F^{-1})]\, dt < +\infty. \qquad (3.2)$$

Для этих классов имеют место включения

$$\begin{gathered} N^m_{\alpha,\beta_1} \subseteq N^m_{\alpha,\beta_2} (-1 < \alpha < +\infty, \ 0 < \beta_1 \leqslant \beta_2 < \alpha + 2) \\ N^m_{\alpha,\beta} \subseteq N^m_{\alpha+\delta,\beta+\delta} (-1 < \alpha < +\infty, \ 0 < \beta \leqslant 2 + \alpha, \ 0 < \delta < +\infty). \end{gathered} \qquad (3.3)$$

(б) В факторизационных представлениях классов $N^m_{\alpha,\beta}$ участвуют особого рода произведения типа Бляшке для полуплоскости G_+. На основе идеи работы А. М. Джрбашяна [26] (см. также [28]) в другой его работе [34], совместной с Г. В. Микаеляном, были введены факторы вида

$$a_\alpha(z, \zeta) \equiv \exp\left\{-\int\limits_0^{2\,\mathrm{Im}\,\zeta} \frac{\tau^{\alpha+1}}{[\tau - i(z-\zeta)]^{\alpha+2}}\, d\tau\right\}, (-2 < \alpha < +\infty, \zeta \in G_+) \quad (3.4)$$

и установлена следующая

Теорема 3.1. 1. *Функция $a_\alpha(z, \zeta)$ $(-2 < \alpha < \infty, \zeta \in G_+)$ аналитична в полуплоскости G_+ и имеет нуль, притом первого порядка, только в точке $z = \zeta$. При этом*

$$a_{-1}(z, \zeta) = \frac{z-\zeta}{z-\bar{\zeta}}. \qquad (3.5)$$

2. *При любом $\alpha \in (-1, +\infty)$ справедлива реккурентная формула*

$$a_\alpha(z, \zeta) = a_{\alpha-1}(z, \zeta) \cdot \exp\left\{\frac{1}{1+\alpha}\left(\frac{2i\,\mathrm{Im}\,\zeta}{z-\bar{\zeta}}\right)^{1+\alpha}\right\}. \qquad (3.6)$$

3. *При любом целом $\alpha = p \geqslant 1$ имеет место представление*

$$a_p(z, \zeta) = \frac{z-\zeta}{z-\bar{\zeta}} \exp\left\{\sum_{j=1}^{p} \frac{1}{1+j}\left(\frac{2i\,\mathrm{Im}\,\zeta}{z-\bar{\zeta}}\right)^{1+j}\right\}. \qquad (3.7)$$

Для произведений с такого рода факторами справедлива

Теорема 3.2. *Если последовательность $\{z_k\}_1^\infty \subset G_+$ при данном $\alpha \in (-2, +\infty)$ удовлетворяет условию*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\operatorname{Im} z_k)^{2+\alpha} < +\infty, \tag{3.8}$$

то бесконечное произведение

$$\mathbf{B}_\alpha (z, \{z_k\}_1^\infty) \equiv \mathbf{B}_\alpha (z) \equiv \prod_{k=1}^{\infty} a_\alpha (z, z_k) \tag{3.9}$$

абсолютно и равномерно сходится внутри G_+ и представляет аналитическую функцию, нули которой совпадают с последовательностью чисел $\{z_k\}_1^\infty$. При этом порядок нуля в каждой точке $z = z_k$ $(k \geqslant 1)$ равен кратности его появления в последовательности $\{z_k\}_1^\infty$.

в) Установлена следующая теорема о канонической факторизации функций классов $\mathbf{N}^\infty_{\alpha, \beta}$.

Теорема 3.3. *Пусть $F(z) \in \mathbf{N}^\infty_{\alpha, \beta}$ $(-1 < \alpha < +\infty,\ 0 \leqslant \beta \leqslant 2+\alpha)$. Тогда*

1. *Интеграл*

$$\iint\limits_{G_+} \frac{(\operatorname{Im}\zeta)^\alpha}{1 + (\operatorname{Im}\zeta)^\beta} \cdot |\log |F(\zeta)|| \, d\sigma(\zeta) < +\infty \tag{3.10}$$

(здесь $d\sigma(\zeta)$ — элемент площади). Кроме того, нули $\{a_\mu\}$ и полюсы $\{b_\nu\}$ функции $F(z)$ таковы, что

$$\sum_{\mu} (\operatorname{Im} a_\mu)^{2+\alpha} < +\infty, \quad \sum_{\nu} (\operatorname{Im} b_\nu)^{2+\alpha} < +\infty. \tag{3.11}$$

2. *Справедливо каноническое представление вида*

$$F(z) \equiv C_F \frac{\mathbf{B}_\alpha (z, a_\mu)}{\mathbf{B}_\beta (z, b_\nu)} \times$$

$$\times \exp\left\{D_\alpha \cdot \iint\limits_{G_+} (\operatorname{Im}\zeta)^\alpha \frac{\log |F(\zeta)|}{(\bar\zeta - z)^{\alpha+2}} d\sigma(\zeta)\right\}, \quad z \in G_+, \tag{3.12}$$

где $C_F = \lim\limits_{t \to \infty} [F(-it)]^{-1} \neq 0$, причем $C_F = \pm 1$, если $0 \leqslant \beta < 2+\alpha$, а $D_\alpha = (\alpha + 1) \cdot 2^{\alpha+1} \cdot e^{-\pi i/2 \cdot (\alpha+2)} \cdot \pi^{-1}$.

Следует отметить, что такие же канонические факторизации допускают аналитические в G_+ функции $f(z)$ из рассмотренных в той же работе классов, определенных некоторыми ограничениями, накладываемыми лишь на их характеристики роста $\mathbf{L}(\rho, f)$.

3.2 (а) Автору работы [30] удалось также установить своеобразные аналоги приведенных в п. 2.2 результатов для круга. Для произведений типа Бляшке $\mathbf{B}_\alpha$ (z) имеет место важная для дальнейшего оценка.

Теорема 3.4. *Если для $\{z_k\}_1^\infty \subset G_+$ выполняется условие* (3.8), *то справедлива оценка*

$$\log |\mathbf{B}_\alpha (z, \{z_k\})| \leqslant C_\alpha \cdot \sum_k \left(\frac{\operatorname{Im} z_k}{|z - \bar z_k|}\right)^{2+\alpha}, \quad (-1 < \alpha < \infty). \tag{3.13}$$

Не менее существенным является справедливость соотношения равновесия

$$\mathbf{L}(\rho,\ \mathbf{B}_\alpha) = \mathbf{L}(\rho,\ \mathbf{B}_\alpha^{-1})\ (0 < \rho < \infty,\ -1 < \alpha < \infty) \tag{3.14}$$

и следующей теоремы.

Теорема 3.5 *Если* $\{z_k\}_1^\infty \subset G_+$, *то*

1. *При условии*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\operatorname{Im} z_k)^{\alpha+2} < +\infty\ (-1 < \alpha < +\infty) \tag{3.15}$$

для любого $\beta > \alpha$ *имеет место включение*

$$\mathbf{B}_\beta(z) \in \mathbf{N}^m_{\alpha,\,0}.$$

2. *Для* $\operatorname{Im} z_k < 1$ $(k \geqslant 1)$, *при условии*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\operatorname{Im} z_k)^{\alpha+2} \log \frac{1}{\operatorname{Im} z_k} < +\infty\ (-1 < \alpha < +\infty) \tag{3.16}$$

для любого $\beta > 0$ *имеет место включение*

$$\mathbf{B}_\alpha(z) \in \mathbf{N}^m_{\alpha,\,\beta}.$$

3. *Если* $\operatorname{Re} z_k = 0$ $(k \geqslant 1)$ *и ряд* (3.16) *расходится, то* $\mathbf{B}_\alpha(z) \overline{\in} \mathbf{N}^m_{\alpha,\,\alpha+2}$.

(б) Наконец, на основе результатов, приведенных выше, была установлена следующая теорема о параметрическом представлении классов $\mathbf{N}^m_{\alpha,\,\beta}$.

Теорема 3.6. *Класс* $\mathbf{N}^m_{\alpha,\,\beta}$ $(-1 < \alpha < +\infty,\ 0 \leqslant \beta < 1 + \alpha)$ *совпадает с множеством функций, допускающих при каком-либо* $\alpha_0 > \alpha$ *представление вида*

$$F(z) = \pm \frac{\mathbf{B}_{\alpha_0}(z,\ \{a_\mu\})}{\mathbf{B}_{\alpha_0}(z,\ \{b_\nu\})} \times$$

$$\times \exp\left\{\frac{2^{1+\alpha_0}\cdot(1+\alpha_0)}{\pi}\, e^{-i\frac{\pi}{2}(2+\alpha_0)} \cdot \iint\limits_{G_+} \frac{(\operatorname{Im}\zeta)^{\alpha_0}}{(\overline{\zeta} - z)^{\alpha_0+2}}\, d\mu(\zeta)\right\},\ z \in G_+, \tag{3.17}$$

где последовательности $\{a_\mu\}$, $\{b_\nu\} \in G_+$ *подчинены условию* (3.11), *а* $\mu(\zeta) = \mu_{\alpha_0}(\zeta)$ — *функция ограниченной вариации на каждом компакте* G_+ *такая, что*

$$\iint\limits_{G_+} \frac{(\operatorname{Im}\zeta)^\alpha}{1 + (\operatorname{Im}\zeta)^\beta}\, |d\mu(\zeta)| < +\infty. \tag{3.18}$$

Установлено также, что в случае, когда $1+\alpha < \beta \leqslant 2 + \alpha$, классы $\mathbf{N}^m_{\alpha,\,\beta}$ $(-1 < \alpha < +\infty)$ не допускают параметрического представления вида (3.17)—(3.18).

3.3. В этом пункте приводится краткий обзор некоторых результатов, установленных в недавней работе А. М. Джрбашяна [35].

(a) Основной из установленных результатов усиливает и дополняет классический факторизационный результат Р. Неванлинны [36] (см. также [37] п. п. 6.3.—6.5) в полуплоскости.

Р. Неванлинна дал полное описание класса аналитических функций $f(z)$ ограниченного вида в полуплоскости $G_+=\{z, \operatorname{Im} z>0\}$, непрерывных вплоть до вещественной оси. Этим полным описанием является следующая пара условий на рост функции

$$\varliminf_{R\to+\infty}\frac{1}{R}\int_0^\pi \log^+|f(Re^{i\theta})|\cdot\sin\theta\, d\theta<+\infty, \tag{3.19}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\log^+|f(x)|}{1+x^2}\,dx<+\infty. \tag{3.20}$$

В отличие от указанного класса в работе [35] вводится в рассмотрение семейство классов N_γ^* $(-1<\gamma\leqslant 2)$, аналитических в полуплоскости G_+ функций $f(z)$, подчиненных условиям:

$$\varliminf_{R\to+\infty}\frac{1}{R}\int_0^\pi \log^+|f(Re^{i\theta})|\sin\theta\, d\theta=\begin{cases}0, & \text{при } -1<\gamma\leqslant 1\\ <\infty, & \text{при } 1<\gamma<2,\end{cases} \tag{3.21}$$

$$\varliminf_{R\to+\infty}\varliminf_{y\to 0}\int_{-R}^{R}\frac{\log^+|f(x+iy)|}{(1+|x|)^\gamma}\,dx<+\infty. \tag{3.22}$$

Первое принципиальное отличие этих классов от класса, рассмотренного Р. Неванлинной в полуплоскости, как видим, заключается в том, что в их определении вовсе не предполагается даже существования граничных значений функций класса N_γ^* на вещественной оси. Значительная общность условий (3.21)—(3.22), налагаемых на классы N_γ^* по сравнению с классическими условиями (3.19)—(3.20) очевидна.

Установлена следующая

Теорема 3.7. *Класс N_γ^* $(-1<\gamma\leqslant 2)$ совпадает с множеством аналитических в G_+ функций $f(z)$, допускающих представление вида*

$$f(z)=e^{ic}\cdot B(z)\cdot\exp\left\{-ihz+\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1+tz}{t-z}\,\frac{d\mu(t)}{1+t^2}\right\},\ z\in G_+. \tag{3.23}$$

Здесь

$$B(z)=\prod_k\frac{z-a_k}{z-\bar a_k}\,\frac{|1+a_k^2|}{1+a_k^2} \tag{3.24}$$

—произведение Бляшке с нулями $\{a_k\}\subset G_+$ функции $f(z)$, h, C—вещественные числа (причем $h\leqslant 0$, при $-1<\gamma\leqslant 1$), а $\mu(t)$ — произвольная вещественная функция на $(-\infty,+\infty)$, допускающая разложение

$$\mu(t)=\mu^+(t)-\mu^-(t), \tag{3.25}$$

где $\mu^{\pm}(t)$—неубывающие функции, такие, что

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\mu^{+}(t)}{(1+|t|)^{\gamma}} < +\infty, \quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\mu^{-}(t)}{(1+|t|)^{2}} < +\infty. \tag{3.26}$$

Из параметрического представления (3.23)—(3.26) классов N_{γ}^{*} непосредственно вытекает, что класс N_{γ}^{*}, монотонно расширяясь с возрастанием параметра γ, при $\gamma=2$ совпадает с множеством всех аналитических в G_{+} функций ограниченного вида. И, тем самым, при $\gamma=2$ условия (3.21)—(3.22) являются, в отличие от отмеченного выше результата Р. Неванлинны, полным описанием уже всего класса аналитических в G_{+} функций ограниченного вида. Причем этот результат одновременно содержит в себе результат Р. Неванлинны.

Из параметрического представления (3.23)—(3.26) также непосредственно вытекает, что представление класса N_{0}^{*} совпадает с представлением класса В. И. Крылова, определенного условием (3.1′) ограниченности характеристики Цудзи.

(б) Своеобразие и общность приведенных ниже теоремы типа Фрагмена-Линделёфа и теоремы единственности автора работы [35] заключается в том, что поведение вблизи вещественной оси рассматриваемой аналитической в G_{+} функции $f(z)$ вместо общепринятого условия Р. Неванлинны

$$\overline{\lim_{\substack{z\to x\\ z\in G_{+}}}} |f(z)| \leqslant 1 \quad (-\infty < x < +\infty) \tag{3.27}$$

подчинено некоторым интегральным ограничениям большей общности.

Нижеприводимая теорема единственности из работы [35], с одной стороны, содержит в себе классическую теорему единственности Р. Неванлинны [5] (гл. III, п. 38), а с другой—качественно отличается от нее тем, что ее условия предполагают «превалирование» в некотором интегральном смысле скорости убывания функции вблизи границы G_{+} над скоростью ее возрастания.

Теорема 3.8. *Пусть $f(z)$ аналитична в G_{+} и существует последовательность $R_k \uparrow \infty$ такая, что при любом $k \geqslant 1$*

$$\int\limits_{0}^{\pi} \log^{+} |f(R_k e^{i\theta})| \sin\theta \, d\theta < +\infty \tag{3.28}$$

и

$$\lim_{y\to 0} \int\limits_{-R_k}^{R_k} \log^{+} |f(x+iy)| \, dx < +\infty. \tag{3.29}$$

Если выполняется условие

$$\lim_{R\to+\infty} \left\{ \frac{1}{R} \int\limits_{0}^{\pi} \log |f(Re^{i\theta})| \sin\theta \, d\theta + \right.$$

$$+\varliminf_{y\to+0}\int_{-R}^{R} g(R;\ x)\log|f(x+iy)|\,dx\Big\} = -\infty, \tag{3.30}$$

где

$$g(R;\ x) \equiv \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{R^2}\right), \text{ при } 1\leqslant|x|\leqslant R, \\ \dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{R^2}\right), \text{ при } |x|\leqslant 1, \end{cases} \tag{3.31}$$

то будем иметь

$$f(z)\equiv 0,\ z\in G_{+}. \tag{3.32}$$

Нижеприводимая теорема типа Фрагмена-Линделёфа из работы [35] содержит в себе известную теорему типа Фрагмена-Линделёфа, принадлежащую Л. Альфорсу и М. Хейнсу [37], [38] (см. также [39], стр. 115).

Теорема 3.9. *Пусть функция $f(z)\not\equiv 0$ аналитична в G_{+} и такова, что при любом R $(0<R<+\infty)$*

$$\varliminf_{y\to+0}\int_{-R}^{R}\log^{+}|f(x+iy)|\,dx = 0. \tag{3.33}$$

1. *Тогда, если $M(R)=\sup\limits_{0<\theta<\pi}|f(Re^{i\theta})|$, то существуют и равны пределы*

$$\beta = \lim_{R\to+\infty} R^{-1}\log M(R) = \lim_{R\to+\infty} R^{-1}\log^{+} M(R) =$$

$$=\frac{2}{\pi}\lim_{R\to+\infty}\frac{1}{R}\int_0^{\pi}\log^{+}|f(Re^{i\theta})|\sin\theta\,d\theta\in[0,+\infty]. \tag{3.34}$$

При этом, если

$$\alpha = \sup_{y>0} y^{-1}\log|f(x+iy)|, \tag{3.35}$$

то

$$\beta = \alpha^{+} = \sup_{y>0} y^{-1}\log^{+}|f(x+iy)|. \tag{3.36}$$

2. *В случае, когда $\beta=\alpha^{+}<+\infty$, имеем*

$$\alpha = \frac{2}{\pi}\lim_{R\to+\infty}\frac{1}{R}\int_0^{\pi}\log|f(Re^{i\theta})|\sin\theta\,d\theta, \tag{3.37}$$

и для всех $\theta\in(0,\pi)$, лежащих вне некоторого множества нулевой внешней логарифмической емкости, также соотношения

$$\alpha\sin\theta = \lim_{R\to+\infty} R^{-1}\log|f(Re^{i\theta})|,$$

$$\alpha^{+}\sin\theta = \lim_{R\to+\infty} R^{-1}\log^{+}|f(Re^{i\theta})|. \tag{3.38}$$

Несколько слов о методе получения результатов этого пункта. В их основу изначально кладется установление теоремы о полном описании аналитических в G_+ функций ограниченного вида в полукруге $G_+(R) = \{z \in G_+, |z| < R\}$. Затем производится поэтапное исчерпание полукруга сегментами вида $G_+(R, \rho) = \{z \in G_+(R), \operatorname{Im} z > \rho\}$ (при $\rho \to +0$), и в конце—исчерпание полуплоскости полукругами при $R \to +\infty$.

Следует отметить, что все результаты работы [35], изложенные в этом пункте, после замены

гармонических в G_+ функций. Причем метод их доказательств остается в силе. В частном случае, когда $u(z) = |F(z)|^p$, в теореме 3.1 содержится эквивалентное определение для шкалы модельных весов, весовых классов H^p в полуплоскости.

§ 4. Приложения и смежные результаты

Введенные нами классы функций, их интегральные и факторизационные представления получили существенные приложения в решении разного рода задач комплексного анализа.

В данном заключительном параграфе нашего обзора мы приведем лишь часть такого рода результатов.

4.1. (а) Начнем с теорем единственности ([3], [4]). Пусть $f(z) \in H^p(\alpha)$ $(-1 < \alpha < +\infty,\ 0 < p < +\infty)$ и $\{a_k\}$ означает последовательность ее нулей, расположенных в круге D и нумерованных в порядке возрастания их модулей, притом каждый нуль берется соответственно его кратности.

Пусть, далее, $n(t)$ означает число чисел $\{z_k\}$, лежащих в круге $|z| < t$ $(0 < t < 1)$ и

$$N(r) \equiv \int_0^r \frac{n(t)}{t}\, dt.$$

Тогда справедлива

Теорема 4.1. *Пусть $f(z) \in H^p(\alpha)$. Тогда*

1. *Если $f(z) \not\equiv 0$, $z \in D$, то*

$$\int_0^1 (1-r)^\alpha \cdot \exp\{p\, N(r)\}\, dr < +\infty. \tag{4.1}$$

2. *Если же*

$$\int_0^1 (1-r)^\alpha \cdot \exp\{pN(r)\}\, dr = +\infty, \tag{4.2}$$

то $f(z) \equiv 0$.

Из теоремы 4.1 (2) вытекает следующая

Теорема 4.2. *Если $f(z) \in H^p(\alpha)$ и числовая функция $n(r)$ ее нулей удовлетворяет условию*

$$\liminf_{r \to 1-0} (1-r)\, n(r) = \liminf_{n \to +\infty} (1-|a_n|)\, n > \frac{1+\alpha}{p} \tag{4.3}$$

или же условию

$$\limsup_{r\to 1-0} \frac{(1-r)\,n(r)}{\log\dfrac{1}{1-r}} = \limsup_{n\to\infty} \frac{(1-|\alpha_n|)\,n}{\log\dfrac{1}{1-|\alpha_n|}} > e\,\frac{1+\alpha}{p}, \tag{4.4}$$

то $f(z)\equiv 0$.

По поводу дальнейших усилений теоремы 4.2 см Ч. Горовиц [40] и А. М. Седлецкий [41].

(б) Если нули $\{\alpha_n\}$ имеют особое расположение, то для определенных классов аналитических в круге D функций свойство единственности сохраняется и при меньшей плотности последовательности $\{\alpha_n\}$.

Полагая, что последовательность $\{\alpha_n\}$ удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} &1)\ \lim_{n\to+\infty} \alpha_n = e^{i\theta_0}\ (0\leqslant\theta_0<2\pi),\\ &2)\ |\arg(\alpha_n e^{-i\theta_0}-1)| \geqslant \frac{\pi}{2}+\delta\ (\delta>0), \end{aligned} \tag{4.5}$$

установлена

Теорема 4.3. *Пусть для аналитической в круге D функции $f(z)$ в окрестности точки $z_0=e^{i\theta_0}$ имеет место оценка вида*

$$|f(z)| < \frac{M}{(1-|z|)^p}, \tag{4.6}$$

где $M>0$ и $p>0$—произвольные постоянные.

Если $\{\alpha_n\}$—нули функции $f(z)$ подчинены условиям (4.5) и, кроме того

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1-|\alpha_n|) = +\infty, \tag{4.7}$$

то $f(z)\equiv 0$.

(в) Существенно опираясь на аппарат интегральных представлений для надлежащих классов, в работах Ф. А. Шамояна ([13], [42]) было дано полное решение некоторых тонких задач многомерного комплексного анализа. Для их формулировки необходимо ввести некоторые обозначения и определения. Пусть, как и в п. 1.3, $H^p_n(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ $(1<p<\infty,\ -1<\alpha_j<<\infty,\ 1\leqslant j\leqslant n)$ — множество голоморфных в n-мерном полидиске D^n функций $f(z)\equiv f(z_1,\cdots,z_n)$, для которых конечна величина интеграла (1.13).

Рассмотрим, далее, n-мерный тор

$$T_n = \{z=(z_1,\cdots,z_n): |z_j|=1,\ 1\leqslant j\leqslant n\} \tag{4.8}$$

и обозначим через $H^p(D^n)$ $(0<p<\infty)$ класс голоморфных в D^n функций $f(z)$, для которых

$$\sup_{0<r<1} \int_{T_n} |f(r\zeta)|^p\, d\mu_n(\zeta) < +\infty, \tag{4.9}$$

где $d\mu_n(\zeta)$—n-мерная мера Лебега на T_n.

Отметим, что класс $H^p(\mathbf{D}^n)$—естественный аналог класса Харди для значений $n\geqslant 2$. Полагая, наконец, что $f\in H^p(\mathbf{D}^n)$ $(0<p<+\infty)$, можно определить функцию

$$\mathbf{D}f(z)\overset{\text{def}}{\equiv}f(z,\cdots,z),\ z\in\mathbf{D},\tag{4.10}$$

и поставить две задачи.

1. *Дать полную характеристику тех голоморфных в* $\mathbf{D}$ *функций* $F(z)$, *которые допускают представление вида*

$$F(z)=\mathbf{D}f(z),\ f\in H^p(\mathbf{D}^n).\tag{4.11}$$

Решение этой задачи дается следующей теоремой.

Теорема 4.4. *Функция* $F(z)$, $z\in\mathbf{D}$, *допускает представление вида* (4.11) *только в том случае, когда*

$$F(z)\in H^p(n-2)\ (n\geqslant 2,\ 0<p<+\infty).\tag{4.12}$$

2. *Дать решение задачи, родственной задаче 1, для многомерных пространств.*

Здесь имеет место

Теорема 4.5. *Функция* $F(z)$ *допускает представление вида*

$$F(z)=\mathbf{D}f(z),\ f\in H_n^p(\alpha_1,\cdots,\alpha_n),\ 0<p<+\infty$$
$$-1<\alpha_j<+\infty\ (1<j<n)\tag{4.13}$$

только в том случае, когда

$$F(z)\in H^p(|\alpha|+2n-2),\ \ |\alpha|=\sum_{j=1}^{n}|\alpha_j|.\tag{4.14}$$

3. Третья задача несколько иного рода—она относится к вопросу конструктивного решения проблемы короны.

Пусть $\omega(t)$, $t\in[0,1]$—функция типа модуля непрерывности, и пусть Δ_ω —класс голоморфных в $\mathbf{D}$ функций $f(z)$, для которых

$$\sup_{\zeta_1,\zeta_2\in\mathbf{D}}\{|f(\zeta_1)-f(\zeta_2)|\cdot\omega^{-1}(|\zeta_1-\zeta_2|)\}<+\infty.\tag{4.15}$$

Как известно из теории нормированных колец, для любой совокупности функций $\{f_j(z)\}_1^n\subset\Delta_\omega$ $(n\geqslant 1)$, подчиненных условию

$$\sum_{j=1}^{n}|f_j(z)|\geqslant\delta>0,\ z\in\mathbf{D},\tag{4.16}$$

существует совокупность функций $\{g_j(z)\}_1^n\subset\Delta_\omega$, такая, что

$$\sum_{j=1}^{n}f_j(z)\cdot g_j(z)\equiv 1,\ z\in\mathbf{D}.\tag{4.17}$$

Опираясь на теорему 1.1 об интегральном представлении классов $H^p(\alpha)$, в работе [13] была дана явная конструкция искомых функций $\{g_j(z)\}_1^n\subset\Delta_\omega$ посредством заданной совокупности функций $\{f_j\}_1^n\subset\Delta_\omega$.

Такого рода явное решение проблемы короны было достигнуто впервые, благодаря, как уже отмечалось вначале, привлечению аппарата интегрального представления классов $H^p(\alpha)$, данного в работах [2]—[3].

4.2. В работах А. Э. Джрбашяна ([43], [44], [45]) рассматривались классы A^p_α гармонических функций в единичном шаре и в полупространстве, но в многомерном эвклидовом пространстве $\mathbf{R}^n (n \geqslant 3)$.

(а) Пусть $x = (x_1, \cdots, x_n)$ $(-\infty < x_j < +\infty,\ 1 \leqslant j \leqslant n)$ — точка n-мерного эвклидова пространства $\mathbf{R}^n$ $(n \geqslant 3)$. Единичным шаром $\mathbf{B}^n$ этого пространства принято называть множество тех точек $x \in \mathbf{R}^n$, для которых

$$|x| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2} < 1. \tag{4.18}$$

Обозначим, далее, через A^p_α $(0 < p < \infty,\ -1 < \alpha < \infty)$ класс гармонических функций $f(x) = f(x_1, \cdots, x_n)$, которые определены в шаре $\mathbf{B}^n$ и для которых

$$\int_{\mathbf{B}^n} (1 - |x|^2)^\alpha \cdot |f(x)|^p \, dx < +\infty. \tag{4.19}$$

Теорема 4.6. [43]. *Если $f(x) \in A^p_\alpha$ $(1 \leqslant p < \infty,\ -1 < \alpha < \infty)$ то справедливо интегральное представление*

$$f(x) = \int_{\mathbf{B}^n} (1 - |y|^2)^\alpha \cdot Q_\alpha(x, y) f(y) \, dy. \tag{4.20}$$

Здесь

$$Q_\alpha(x, y) = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1 + n/2 + \alpha + k)}{\Gamma(1 + \alpha)\, \Gamma(n/2 + k)} (|x| \cdot |y|)^k \cdot Z^{(k)}_{x'}(y'), \tag{4.21}$$

где $x' = x/|x|$, $y' = y/|y|$, *а* $Z^{(k)}_{x'}(y')$ — *зональная гармоника порядка* $k \geqslant 0$ (см., напр., [46]).

Отметим, что ядро $Q_\alpha(x, y)$ допускает эффективную оценку, аналогично оценкам представляющих ядер для функций, аналитических в круге или в шаре. На основе такого рода оценок устанавливается ограниченность проектора из весовых пространств L^p в A^p_α, а также оценивается порядок роста дробных производных и интегралов гармонических функций в шаре ([43], [44]).

(б) Пусть $\mathbf{R}^{n+1}_+$ — верхнее полупространство в $\mathbf{R}^{n+1}$ $(n \geqslant 2)$. Условимся отнести к классу $A^p_\alpha(\mathbf{R}^{n+1}_+)$ $(0 < p < \infty,\ -1 < \alpha < \infty)$ множество гармонических функций $f(x)$, которые определены в $\mathbf{R}^{n+1}_+$ и удовлетворяют условию

$$\int_{\mathbf{R}^{n+1}_+} |f(x', x_{n+1})|^p \cdot x^\alpha_{n+1} \, dx' \, dx_{n+1} < +\infty, \tag{4.22}$$

где $(x', x_{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1}_+$, $x' \in \mathbf{R}^n$, $x_{n+1} > 0$.

Теорема 4.7. ([45]) *Пусть $f(x) \in A^p_\alpha$ $(0 < p < \infty,\ -1 < \alpha < \infty$ и m — целое число такое, что*

$$m > \frac{1+\alpha}{p} - (n+1)\,(0 < p \leq 1),\ m > \frac{1+\alpha}{p} - 1\ (1 < p < \infty). \tag{4.23}$$

Тогда справедлива интегральная формула

$$f(x) = \int\limits_{R_+^{n+1}} f(y', y_{n+1}) \cdot Q^{(m)}(x, y) \cdot y_{n+1}^{m+1}\, dy'\, dy_{n+1}, \tag{4.24}$$

где

$$Q^{(m)}(x, y) = \frac{(-2)^{m+1}}{m!} \frac{\partial^{m+1}}{\partial x_{n+1}^{m+1}} P(x' - y', x_{n+1} + y_{n+1}),$$

а $P(\omega', \omega_{n+1})$*—ядро Пуассона в* R_+^{n+1}.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 20.VI.1986 и 12.VI.1988

Մ. Մ. ՋՐԲԱՇՅԱՆ. Համառոտ ակնարկ Հայաստանի մաթեմատիկոսների կողմից շրջանում մերոմորֆ ֆունկցիաների ֆակտորիզացիայի տեսության կառուցման և նրա կիրառությունների բնագավառում ձեռք բերված արդյունքների մասին *(ամփոփում)*

Հոդվածը պարունակում է 1945 թվականին հեղինակի կողմից հրապարակված մի աշխատության և այնուհետև մինչև օրս այդ հիմքի վրա տարված հետազոտությունների արդյունքների թռուցիկ ակնարկը։

M. M. DJRBASJAN. *A brief survey of the obtained results of Armenian mathematicians in the field of construction and applications of factorization theory of meromorphic functions in the disk* (summary)

The paper contains the brief survey of results of work of the author published in 1945 as well as of the investigations accomplished on the base of this work until now.

ЛИТЕРАТУРА

1. *M M. Dzrbasjan.* Survey of some achivements of Armenian mathematicians in the theory of integral representations and factorization of analytic functions; Математички Весник (Югославия), t. 39, 1987, 263—282.
2. *М. М. Джрбашян.* О каноническом представлении мероморфных в единичном круге функций. ДАН АрмССР, 3, № 1, 1945, 3—9.
3. *М. М. Джрбашян.* О представимости некоторых классов голоморфных функций в единичном круге. ДАН Арм.ССР, 6, № 5, 1947, 129—134.
4. *М. М. Джрбашян.* К проблеме представимости аналитических функций, Сообщ. Ин-та матем. и мех. АН АрмССР, 2, 1948, 3—40.
5. *Р. Неванлинна.* Однозначные аналитические функции, М., Гостехиздат, 1941.
6. *И. И. Привалов.* Граничные свойства однозначных аналитических функций, М., Изд-во МГУ, 1941.
7. *M. M. Dzrbasjan.* Theory of factorization and boundary properties of functions meromorphic in the disk, Proc. of the Int. Cong. of Math., Vancouver, vol. 2, 1974, 197—202.
8. *S. Bergman.* The kernel functions and conformal mapping; Amer. Math. Soc. Providence, 1970.

9. *W. Rudin.* Functions theory is the unit ball of C^n. Springer Verlag 1980. Русский перевод книги „Теория функций в единичном шаре из C^n“ М., Мир. 1984.

10. *F. Forelly, W. Rudin.* Projections on spaces of holomorphic functions in ball, Indiana Univ. Math. J., 24, 1974, 593—602.

11. *W. Wirtinger.* Monatshefte für Math. and Phys., vol. 39, 1932, 377—384.

12. *Дж. Уолш.* Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями, М., ИИЛ, 1961.

13. *Ф. А. Шамоян.* Приложения интегральных представлений Джрбашяна к некоторым задачам анализа, ДАН СССР, 261, № 3, 1981, 557—561.

14. *P. Charpenter.* Formules explicition pour les solutions minimales de l'equation $\bar\partial u=f$ dans la boule et dans le polydisque de C^n; Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 30, 41, 1980, 1921—1954.

15. *Б. В. Шабат.* Введение в комплексный анализ, часть II, М., «Наука», 1976.

16. *М. М. Джрбашян, А. О. Карапетян.* Интегральные представления некоторых классов функций, аналитических в области Зигеля, Изв. АН АрмССР, сер. матем. 22, № 4, 1987, 399—405.

17. *М. М. Джрбашян, А. Э. Джрбашян.* Интегральное представление для некоторых классов аналитических функций в полуплоскости, ДАН СССР, 285, № 3, 1985, 547—550.

18. *M. Taibelson, G. Weiss.* Asterisque, v. 77, 1980, 67—112.

19. *F. Ricci. M. Taibelson.* Annali Scuola Norm Sup. Pusa. Serie IV, vol. 10, № 1, 1983, 1—54.

20. *С. Г. Гиндикин.* Анализ в однородных областях, УМН, 19, № 4, 1964, 3—92.

21. *M. Tsuji.* Canonical product for a meromorphic function in a unit circle, Journ. Math. Soc., Japan, 8, 1956.

22. *Ф. А. Шамоян.* Факторизационная теорема М. М. Джрбашяна и характеристика нулей аналитических в круге функций с мажорантой конечного роста, Изв. АН АрмССР, «Математика», 13, № 5—6, 1978, 405—421.

23. *Ф. А. Шамоян.* Параметрическое представление классов голоморфных в круге функций, допускающих рост вблизи его границы, Тезисы докладов, Ереван, 1986.

24. *Ф. А. Шамоян.* О нулях аналитических в круге функций, растущих вблизи границы, Изв. АН АрмССР, «Математика», 18, № 1, 1983, 15—27.

25. *Ф. А. Шамоян.* Теоремы деления и замкнутые идеалы в алгебрах аналитических функций с мажорантой конечного роста, Изв. АН АрмССР, «Математика», 15, № 4, 1980, 323—332.

26. *А. М. Джрбашян.* Функции типа Бляшке для полуплоскости, ДАН СССР, 246, № 6, 1979, 1295—1298.

27. *А. М. Джрбашян.* Факторизация некоторых общих классов мероморфных в полуплоскости функций, ДАН СССР, 257, № 1, 1981, 21—25.

28. *А. М. Джрбашян.* Функции типа Бляшке для полуплоскости, Изв. АН АрмССР, «Математика», 18, № 6, 1983, 409—440.

29. *А. М. Джрбашян.* Соотношения равновесия и факторизационные теоремы для мероморфных в полуплоскости функций, Изв. АН АрмССР, «Математика», 21, № 3, 1986, 213—279.

30. *А. М. Джрбашян.* Параметрические представления классов мероморфных функций с неограниченной характеристикой, Изв. АН АрмССР, «Математика», 22, № 5, 1987, 451—477.

31. *M. Tsuji.* On Borel directions of meromorphic functions of finite order, Tohoky Math., J, v. 2, № 2, 1950, 97—112.

32. *В. И. Крылов.* О функциях, регулярных в полуплоскости, Матем. сб. г., 6 (48), № 1, 1939, 95—138.

33. *Б. Я. Левин.* О функциях, голоморфных в полуплоскости, Труды Одесского державного ун-та, № 3, 1941, 5—14.

34. *А. М. Джрбашян, Г. В. Микаелян.* Построение и основные свойства одного семейства произведений типа Бляшке для полуплоскости, Изв. АН АрмССР, «Математика», 15, № 6, 1980, 462—474.

35. *А. М. Джрбашян.* Классы функций ограниченного вида в полуплоскости, теорема единственности и теорема типа Фрагмена-Линделёфа, Изв. АН АрмССР, «Математика», т. 23, № 4, 1988, 396—401.

36. *R. Nevanlinna.* Uber die Eigenschaften meromorpher Funktionen in einem Winkelraum, Acta Soc. Sci Fennicae, v. 50, 12, 1925, 3—15.

37. *M. Heins.* On the Phragmen—Lindelöf principle, Trans. Amer. Math. Soc., v. 60, 1946, 238—244.

38. *L. Ahlfors, M. Heins.* Questions of regularity connected with the Phragmen-Lindelöf principle, Ann. of Math., v. 50, № 2, 1949, 341—346.

39. *R. P. Boas.* Entire functions, New York, Acad. Press, 1954.

40. *Ch. Horowitz.* Zeros of functiosn in the Bergman spaces, Duke Math. J., 41, 1974 693—710.

41. *А. М. Седлецкий.* О нулях аналитических функций классов A_a^p. Актуальные вопросы теории функций, Из-во Ростовского ун-та, 1987, 24—29.

42. *Ф. А. Шамоян.* Теоремы вложения и характеристика следов в пространствах $H^p(U^n)$ $(0 < p < +\infty)$, Мат. сб., т. 107 (109), вып. 3, 1978.

43. *А. Э. Джрбашян.* Интегральные представления и непрерывные проекторы в некоторых пространствах гармонических функций, Мат. сб., т. 121(163), № 2(6), 1983, 259—271.

44. *А. Э. Джрбашян.* О порядке роста дробных интегралов и производных гармонических функций в многомерном шаре, Изв. АН АрмССР, «Математика», 20, № 5, 1985, 366—374.

45. *А. Э. Джрбашян.* Классы A_a^p гармонических функций в полупространствах и аналог теоремы М. Рисса, Изв. АН АрмССР, «Математика», 22, № 4, 1987, 386—398.

46. *И. Стейн, Г. Вейс.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах, М., «Мир», 1974.