УДК 517.51

Л. А. ШАГИНЯН

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ФУНКЦИЙ ВСЮДУ СУММИРУЕМЫМИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ РЯДАМИ

§ 1. Введение

Как известно, задача описания класса функций, представимых всюду сходящимися тригонометрическими рядами, поставленная Б. Римано [1], до сих пор не решена.

По-видимому эта задача становится более «доступной и интересной», если в ней вместо сходимости рассматривать метод суммирования Абеля. Так как для метода А нет единственности, поэтому можно ожидать, что класс тех функций, которые представляются всюду А суммируемыми тригонометрическими рядами, может быть максимально широким. т. е. совпасть с I-ым классом Бэра 2π -периодических функций.

В настоящей статье показывается, что при определенных перестановках тригонометрической системы такое ожидание оправдано, а также рассматриваются некоторые вопросы, примыкающие к этому результату.

Обозначим через $B(2\pi)$ класс тех 2π -периодических, не обязательно конечных функций, которые являются пределами последовательностей непрерывных функций на отрезке $[0, 2\pi]$.

Теорема 1. *Существует такая перестановка тригонометрической системы — $\{\cos n_k x, \sin n_k x\}_{k=1}^{\infty}$ ($\{n_k\}_{k=1}^{\infty} = \{n\}_{n=1}^{\infty}$) и ряд по этой системе*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos n_k x + b_k \sin n_k x, \quad (1)$$

что для любой функции $f \in B(2\pi)$ можно в ряде (1), заменив некоторые коэффициенты нулями, получить ряд, всюду суммируемый к $f(x)$ всеми методами $(C, \alpha > 0)$ и методом А.

В частности получают следующие утверждения, аналоги которых неверны для прямых (не переставленных) тригонометрических рядов.

Теорема 2. *Существует нетривиальный (слабо) переставленный тригонометрический ряд, суммируемый всюду к 0 всеми методами $(C, \alpha > 0)$.*

Теорема 3. *Существует (слабо) переставленный тригонометрический ряд, всюду суммируемый $k + \infty$ всеми методами $(C, \alpha > 0)$ и методом А.*

Относительно теоремы 2 отметим, что не существует нетривиального прямого тригонометрического ряда, всюду суммируемого к 0 каким-либо методом $(C, \alpha \geq 0)$ и вместе с тем, например, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \sin x$$

всюду А суммируется к 0 (см. [2], стр. 145).

Кроме того отметим, что вопрос о существовании нетривиального переставленного тригонометрического ряда всюду сходящегося к 0, сформулированный в работе [3] С. Б. Стечкина и П. Л. Ульянова, остается открытым.

Относительно же теоремы 3 отметим следующее. Известно, что прямые тригонометрические ряды не могут A суммироваться к $+\infty$ на метрически плотных множествах II-ой категории*, в частности, на интервалах (это непосредственно следует из известной теоремы Н. Н. Лузина и И. И. Привалова о единственности аналитических функций [4], стр. 319—320). Кроме того, П. Л. Ульяновым установлено (см. [5], стр. 26), что тригонометрические ряды (прямые) не могут сходиться к $\pm\infty$ (в зависимости от точки) на таких множествах.

Этот результат усиливается следующей теоремой.

Теорема 4. *Тригонометрические ряды (прямые) не могут $(C, 1)$ суммироваться к $\pm\infty$ (в зависимости от точки) на метрически плотных множествах II-ой категории, в частности, на интервалах.*

Заметим, что (несмотря на то, что метод A сильнее всех методов $(C, \alpha \geq 0)$) невозможность A суммируемости прямых тригонометрических рядов к $+\infty$ на множествах упомянутого вида а priori не содержит в себе как результат П. Л. Ульянова, так и результат теоремы 4, так как уже существование A средних, вообще говоря, предполагает определенную ограниченность роста коэффициентов ряда.

Фактически доказательства последних двух утверждений основываются на том, что если частичные суммы или $(C, 1)$ -средние тригонометрического ряда ограничены снизу (сверху) константой на каком-либо множестве положительной меры, то отсюда следует определенная ограниченность роста коэффициентов ряда, а именно

$$|a_k| + |b_k| \leq M k^q; \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

для некоторых M и q . Этот результат в случае ограниченности снизу частичных сумм доказан Дарсоу [6], где $1 < q < 2$, а в случае $(C, 1)$ средних — в лемме 2 настоящей статьи.

Здесь, естественно, возникает вопрос о порядке роста коэффициентов ряда (1). Они не ограничены в совокупности, но могут расти сколь угодно медленно за счет того, что ряд (1) строится из некоторых тригонометрических полиномов без общих носителей, между которыми при помощи перестановок помещается достаточно много тригонометрических функций с нулевыми коэффициентами. Поэтому представляется более интересным вопрос о порядке роста коэффициентов ряда (1) по отношению к прямому расположению тригонометрических функций в нем.

Теорема 5. *Никакая последовательность тригонометрических полиномов*

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^m a_k^{(n)} \cos kx + b_k^{(n)} \sin kx$$

* под этим выражением мы подразумеваем существование такого интервала (a, b) , что порция множества в этом интервале имеет II-ую категорию и вместе с тем в любом интервале $\alpha, \beta \subset (a, b)$, множество имеет порцию положительной меры.

не может сходиться к $\pm \infty$ (в зависимости от точки) на метрически плотных множествах II-ой категории, если

$$|a_k^{(n)}| + |b_k^{(n)}| \leq M k^q; \quad n, k \geq 1$$

для каких-либо M и q .

С л е д с т в и е 1. Тригонометрические ряды

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx \quad (2)$$

при любых перестановках не могут суммироваться к $\pm \infty$ (в зависимости от точки) на метрически плотных множествах II-ой категории никаким конечнострочным методом, в частности, методами $(C, \alpha \geq 0)$, а также методом A , если

$$|a_k| + |b_k| \leq M k^q; \quad k \geq 0$$

для каких-либо M и q .

Здесь отметим следующее. В работе [7] В. Я. Козлова построен универсальный тригонометрический ряд, некоторая подпоследовательность частичных сумм которого всюду сходится к $+\infty$ (см. также [8], стр. 873—875). Известно, что коэффициенты этого ряда не ограничены (см. [5], стр. 24). Из следствия 1 получается более точное утверждение, а именно: коэффициенты $\{a_k, b_k\}$ универсального ряда В. Я. Козлова удовлетворяют условию

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{|a_k| + |b_k|}{k^q} = +\infty$$

для любого q .

Отметим еще одно следствие теоремы 5.

С л е д с т в и е 2. Если тригонометрический ряд (2) при некоторой перестановке суммируется к $\pm \infty$ (в зависимости от точки) каким-либо конечнострочным методом или методом A на некотором метрически плотном множестве II-ой категории, то множества

$$\{x : \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} S_n(x) > -\infty\}, \quad \{x : \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} S_n(x) < +\infty\}$$

являются множествами нулевой меры и I-ой категории, т. е. частичные суммы ряда (2) обязаны колебаться от $-\infty$ до $+\infty$ на остаточном множестве полной меры.

В связи с теоремой 3 возникает вопрос, можно ли в ней взять $\alpha = 0$, т. е. существует ли переставленный тригонометрический ряд, сходящийся к $+\infty$ всюду.

Т е о р е м а 6. Для любого переставленного тригонометрического ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos p_k x + b_k \sin p_k x, \quad \text{где} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p_k} < +\infty, \quad (3)$$

если нижний предел частичных сумм больше $-\infty$ на каком-либо множестве II-ой категории, то коэффициенты ряда ограничены в совокупности.

Отсюда, в силу теоремы 5, сразу следует, что тригонометрические ряды вида (3) при любых перестановках не могут сходиться к $\pm\infty$ (в зависимости от точки) на метрически плотных множествах II-ой категории.

Отметим, что утверждение теоремы 6 без дополнительного условия (3), но для прямых тригонометрических рядов, фактически доказано в заметке [6].

Наконец, отметим, что теорему 5 без труда можно распространить на кратные тригонометрические ряды.

Следующее утверждение, которое содержится в одной теореме В. Я. Козлова [7] (см. также [8], стр. 873—875), составляет основу доказательства теоремы 1.

Теорема К. Пусть $E \subset [0, 2\pi]$ и $0 < |E| < 2\pi$ ($|E|$ — мера E). Тогда произвольную непрерывную функцию можно изменить на E таким образом, чтобы она стала ортогональной к любым n заданным тригонометрическим функциям ($\cos kx, \sin kx$).

§ 2. Доказательство теоремы 1

Сперва введем некоторые обозначения. Обозначим через $\{T\}'$ класс вполне регулярных методов суммирований с бесконечными матрицами t_{ij} , высота строк которых стремится к нулю.

Этот класс, по-видимому впервые рассмотренный Д. Е. Меньшовым, содержит в себе все методы суммирований Чезаро— $(C, \alpha > 0)$ (см. [9]).

Ввиду того, что метод (C, α) сильнее любого метода (C, β) , при $\alpha > \beta$ ([8], стр. 886), то теорему 1 достаточно доказать для всех методов $(C, 1/n)$ $n \geq 1$. Мы это сделаем для произвольной последовательности методов $\{T_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ из класса $\{T\}'$.

Итак, зафиксируем некоторую последовательность $\{T_\nu\}$, $T_\nu \in \{T\}'$, $\nu \geq 1$, и пусть $\{t_{ij}^{(\nu)}\}$ — матрица метода T_ν , $\nu \geq 1$, где i — индекс строк, а j — индексе столбцов матрицы. Для любого $\nu \geq 1$ будем иметь

Т. 1. $t_{ij}^{(\nu)} > 0$; $i, j \geq 1$ (условие Т. 1. используется лишь для представления функций, принимающих значения $\pm \infty$);

Т. 2. $\lim_{\nu \rightarrow \infty} t_{ij}^{(\nu)} = 0$, $\nu, j > 1$;

Т. 3. $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{\infty} t_{ij}^{(\nu)} = 1$, $\nu \geq 1$;

Т. 4. $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \sup_j \{t_{ij}^{(\nu)}\} = 0$, $\nu \geq 1$.

Далее, тригонометрическим полиномом будем называть любое выражение вида

$$P(x) = \sum_{k=1}^m a_k \cos n_k x + b_k \sin n_k x,$$

где $\{n_k\}_{k=1}^m$ — некоторое подмножество N , взятое в произвольном порядке (здесь и далее в статье N будет означать множество натуральных чисел вместе с 0).

Для произвольного полинома $P(x)$ условимся о следующих обозначениях:

$$\begin{aligned} \underline{\text{ind}} P &= \min_{1 \leq k < m} \{n_k\}, \quad \overline{\text{ind}} P = \max_{1 \leq k < m} \{n_k\}, \\ p &= \overline{\text{ind}} P - \underline{\text{ind}} P + 1, \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} J &= J(P) = N \cap [\underline{\text{ind}} P, \overline{\text{ind}} P], \\ M &= M(P) = \max_{1 \leq l < m} \{ \max_{x \in [0, 2\pi]} |S_l(x)| \} + 1, \end{aligned} \tag{5}$$

где $S_l(x)$ — есть l -ая частичная сумма полинома $P(x)$, т. е.

$$S_l(x) = \sum_{k=1}^l a_k \cos n_k x + b_k \sin n_k x.$$

Теперь зафиксируем какую-либо последовательность положительных чисел $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$, стремящуюся к нулю, и пусть $\{R_l(x)\}_{l=1}^{\infty}$ — последовательность всевозможных тригонометрических полиномов с рациональными коэффициентами.

Кроме того, зафиксируем последовательность непересекающихся интервалов $\{\alpha_l\}_{l=1}^{\infty}$ из отрезка $[0, 2\pi]$, которые сгущаются, например, к точке 2π , и пусть β_l есть концентричный с α_l интервал, равный его половине, а $\gamma_l = [0, 2\pi] - \alpha_l$ ($l \geq 1$).

Перейдем к построению ряда (1). Положим $Q_1(x) \equiv R(x)$, и если полиномы $Q_l(x)$ с рациональными коэффициентами уже определены для $l = 1, 2, \dots, k-1$, то $Q_k(x)$ строится таким образом: согласно теореме К полином $R_k(x)$ меняем на β_k так, чтобы полученная функция $\varphi_k(x)$ была ортогональна всем слагаемым полинома $\sum_{l=1}^{k-1} Q_l(x)$ и затем, поскольку $\varphi_k(x)$ есть тригонометрический полином на дополнении β_k , берем такую частичную сумму $S_l(x)$ ряда Фурье функции $\varphi_k(x)$, чтобы

$$|S_l(x) - R_k(x)| < \frac{\varepsilon_k}{2}, \quad x \in \gamma_k, \quad \underline{\text{ind}} S_l > \overline{\text{ind}} \sum_{l=1}^{k-1} Q_l(x).$$

Теперь отличные от нуля коэффициенты полинома $S_l(x)$ заменяем такими рациональными числами, чтобы вновь полученный полином $\tilde{Q}_k(x)$ удовлетворял условию

$$|\tilde{Q}_k(x) - R_k(x)| < \frac{\varepsilon_k}{2}, \quad x \in \gamma_k \quad \text{и} \quad \underline{\text{ind}} \tilde{Q}_k > \overline{\text{ind}} \sum_{l=1}^{k-1} Q_l = q_{k-1}.$$

Для полинома $\tilde{Q}_k(x)$ определим числа p_k и M_k , согласно (4), (5) и исходя из Т. 3 и Т. 4 найдем такое натуральное n_k , чтобы

$$\begin{aligned} (M_k^{\circ} = \sum_{r=1}^k M_r) \\ M_k^{\circ} \sum_{l=q_{k-1}+n_k+1}^{q_{k-1}+n_k+p_k} t_{il}^{(v)} \leq \frac{1}{2^k}; \quad v = 1, 2, \dots, k; \quad i = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Затем перед полиномом $\bar{Q}_k(x)$ в качестве слагаемых помещаем n_k функций вида $A_j(x) = 0 \cdot \cos jx + 0 \cdot \sin jx$ с минимальными индексами $j > q_{k-1}$ и $j \in J(\bar{Q}_k)$.

Таким образом полученный полином обозначим через $Q_k(x)$. Продолжая этот процесс, получим последовательность полиномов $\{Q_l(x)\}$ с рациональными коэффициентами вида

$$Q_k(x) = \sum_{j=q_{k-1}+p_k+1}^{q_{k-1}+p_k+n_k} (0 \cdot \cos jx + 0 \cdot \sin jx) + \sum_{j=q_{k-1}+1}^{q_{k-1}+p_k} (a_j^{(k)} \cos jx + b_j^{(k)} \sin jx) = \sum_{j=q_{k-1}+1}^{q_k} B_j(x),$$

где $q_k = \overline{\text{ind}} \sum_{j=1}^k Q_j = \sum_{j=1}^k (n_j + p_j)$, ($n_1 = 0$).

Причем

$$B_j(x) \equiv 0, \text{ при } q_{k-1} + 1 \leq j \leq q_{k-1} + n_k \quad (6)$$

и если

$$M_k = \max_{1 \leq l \leq p_k} \left\{ \max_{x \in [0, 2\pi]} \sum_{j=1}^l |B_{q_{k-1}+n_k+j}(x)| \right\} + 1,$$

то

$$M_k^* \sum_{j=q_{k-1}+n_k+1}^{q_k} t_{ij}^{(v)} \leq \frac{1}{2^k}; \quad v = 1, 2, \dots, k; \quad i \geq 1. \quad (7)$$

Из построения полиномов $Q_k(x)$ ясно, что каждая тригонометрическая функция $\cos jx$, $\sin jx$ с некоторым рациональным коэффициентом входит в какой-либо полном $Q_k(x)$ и

$$|Q_k(x) - R_k(x)| < \varepsilon_k, \quad x \in \gamma_k, \quad k \geq 1. \quad (8)$$

Составим ряд

$$\sum_{l=1}^{\infty} Q_l(x). \quad (9)$$

Из построения полиномов очевидно, что после раскрытия внутренних сумм в ряде (9) получится некоторый слабо переставленный тригонометрический ряд (1). Убедимся, что он удовлетворяет утверждению теоремы 1.

Возьмем произвольную функцию $f(x) \in B(2\pi)$. Тогда, в силу теоремы Вейерштрасса о равномерной аппроксимации непрерывных 2π -периодических функций тригонометрическими полиномами, легко убедиться, что

$$f(x) = \sum_{l=1}^{\infty} R_{k_l}(x), \quad x \in [0, 2\pi], \quad (k_1 < k_2 < \dots).$$

Теперь выберем некоторую подпоследовательность $\{Q_{m_l}(x)\}_{l=1}^{\infty}$. Положим $Q_{m_l}(x) \equiv R_{k_l}(x)$ и если полиномы $Q_{m_l}(x)$ уже выбраны для $m_1 < m_2 < \dots < m_{n-1}$, то $Q_{m_n}(x)$ выберем следующим образом: рассмотрим тригонометрический полином с рациональными коэффициентами

$$\sum_{l=1}^n R_{k_l}(x) - \sum_{l=1}^{n-1} Q_{m_l}(x)$$

и поменяем коэффициенты этого полинома так, чтобы получить полином $R_p(x)$, удовлетворяющий условиям

$$p > m_{n-1} \text{ и } \left| R_p(x) - \sum_{l=1}^n R_{k_l}(x) + \sum_{l=1}^{n-1} Q_{m_l}(x) \right| < \varepsilon_n, \quad x \in [0, 2\pi].$$

Положим

$$Q_{m_n}(x) \equiv Q_p(x), \quad (m_n = p).$$

Из (8) следует

$$\left| \sum_{l=1}^n R_{k_l}(x) - \sum_{l=1}^n Q_{m_l}(x) \right| < 2\varepsilon_n, \quad x \in \gamma_{m_n} = [0, 2\pi] - z_{m_n}.$$

Таким образом получаем последовательность $\{Q_{m_l}(x)\}$, $m_1 < m_2 < \dots$, причем

$$\sum_{l=1}^{\infty} Q_{m_l}(x) = f(x), \quad x \in [0, 2\pi], \quad (10)$$

так как каждая точка $x \in [0, 2\pi]$ принадлежит всем γ_k , по крайней мере начиная с некоторого $k \geq k_0$.

Теперь рассмотрим ряд (9) с раскрытыми внутренними суммами. Он будет иметь вид

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=q_{k-1}+1}^{q_k} B_j(x) \quad (q_0 = n, \quad q_1 = 0).$$

В нем коэффициенты всех тех слагаемых, которые не входят в полиномы $Q_{m_i}(x)$, $i > 1$, заменим нулями, не трогая остальных.

Получится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=q_{k-1}+1}^{q_k} B_j^*(x), \quad (11)$$

где (в силу (6))

$$B_j^*(x) \equiv 0, \quad q_{k-1} + 1 \leq j \leq q_k, \quad k \in \{m_i\}_{i=1}^{\infty} \quad (12)$$

и

$$B_j^*(x) \equiv B_j(x), \quad q_{k-1} + 1 \leq j \leq q_k, \quad k \in \{m_i\}_{i=1}^{\infty}. \quad (13)$$

При этом, если $S_j(x)$ — j -ая частичная сумма ряда (11), то

$$S_j(x) \equiv 0, \quad j = 1, 2, \dots, q_{m_{i-1}} + n_{m_i}, \quad (14)$$

$$|S_j(x)| \leq M_{m_i}, \quad x \in [0, 2\pi], \quad q_{m_{i-1}} + n_{m_i} + 1 \leq j \leq q_{m_i},$$

$$S_j(x) \equiv \sum_{r=1}^k Q_{m_r}(x), \quad x \in [0, 2\pi], \quad q_{m_k} < j \leq q_{m_{k+1}} + n_{m_{k+1}}, \quad (15)$$

$$|S_j(x)| \leq M_{m_k}^*, x \in [0, 2\pi], q_{m_{k+1}-1} + n_{m_{k+1}} + 1 \leq j \leq q_{m_{k+1}} \quad (16)$$

для любого $k \geq 1$, согласно (6), (7), (12) и (13).

Таким образом, в частности имеем, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_{q_{m_k}}(x) = f(x), x \in [0, 2\pi]. \quad (17)$$

Теперь убедимся, что ряд (9) с раскрытыми внутренними суммами на $[0, 2\pi]$ суммируется к $f(x)$ каждым из методов T_{ν} . Обозначив i -ую T_{ν} -среднюю ряда через $\alpha_i^{(\nu)}(x)$ и учитывая (14), (15), будем иметь

$$\begin{aligned} \alpha_i^{(\nu)}(x) &= \sum_{j=1}^{\infty} t_{ij}^{(\nu)} S_j(x) = \sum_{j=q_{m_1-1}+n_{m_1}+1}^{q_{m_1}} t_{ij}^{(\nu)} S_j(x) + \\ &+ S_{q_{m_1}}(x) \sum_{j=q_{m_1}+1}^{q_{m_2}-1+n_{m_2}} t_{ij}^{(\nu)} + \sum_{j=q_{m_2-1}+n_{m_2}+1}^{q_{m_2}} t_{ij}^{(\nu)} S_j(x) + S_{q_{m_2}} \sum_{j=q_{m_2}+1}^{q_{m_3}-1+n_{m_3}} t_{ij}^{(\nu)} + \\ &+ \dots + \sum_{j=q_{m_{k-1}}+n_{m_{k-1}}+1}^{q_{m_k}} t_{ij}^{(\nu)} S_j(x) + S_{q_{m_k}}(x) \sum_{j=q_{m_k}+1}^{q_{m_{k+1}}-1+n_{m_{k+1}}} t_{ij}^{(\nu)} + \\ &+ \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=q_{m_{k-1}}+n_{m_{k-1}}+1}^{q_{m_k}} S_j(x) t_{ij}^{(\nu)} + \sum_{k=1}^{\infty} S_{q_{m_k}}(x) \sum_{j=q_{m_k}+1}^{q_{m_{k+1}}+n_{m_{k+1}}} t_{ij}^{(\nu)} = \\ &= \mu_i(\nu, x) + r_i(\nu, x). \end{aligned}$$

Теперь убедимся, что

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \mu_l(\nu, x) = 0, x \in [0, 2\pi], \nu \geq 1, \quad (*)$$

$$\lim_{l \rightarrow \infty} r_l(\nu, x) = f(x), x \in [0, 2\pi], \nu \geq 1. \quad (**)$$

Из (7) следует, что в любой точке $x \in [0, 2\pi]$ имеем

$$\begin{aligned} |\mu_l(\nu, x)| &\leq \sum_{k=1}^{\infty} M_{q_{m_k}}^* \sum_{j=q_{m_{k-1}}+n_{m_{k-1}}+1}^{q_{m_k}} t_{ij}^{(\nu)} = \\ &= \sum_{k=1}^l M_{q_{m_k}}^* \sum_{j=q_{m_{k-1}}+n_{m_{k-1}}+1}^{q_{m_k}} t_{ij}^{(\nu)} + \sum_{k=l+1}^{\infty} \frac{1}{2^k}, (l > \nu), \end{aligned}$$

где первое слагаемое стремится к 0 для любого l , при $l \rightarrow \infty$, а второе стремится к 0 при $l \rightarrow \infty$. Следовательно, (*) доказано.

Для доказательства (**), в силу (17), достаточно убедиться, что матрица $\{\alpha_{ik}^{(\nu)}\}$ является вполне регулярной для всех $\nu \geq 1$, где

$$\alpha_{ik}^{(\nu)} = \sum_{j=q_{m_k}+1}^{q_{m_k}+n_{m_k}} t_{ij}^{(\nu)} (i, k \geq 1).$$

Это следует из Т. 1—Т. 4, если учесть, что $M_{q_{m_k}}^* \geq 1$, $k \geq 1$ и поэтому

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=q_{m_k-1} + n_{m_k} + 1}^{q_{m_k}} t_{ij}^{(l)} = 0$$

для любого $\nu \geq 1$. Теорема 1 доказана для методов $(C, \alpha > 0)$. Чтобы распространить ее на метод А остается заметить, что за счет выбора слагаемых с нулевыми коэффициентами, т. е. за счет выбора p_k можно добиться того, чтобы

$$\frac{1}{j} \max_{x \in [0, 2\pi]} |B_j(x)| \rightarrow 0, \text{ при } j \rightarrow \infty$$

и следовательно из $(C, 1)$ суммируемости будет следовать А суммируемость ряда (11) в каждой точке $[0, 2\pi]$ (см., например, доказательство теоремы Фробениуса в [8], стр. 28).

§ 3. Доказательства теорем 4-6

В дальнейшем нам понадобится следующее утверждение, которое сформулируем в виде замечания (доказательство см., например, [8], стр. 696).

Замечание 1. Пусть E есть множество II-ой категории из отрезка $[a, b]$, и $R_n(x)$ — последовательность функций, непрерывных на $[a, b]$, причем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) > -\infty \quad (\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} R_n(x) < +\infty), \quad x \in E.$$

Тогда существует интервал $(\alpha, \beta) \subset (a, b)$ и такое число γ , что

$$R_n(x) \geq \gamma \quad (R_n(x) \leq \gamma), \quad x \in (\alpha, \beta), \quad n = 1, 2, \dots$$

Сперва мы докажем теорему 5, опираясь на следующую лемму.

Лемма 1. Пусть коэффициенты полиномов

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{m_n} a_k^{(n)} \cos kx + b_k^{(n)} \sin kx, \quad n \geq 1$$

удовлетворяют условию

$$|a_k^{(n)}| + |b_k^{(n)}| \leq Mk^q; \quad k = 1, 2, \dots, m_n; \quad n \geq 1 \quad (18)$$

для некоторых чисел M и q . Тогда, если

$$P_n(x) \geq 0, \quad x \in (\alpha, \beta), \quad n > 1, \quad (19)$$

то для любого $E \subset (\alpha, \beta)$, $|E| = \text{mes } E > 0$, существует такое число $C = C(E)$, не зависящее от n , что

$$\mu_n(E) = \inf_{x \in E} |P_n(x)| \leq C, \quad n \geq 1.$$

Доказательство. Пусть

$$h(x) = \begin{cases} e^{[(\alpha-x)(\beta-x)]^{-1}}, & x \in [\alpha, \beta], \\ 0, & x \notin [\alpha, \beta] \end{cases}$$

(не нарушая общности мы предполагаем, что $(\alpha, \beta) \subset (0, 2\pi)$).

Положим

$$a_k(h) = \int_0^{2\pi} h(x) \cos kx \, dx, \quad b_k(h) = \int_0^{2\pi} h(x) \sin kx \, dx, \quad k \geq 0.$$

Поскольку $h(x)$ бесконечно дифференцируема, то

$$a_k(h) = o(k^{-q-2}), \quad b_k(h) = o(k^{-q-2}) \quad (20)$$

для любого q ([8], стр. 88) и следовательно, в силу (18), (20)

$$\sum_{k=0}^{m_n} |a_k^{(n)}| |a_k(h)| + |b_k^{(n)}| |b_k(h)| \leq A, \quad n \geq 1,$$

где A — некоторая константа, не зависящая от n .

Теперь, учитывая (19), для любого множества $E \subset (\alpha, \beta)$, $|E| > 0$, будем иметь

$$\begin{aligned} \mu_n(E) \int_E h(x) \, dx &\leq \int_E h(x) P_n(x) \, dx \leq \int_\alpha^\beta h(x) P_n(x) \, dx = \\ &= \int_0^{2\pi} h(x) P_n(x) \, dx \leq A. \end{aligned}$$

Отсюда сразу следует утверждение леммы 1, так как

$$\int_E h(x) \, dx > \int_\alpha^{\alpha + \frac{1}{2}|E|} h(x) \, dx = C, \quad (|E|) > 0.$$

З а м е ч а н и е 2. Очевидно, что если условие (19) заменить условием

$$P_n(x) > \text{Const}, \quad x \in (\alpha, \beta), \quad n \geq 1,$$

то утверждение леммы останется в силе.

Доказательство теоремы 5. Предположим обратное, а именно: существуют последовательность полиномов $\{P_n(x)\}$, удовлетворяющая условию (18), а также такое метрически плотное множество E II-ой категории, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x) = \pm \infty, \quad x \in E, \quad (21)$$

в зависимости от точки $x \in E$. Тогда (см. подстрочное примечание на стр.) найдется такой отрезок $[a, b]$, что $E_1 = E \cap [a, b]$ есть множество II-ой категории и $|E_1 \cap (\alpha, \beta)| > 0$ для любого $(\alpha, \beta) \subset [a, b]$.

Положим

$$E_1^+ = \{x : P_n(x) \rightarrow +\infty\} \text{ и } E_1^- = \{x : P_n(x) \rightarrow -\infty\}.$$

Хотя бы одно из этих множеств, для определенности E_1^+ , есть множество II-ой категории, и следовательно, согласно замечанию 1, существуют интервал $(\alpha, \beta) \subset (a, b)$ и константа γ такие, что

$$P_n(x) > \gamma, \quad x \in (\alpha, \beta), \quad n \geq 1.$$

Вместе с тем, согласно (21)

$$|(\alpha, \beta) \cap \{ : P_n(x) \rightarrow +\infty \}| > 0.$$

Ясно, что последние соотношения, в силу теоремы Егорова, противоречат утверждению леммы 1. Теорема 5 доказана.

Доказательство теоремы 4 непосредственно получается из следствия 1, если учесть следующую лемму.

Лемма 2. Если $(C, 1)$ средние тригонометрического ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx \quad (22)$$

неотрицательны на некотором множестве E , $|E| > 0$, то

$$|a_k| + |b_k| \leq Mk^q, \quad k > 1 \quad (23)$$

для некоторых M и q .

Доказательство проводится в основном по схеме заметки [6]. Пусть x —произвольная точка плотности множества E , а β и γ —некоторые фиксированные числа, причем

$$\frac{1}{2}\pi < \beta < \gamma < \pi. \quad (24)$$

Ясно, что точка 0 будет точкой плотности множества

$$F = (x - E) \cap (-x + E)$$

и поэтому для достаточно больших n , скажем $n \geq n_0$, существуют такие $x_n \in F$, что

$$\beta < nx_n < \gamma, \quad n \geq n_0. \quad (25)$$

Обозначим k -ый член ряда (22) через $A_k(x)$, а частичные суммы и $(C, 1)$ средние, соответственно, через $\{S_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{\sigma_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$.

Поскольку $x + x_n \in E$, $x - x_n \in E$ при $n \geq n_0$, то используя преобразование Абеля, будем иметь ($n > n_0$)

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{1}{2} \{ \sigma_n(x+x_n) + \sigma_n(x-x_n) \} = \frac{1}{2(n+1)} \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^k \{ A_j(x+x_n) + A_j(x-x_n) \} = \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^k A_j(x) \cos jx_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n (n-k+1) A_k(x) \cos kx_n = \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^k (n-j+1) A_j(x) \Delta \cos kx_n + \sigma_n(x) \cos nx_n, \end{aligned}$$

где $\Delta \cos kx_n = \cos kx_n - \cos(k+1)x_n = 2 \sin\left(k + \frac{1}{2}\right) x_n \sin \frac{x_n}{2}$.

Вновь, дважды применяя преобразование Абеля, получаем

$$\begin{aligned} \sigma_n(x) &\leq \frac{2(-\cos nx_n)^{-1}}{n+1} \sin \frac{x_n}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \sin \left(k + \frac{1}{2}\right) x_n \left\{ (n-k+1) S_k(x) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=0}^{k-1} S_j(x) \right\} = \\ &= \frac{2(-\cos nx_n)^{-1}}{n+1} \sin \frac{x_n}{2} \sum_{k=0}^{n-2} (k+1) \sigma_k(x) \Delta \left\{ (n-k+1) \sin \left(k + \frac{1}{2}\right) x_n \right\} + \\ &\quad + \frac{2(-\cos nx_n)^{-1}}{n+1} 2n \sigma_{n-1}(x) \sin \left(n - \frac{1}{2}\right) x_n \sin \frac{x_n}{2}, \end{aligned}$$

причем

$$\begin{aligned} \left| \Delta \left\{ (n-k+1) \sin \left(k + \frac{1}{2}\right) x_n \right\} \right| &= \left| (n-k+1) \sin \left(k + \frac{1}{2}\right) x_n - \right. \\ &\quad \left. - (n-k) \sin \left(k + \frac{3}{2}\right) x_n \right| \leq \\ &\leq (n-k) \left| \sin \left(k + \frac{1}{2}\right) x_n - \sin \left(k + \frac{3}{2}\right) x_n \right| + \left| \sin \left(k + \frac{1}{2}\right) x_n \right| \leq \\ &\leq \frac{(n-k)\gamma}{n} + 1 < 2\pi \quad (\text{см. (24) и (25)}). \end{aligned}$$

Следовательно, учитывая, что $\sigma_n(x) \geq 0$, $n \geq 0$, а также соотношения (24) и (25), получаем

$$\begin{aligned} \sigma_n(x) &\leq \frac{\gamma(-\cos \gamma)^{-1}}{n(n+1)} \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} k \sigma_{k-1}(x) + 2\pi \sum_{k=0}^{n-2} (k+1) \sigma_k(x) + \right. \\ &\quad \left. + 2\pi n \sigma_{n-1}(x) \right\} < \frac{3\pi\gamma(-\cos \gamma)^{-1}}{n(n+1)} \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) \sigma_k(x). \end{aligned}$$

Теперь, так как γ может быть выбрано таким, что $\frac{\gamma}{-\cos \gamma} < 3 \left(\gamma = \frac{8}{9} \pi \right)$, будем иметь

$$\sigma_n(x) \leq \frac{9\pi}{n(n+1)} \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) \sigma_k(x)$$

для всех $n \geq n_0$.

Последовательно применив последнее неравенство, получаем

$$\begin{aligned} \sigma_n(x) &\leq \frac{9\pi}{n(n+1)} \left\{ \sum_{k=0}^{n-2} (k+1) \sigma_k(x) + n \sigma_{n-1}(x) \right\} \leq \\ &\leq \frac{9\pi}{n(n+1)} \left\{ \sum_{k=0}^{n-2} (k+1) \sigma_k(x) + \frac{9\pi}{n-1} \sum_{k=0}^{n-2} (k+1) \sigma_k(x) \right\} = \\ &= \frac{9\pi}{n(n+1)} \left(1 + \frac{9\pi}{n-1} \right) \sum_{k=0}^{n-2} (k+1) \sigma_k(x) \leq \\ &\leq \frac{9\pi}{n(n+1)} \left(1 + \frac{9\pi}{n-1} \right) \left(1 + \frac{9}{n-2} \right) \sum_{k=0}^{n-3} (k+1) \sigma_k(x) \leq \dots \leq \end{aligned}$$

$$\leq \frac{9\pi}{n(n+1)} \left(1 + \frac{9\pi}{n-1}\right) \left(1 + \frac{9\pi}{n-2}\right) \dots \\ \dots \left(1 + \frac{9\pi}{n-n_0+1}\right) \sum_{k=0}^{n_0} (k+1) \varpi_k(x).$$

Положим

$$C = \max_{x \in (0, 2\pi]} \sum_{k=0}^{n_0} (k+1) \varpi_k(x).$$

Имеем

$$\sigma_n(x) \leq \frac{9\pi C}{n(n+1)} e^{\ln\left(1 + \frac{9\pi}{n-1}\right) \left(1 + \frac{9\pi}{n-2}\right) \dots} \leq \\ \leq \frac{9\pi C}{n(n+1)} e^{9\pi\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right)} \leq \frac{9\pi C}{n(n+1)} e^{9\pi \ln n} = 9\pi C n^{9\pi-2}.$$

Таким образом, получаем

$$\sigma_n(x) \leq M_1 n^{q_1} (n \geq 0)$$

в каждой точке плотности E , т. е. почти в каждой ой точке E , где M_1 и q_1 не зависят от n . Следовательно, почти всюду не E будем иметь

$$|S_n(x)| \leq (n+1) \sigma_n(x) + n \sigma_{n-1}(x) \leq M_2 n^{q_2}$$

и поэтому коэффициенты ряда (22) удовлетворяют условию (23) для некоторых чисел M и q , что и требовалось доказать.

Доказательство теоремы б. Легко видеть, что в силу замечания I, достаточно доказать следующую лемму.

Лемма 3. Пусть

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos m_k x + b_k \sin m_k x = \sum_{k=1}^{\infty} A_k(x)$$

— некоторый переставленный тригонометрический ряд, причем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{m_k} < +\infty. \quad (26)$$

Тогда, если

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n a_k \cos m_k x + b_k \sin m_k x > 0, \quad x \in (a, b), \quad (n \geq 1), \quad (27)$$

то для любого $\varepsilon > 0$ найдется интервал $(\alpha, \beta) \subset (a, b)$ и такое число C , не зависящее от n , что

$$\beta - \alpha > b - a - \varepsilon$$

и

$$\int_{\alpha}^{\beta} S_n(x) dx \leq C, \quad n > 1.$$

Доказательство. Не нарушая общности можем предполагать, что $(a, b) \subset (0, 2\pi)$. Положим

$$\alpha_j^k = \frac{2\pi}{m_k} j; j = 1, 2, \dots, m_k; k > 1$$

и для заданного

$$0 < \varepsilon < \frac{1}{2}(b - a), \quad (28)$$

исходя из (26), зафиксируем такое n_0 , чтобы

$$2\pi \sum_{k=n_0}^{\infty} \frac{1}{m_k} < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (29)$$

Далее обозначим через α_0 наименьшее из чисел $\alpha_j^{n_0}$ ($j = 1, 2, \dots, m_{n_0}$), которое содержится в интервале (a, b) , а через α_1 — наименьшее из чисел $\alpha_j^{n_0+1}$ ($j = 1, 2, \dots, m_{n_0+1}$), которое содержится в интервале (α_0, b) . Продолжая этот процесс, получим последовательность

$$\alpha < \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_v < \alpha_{v+1} < \dots,$$

причем

$$0 < \alpha_0 - \alpha < \frac{2\pi}{m_{n_0}}, \quad 0 < \alpha_{v+1} - \alpha_v \leq \frac{2\pi}{m_{n_0+v}}, \quad v \geq 1.$$

Следовательно, существует $\alpha = \lim_{v \rightarrow \infty} \alpha_v$, причем

$$\alpha < a < b \text{ и } a - \alpha < \frac{\varepsilon}{2}, \quad (30)$$

согласно (28) и (29).

Аналогичным образом, отправляясь от правого конца отрезка $[0, 2\pi]$, находим также число β , что

$$\alpha < a < \beta < a, \quad \beta - \alpha < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (31)$$

Теперь для произвольного $n \geq 1$ оценим снизу интеграл

$$\int_0^a S_n(x) dx.$$

Положим

$$J_0 = \max_{1 < j < n_0} \left| \max_{x \in [0, 2\pi]} |S_j(x)| \right|.$$

Далее, заметив, что

$$\int_0^{\alpha_k} A_{n_0+k}(x) dx = 0, \quad k \geq 0,$$

из условия (27) получаем ($n = n_0 + v$)

$$\int_0^a S_n(x) dx > \int_0^{\alpha_{v+1}} S_{n_0+v}(x) dx = \int_0^{\alpha_{n+1}} S_{n_0-1}(x) dx +$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_0^{a_{k+1}} |S_{n_0+k}(x) - S_{n_0-1}(x)| dx \geq \\
 & \geq -2\pi J_0 + \sum_{k=n_0}^{n_0+v} \int_0^{a_{k+1}} A_k(x) dx = -2\pi J_0 + \\
 & + \int_{a_{n_0}}^{a_{n_0+1}} [S_{n_0}(x) - S_{n_0-1}(x)] dx + \\
 & + \int_{a_{n_0+1}}^{a_{n_0+2}} [S_{n_0+1}(x) - S_{n_0-1}(x)] dx + \dots + \int_{a_n}^{a_{n+1}} [S_n(x) - S_{n_0-1}(x)] dx \geq \\
 & \geq -2\pi J_0 - \sum_{k=n_0}^{n_0+v} \int_{a_k}^{a_{k+1}} S_{n_0-1}(x) dx \geq -4\pi J_0.
 \end{aligned}$$

Таким образом, для всех $n \geq 1$

$$\int_0^a S_n(x) dx \geq -4\pi J_0.$$

Аналогичным образом получаем, что

$$\int_b^{2\pi} S_n(x) dx \geq -4\pi J_0, \quad n \geq 1.$$

Из полученных неравенств сразу следует утверждение леммы, если учесть условие (27), соотношения (30), (31) и что

$$\int_0^{2\pi} S_n(x) dx = \text{Const}, \quad n \geq 1.$$

Армянский государственный педагогический институт им. Х. Абовяна

Поступила 14. V. 1986

Լ. Ա. ՇԱՀԻՆՅԱՆ. Ամենուրեք բաժանաչափական և հանկյունաչափական շարքերով ֆունկցիաների ներդաշխման մասին (ամփոփում)

Հոդվածում կառուցվում է մի այնպիսի թույլ տեղափոխված եռանկյունաչափական շարք, որ ինչպիսին էլ որ լինի 2π -պարբերական $f(x)$ ֆունկցիան f -ին դասից, կարելի է շարքի որոշ գործակիցներ դարձնել 0 այնպես, որ ստացված շարքը հանրագումարվի $f(x)$ -ին ամենուրեք ցանկացած $(C, \alpha > 0)$ և A զամարման եղանակներով:

Մասնավորաբար ստացվում է, որ գոյություն ունեն թույլ տեղափոխված այնպիսի եռանկյունաչափական շարքեր, որոնք ցանկացած $(C, \alpha > 0)$ և A մեթոդներով հանրագումարվում են θ -ի $(+\infty$ -ի) ամենուրեք:

Ուսումնասիրվում է կառուցված շարքի գործակիցների աճման կարգը և ապացուցվում է, որ ուղիղ եռանկյունաչափական շարքերը չեն կարող $(C, 1)$ եղանակով հանրագումարվել $+\infty$ -ի որևէ հատվածի վրա:

L. A. SHAHINIAN. *Representations of functions by the everywhere summable trigonometric series* (summary)

Weakly permutable trigonometric series are constructed such, that for every 2π -periodic function $f(x)$ from the first class of Be., it is possible to replace by 0 some of the coefficients in the series in such a way, that the new series be summable to $f(x)$ everywhere by all methods $(C, \alpha > 0)$ and A .

In particular, there are weakly permutable trigonometric series $(C, \alpha > 0)$ and A methods summable everywhere to $O(+\infty)$.

The behaviour of the coefficients of the series are also investigate.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. Риман. Сочинения, Гостехиздат, М.—Л., 1948.
2. Г. Х. Харди и В. В. Рогозинский. Ряды Фурье, М., Физматгиз, 1959.
3. С. Б. Стечкин и П. Л. Ульянов. О множествах единственности, Изв. АН СССР, серия матем. 26, 1962, 211—222.
4. И. И. Привалов. Граничные свойства аналитических функций, М.—Л., 1950.
5. П. Л. Ульянов. Решенные и нерешенные проблемы теории тригонометрических и ортогональных рядов, УМН 19, вых. 1(115), 1964.
6. W. Darsow. On boundedness of trigonometric series. Journ. London Math. Soc., 35, № 2, 1960, 237—239
7. В. Я. Козлов. О полных системах ортогональных функций, Мат. сборник, 26 (68), 1950, 351—364.
8. Н. К. Бари. Тригонометрические ряды, М., Физматгиз, 1961.
9. Д. Е. Меньшов. Sur la convergence et la sommation des series de fonctions orthogonales, Bull. Soc. Math. France, 64, 1936, 147—170.