УДК 517.95

Светлой памяти
 Рафаэля Арамовича Александрияна
 посвящается

К. А. ЯГДЖЯН

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ КОРРЕКТНОСТИ ЗАДАЧИ
 КОШИ ДЛЯ ОПЕРАТОРОВ С
 КРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

Рассматривается задача Коши

$$Lu = f, \quad (0.1)$$

$$D_t^{\alpha} u|_{t=s} = \Psi_l(x), \quad t=0, \dots, m-1, \quad (0.2)$$

где $t, s \in J = [0, T]$, $T > 0$, $x \in R^n$, $D_j = -i\partial/\partial x_j$, $D_t = -i\partial/\partial t$,
 α — мультииндекс, а

$$L = D_t^m + \sum_{\substack{j+|\alpha| < m \\ j < m}} a_{j,\alpha}(t, x) D_j^j D_x^\alpha, \quad (0.3)$$

$a_{j,\alpha} \in C^\infty(J \times R^n)$, в предположении, что главный символ

$$P_m(t, x, \tau, \xi) = \tau^m + \sum_{j+|\alpha|=m, j < m} a_{j,\alpha}(t, x) \tau^j \xi^\alpha \quad (0.4)$$

представляется в виде

$$P_m(t, x, \tau, \xi) = \prod_{l=1}^m (\tau - \lambda_l(t, x, \xi)), \quad (0.5)$$

где вещественнозначные функции $\lambda_l(t, x, \xi)$ удовлетворяют условиям

$$|\lambda_l(t, x, \xi)| \leq c\lambda(t) |\xi|, \quad c = \text{const} > 0, \quad (0.6)$$

$$|\lambda_l(t, x, \xi) - \lambda_r(t, x, \xi)| \geq \delta\lambda(t) |\xi|, \quad \delta = \text{const} > 0, \quad l \neq r, \quad (0.7)$$

для всех $t \in J$, $(x, \xi) \in R^{2n}$, $l, r = 1, \dots, m$, с функцией $\lambda \in C^\infty(J)$,
 $\lambda(0) = 0$, такой, что $\lambda_l(t) = \partial_t \lambda(t) > 0$ при $t > 0$, и $c_1 \lambda(t) / \Lambda(t) \leq$
 $\leq \lambda_l(t) / \lambda(t) \leq c_0 \lambda(t) / \Lambda(t)$, $|\lambda^{(k)}(t)| \leq c_k (\lambda'(t) / \lambda(t))^{k-1} \lambda'(t)$, где $c_1 >$
 $> (m-1)/m$, $k=2, 3, \dots$, и $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(s) ds$.

Таким образом, при $t=0$ имеет место нарушение условия строгой гиперболичности оператора L . В работе [1] автора построены параметрикс и фундаментальное решение задачи (0.1), (0.2) в предположении, что младшие члены оператора при всех k, β и всех j, α , $|\alpha| \neq 0$, $x \in R^n$, $t \in J^0 = (0, T]$, удовлетворяют условиям

$$|D_t^k D_x^\beta a_{j,\alpha}(t, x)| \leq C_{k,\beta} \lambda^{m-j}(t) \left(\frac{|\ln \lambda(t)|}{\Lambda(t)} \right)^{m-j-|\alpha|} \left(\frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)} \right)^k, \quad (0.8)$$

$$|D_t^k D_x^\beta \ln a_{m-1-|\alpha|,\alpha}(t, x)| \leq C_{k,\beta} \lambda^{|\alpha|}(t) \left(\frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)} \right)^{k+1}. \quad (0.9)$$

Из результатов работы [1], в частности следует, что при выполнении (0.8), (0.9) задача Коши является корректной во многих смыслах. Как показано в [2] в случае, когда $a_{j,\alpha}(t, x) = a_{j,\alpha}(t)$ условия (0.8), (0.9) являются необходимыми для C^∞ -корректности задачи Коши. В настоящей работе мы распространяем теоремы [2, 3 [2] на операторы с коэффициентами, зависящими и от пространственных переменных.

Введем обозначения: $\Omega(x_0, t_0, \varepsilon) = \{(x, t); |x - x_0| \leq \lambda_0(t_0 + \varepsilon - t), t_0 \leq t \leq t_0 + \varepsilon\}$, $D(x_0, t_0, \varepsilon) = \Omega(x_0, t_0, \varepsilon) \cap \{t = t_0\}$, $\Omega_-(x_0, t_0, \varepsilon) = \{(x, t); |x - x_0| \leq \lambda_0(t - t_0), t_0 \leq t \leq t_0 + \varepsilon\}$, $D_-(x_0, t_0, \varepsilon) = \Omega_-(x_0, t_0, \varepsilon) \cap \{t = t_0 + \varepsilon\}$.

Определение 1. Скажем, что задача Коши (0.1), (0.2) корректно поставлена в окрестности точки (x_0, t_0) , если существуют положительные постоянные ε_0, λ_0 такие, что для любых $x_1, \varepsilon, 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, $\Omega(x_1, t_0, \varepsilon) \subset \Omega(x_0, t_0, \varepsilon_0)$, и любых $f \in C^\infty(\Omega(x_1, t_0, \varepsilon)), \Psi_j \in C^\infty(D(x_1, t_0, \varepsilon)), j = 0, \dots, m-1$, существует единственное решение $u \in C^\infty(\Omega(x_1, t_0, \varepsilon))$.

Определение 2. Скажем, что задача Коши (0.1), (0.2) корректно поставлена в окрестности точки (x_0, t_0) с данными вне многообразия вырождения, если существуют положительные постоянные ε_0, λ_0 такие, что для любых $x_1, \varepsilon, 0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, таких, что $\Omega_-(x_1, t_0 + \varepsilon, \varepsilon_0 - \varepsilon) \subset \subset \Omega_-(x_0, t_0, \varepsilon_0)$, для любых $f \in C^\infty(\Omega_-(x_1, t_0 + \varepsilon, \varepsilon_0 - \varepsilon)), \Psi_j \in C^\infty(D_-(x_1, t_0 + \varepsilon, \varepsilon_0 - \varepsilon)), j = 0, \dots, m-1$, существует единственное решение $u \in C^\infty(\Omega_-(x_1, t_0 + \varepsilon, \varepsilon_0 - \varepsilon))$.

Пусть Γ — открытое коническое множество в $R_x^n \times (R_t^n \setminus 0)$, а $0 \in \Omega = \pi_x(\Gamma)$ — его проекция на R_x^n . Через $S^m(\Gamma)$ обозначим обычное пространство символов (см. [3]), а через $C_l(J; S^m(\Gamma))$ — пространство непрерывных отображений J в $S^m(\Gamma)$.

Теорема 1. *Предположим, что существует открытое коническое множество Γ такое, что коэффициенты оператора L удовлетворяют в Γ условиям (0.5), (0.6), (0.7) при всех $t \in J$, и пусть в $J \times \Omega$ для всех $j, \alpha, |\alpha| \neq 0, k, \beta$ выполнены неравенства (0.8). Пусть, далее, существуют символы $c_j \in C_l(J; S^0(\Gamma)), j = 0, \dots, m-2$, и функция $\nu \in C(J) \cap C^1(J^0)$ такие, что*

$$\sum_{|\alpha|=m-1-j} \operatorname{Im} a_{j,\alpha}(t, x) \xi^\alpha = c_j(t, x, \xi) (|\xi| \lambda(t))^{m-1-j} \frac{\lambda(t)}{\Lambda(t) \nu(t)}, \quad (0.10)$$

$$\nu(t) > 0, \quad \frac{\nu_t(t)}{\nu(t)} < - \frac{\lambda_t(t)}{\lambda(t)} \frac{1}{\ln \lambda(t)}, \quad t > 0. \quad (0.11)$$

Тогда, если $\sum_{j=0}^{m-2} |c_j(0, 0, \xi)| \neq 0$ при $(0, \xi) \in \Gamma$, а $v(0) = 0$, то задача Коши (0.1), (0.2) не является корректно поставленной в окрестности точки $(0, 0)$ ни в смысле определения 1 (т. е. при $s = 0$), ни в смысле определения 2 (т. е. при некотором $s > 0$).

Нам представляется правдоподобным, что нарушение условия (0.8), вообще говоря, приводит к потере единственности в задаче Коши. Отметим в связи с этим работы [4], [9]. Интересный пример построен также в [10]. Во всяком случае нарушение (0.8) ведет к потере корректности. Именно, справедлива следующая

Теорема 2. Предположим, что в некотором открытом коническом множестве Γ для некоторой пары $(\widehat{j}, \widehat{k})$, $0 < \widehat{k} < m$, $m - \widehat{j} - \widehat{k} > 0$, для всех $(t, x, \xi) \in J^0 \times \Gamma$ имеет место представление

$$\sum_{|\alpha| = m - \widehat{k} - \widehat{j}} a_{j, \alpha}(t, x) \xi^\alpha = \lambda^{m - \widehat{j}}(t) \left(\frac{|\ln \lambda(t)|}{\Lambda(t)} \right)^{\widehat{k}} \frac{b(t, x, \xi)}{v(t)} |\xi|^{m - \widehat{k} - \widehat{j}}, \quad (0.12)$$

с символом $b(t, x, \xi) \in C^1(J^0; S^0(\Gamma))$ и с функциями $v, \lambda \in C^1(J^0)$, удовлетворяющими с некоторой постоянной $\varepsilon > 0$ условиям

$$c_1 \frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)} \leq \frac{\lambda_r(t)}{\lambda(t)} \leq \frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)}, \quad c_1 > (m - 1)/m,$$

$$v(t) > 0, \quad |\ln |b(t, x, \xi)|| \leq c, \quad |D_t b(t, x, \xi)| \leq c \lambda(t)/\Lambda(t),$$

$$0 < \frac{v_r(t)}{v(t)} < (m - 1 - \widehat{j} - \varepsilon) \frac{\lambda_r(t)}{\lambda(t)} - (\widehat{k} - 1) \frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)}, \quad (t, x, \xi) \in J^0 \times \Gamma, \quad (0.13)$$

а для остальных (j, k) , $k = 0, \dots, m - 1$, $m - j - k > 0$, при тех же (t, x, ξ) для любых γ, β

$$|D_\xi^\gamma D_x^\beta \sum_{|\alpha| = m - k - j} a_{j, \alpha}(t, x) \xi^\alpha| \leq C_{\gamma, \beta} \lambda^{m - j}(t) \left(\frac{|\ln \lambda(t)|}{\Lambda(t)} \right)^k |\xi|^{m - k - j - |\alpha|}. \quad (0.14)$$

Предположим далее, что непрерывно дифференцируемые на $J^0 \times \Gamma$ комплексные корни $(m - j)$ -ой степени из $-b(t, x, \xi)/|b(t, x, \xi)|$, обозначим их через $Z_l(t, x, \xi)$, $l = 1, \dots, m - j$, можно так пронумеровать и разбить на две группы $\{Z_l\}_1$, $\{Z_l\}_{r+1}^{m-j}$, $0 \leq r < m - j$, что $\operatorname{Im} Z_l < 0$, и с некоторой положительной постоянной δ при всех $(t, x, \xi) \in J^0 \times \Gamma$

$$\min_{r+1 \leq l \leq m-j} |\operatorname{Im} Z_l(t, x, \xi)| > \delta > 0, \quad (0.15)$$

$$\min_{1 \leq l \leq r} Z_l(t, x, \xi) \geq o(1), \quad (0.16)$$

где величина $o(1)$ может быть сделана сколь угодно малой за счет уменьшения T и сужения Γ . При $r = 0$ первая группа корней пустая, и условие (0.16) отсутствует.

Тогда, если $\lim_{t \rightarrow 0} \nu(t) = 0$, то задача Коши (0.1), (0.2) с $s=0$ не является корректно поставленной в окрестности точки $(0, 0)$ в смысле определения 1.

Сравнительно полная библиография по необходимым условиям корректности задачи Коши имеется в [2], [3], [6], [7], [11], [8].

Статья построена по следующему плану. В § 1 показано, что при «слабом» нарушении условий гиперболичности, на определенном множестве (зоне) точек (t, x, ξ) нули полного символа оператора различны, а поведение их мнимых частей таково, что позволяет в § 2 построить асимптотическое решение некоторой псевдодифференциальной системы, нарушающее априорную оценку, вытекающую из корректности. В § 3 аналогичным образом рассмотрен случай $s=T$. В § 4 приведено некоторое обобщение на случай, когда нули $\lambda_l(t, x, \xi)$ слипаются с разными скоростями.

§ 1. Начало доказательства теоремы 1. Гиперболичность

Пусть $\{\lambda_l(t, x, \xi)\}_1^m$ — нули главного символа оператора L , обозначим через $\{\tau_l(t, x, \xi)\}_1^m$ — нули полного символа:

$$\tau^m + \sum_{j < m, j+|a| < m} a_{j,a}(t, x) \tau^j \xi^a = 0. \quad (1.1)$$

Обозначим, далее, через t_l (соответственно $\langle \xi_l \rangle$) корень уравнения

$$\Lambda(t) \langle \xi \rangle = N \ln \langle \xi \rangle. \quad (1.2)$$

Лемма 1. Следующие условия А и В эквивалентны:

А. Существуют положительные постоянные M и N такие, что корни $\{\tau_l(t, x, \xi)\}_1^m$ обладают следующими свойствами: для любых k, α, β , с некоторыми положительными постоянными $\delta_1, C_{k,\alpha,\beta}$ имеют место

$$|D_t^k D_\xi^\alpha D_x^\beta \tau_l(t, x, \xi)| \leq C_{k,\alpha,\beta} \langle \xi \rangle^{1-|\alpha|} \lambda_l(\tau) \left(\frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)} \right)^k, \quad (1.3)$$

$$|\tau_j(t, x, \xi) - \tau_l(t, x, \xi)| \geq \delta_1 \lambda_l(t) \langle \xi \rangle, \quad j \neq l, \quad (1.4)$$

$$|D_t^k D_\xi^\alpha D_x^\beta \operatorname{Im} \tau_l(t, x, \xi)| \leq C_{k,\alpha,\beta} \langle \xi \rangle^{-|\alpha|} \left(\frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)} \right)^k \left\{ \frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)} + \right. \\ \left. + (m-2) \frac{\lambda(t) \ln^2 \lambda(t)}{\Lambda^2(t) \langle \xi \rangle} \right\}, \quad (1.5)$$

при всех $t \in [t_\varepsilon, T]$, $\xi \in R^n$, $\xi \in R^n$, $\langle \xi \rangle \geq M$ и всех $j, l=1, \dots, m$.

В. Нули $\{\lambda_l(t, x, \xi)\}_1^m$ главного символа (0.4) при всех $t \in J$, $x \in R^n$, $\xi \in R^n$ являются вещественными функциями, удовлетворяющими неравенствам (0.6), (0.7) с $l, r=1, \dots, m$, а коэффициенты $a_{j,\alpha}(t, x)$ удовлетворяют при всех $k, \beta, j, \alpha, |\alpha| \neq 0, |\alpha| + j \leq m$, и при всех $t \in J, x \in R^n$ неравенствам (0.8), (0.9).

Доказательство. Докажем импликацию $A \Rightarrow B$. Согласно теореме Виета

$$|D_t^k D_x^\alpha a_{j,\alpha}(t, x)| = |D_t^k D_x^\alpha D_\xi^\alpha \sum_{l_1 < l_2 < \dots < l_{m-j}} \tau_{l_1}(t, x, \xi) \tau_{l_2}(t, x, \xi) \dots \tau_{l_{m-j}}(t, x, \xi)| \leq C_{k,\beta} \lambda^{m-j}(t) \langle \xi \rangle^{m-j-|\alpha|} \left(\frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)} \right)^k, \langle \xi \rangle \gg \langle \xi_l \rangle. \quad (1.6)$$

Левая часть (1.6) и постоянные $C_{k,\beta}$ не зависят от ξ , поэтому, выбрав $\langle \xi \rangle = \langle \xi_l \rangle$, получаем (0.8) при $j + |\alpha| = m$. Для остальных $a_{j,\alpha}$, $j + |\alpha| = m - l$, где $l = 1, \dots, m - 1$, (0.8) устанавливается индукцией по l .

Докажем теперь (0.9). Нетрудно показать, что $\text{Im } a_{m-|\alpha|,\alpha}(t, x) \equiv 0$. Далее, для любых $x \in R^n$, $\xi \in R^n$, $\langle \xi \rangle \gg \langle \xi_l \rangle$ имеем

$$|D_t^k D_x^\beta \text{Im } a_{m-1-|\alpha|,\alpha}(t, x)| = |D_t^k D_x^\beta D_\xi^\alpha \text{Im} \sum_{l_1 < \dots < l_{|\alpha|+1}} \tau_{l_1} \tau_{l_2} \dots \tau_{l_{|\alpha|+1}}| \leq C_{k,\beta} \lambda^{|\alpha|} \left(\frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)} \right)^k \left\{ \frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)} + \frac{\lambda(t) \ln^2 \lambda(t)}{\Lambda^2(t) \langle \xi \rangle} \right\}, \quad (1.7)$$

и т. к. $\langle \xi \rangle$ можно выбрать сколь угодно большим, откуда следует (0.9).

Для доказательства (0.6), (0.7) осуществим замену $\lambda = \lambda(t) |\xi|$, $\mu = \lambda(t) |\xi| \gamma$, после которой уравнения для нулей главного символа и нулей полного символа перейдут в

$$\mu^m + \sum_{0 < j < m} \left(\sum_{|\alpha|=m-j} (\lambda(t) |\xi|)^{j-m} a_{j,\alpha}(t, x) \xi^\alpha \right) \mu^j = 0, \quad (0.5')$$

$$\gamma^m + \sum_{0 < j < m} \left(\sum_{|\alpha|=m-j} (\lambda(t) |\xi|)^{j-m} a_{j,\alpha}(t, x) \xi^\alpha + B_{j+1} \right) \gamma^j = 0, \quad (1.1')$$

где

$$B_{j+1} = B_{j+1}(t, x, \xi) = \sum_{|\alpha|=m-1-j} (\lambda(t) |\xi|)^{j-m} a_{j,\alpha}(t, x) \xi^\alpha, \quad j=0, \dots, m-1. \quad (1.8)$$

Согласно уже доказанному (0.8) при $(t, x, \xi) \in Z_h = \{(t, x, \xi) : x \in R^n, \xi \in R^n, t \geq t_\xi\}$

$$|D_t^k D_\xi^\alpha D_x^\beta B_{j+1}(t, x, \xi)| \leq C_{k,\alpha,\beta} \langle \xi \rangle^{-|\alpha|} \left(\frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)} \right)^k \sum_{|\alpha|=m-1-j} \left(\frac{|\ln \lambda(t)|}{\Lambda(t) |\xi|} \right)^{m-j-|\alpha|} \leq C_{k,\alpha,\beta} \langle \xi \rangle^{-|\alpha|} \left(\frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)} \right)^k N^{-1}, \quad N \gg 1, \quad (1.9)$$

поэтому рассмотрим (0.5') как возмущенное уравнение (1.1') с возмущениями $[-B_j]_1^m$ в коэффициентах. Корни уравнения (1.1') согласно (1.4) аналитически зависят от возмущений $[-B_j]_1^m$. Ясно, что

$$|D_t^k D_\xi^\alpha D_x^\beta \gamma_l(t, x, \xi)| \leq C_{k,\alpha,\beta} \langle \xi \rangle^{-|\alpha|} \left(\frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)} \right)^k, \quad (1.10)$$

$$|\gamma_j(t, x, \xi) - \gamma_l(t, x, \xi)| \geq \delta_1, \quad j \neq l, \quad (1.11)$$

$$|D_t^k D_x^\alpha D_\xi^\beta \operatorname{Im} \gamma_l(t, x, \xi)| \leq C_{k, \alpha, \beta} \left\{ \frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)} + \right. \\ \left. + (m-2) \frac{\lambda(t) \ln^2 \lambda(t)}{\Lambda^2(t) \langle \xi \rangle} \right\} \langle \xi \rangle^{-1-|\alpha|} \frac{1}{\lambda(t)} \left(\frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)} \right)^k, \quad (1.12)$$

при всех $t \in [t_0, T], x \in R^n, \xi \in R^n, \langle \xi \rangle > M$, и всех $j, l = 1, \dots, m$.

Далее достаточно показать, что при возмущении каким-либо одним B_{j+1} , при отсутствии остальных, т. е. при $B_1 = \dots = B_j = B_{j+2} = \dots = B_m = 0$, корни уравнения

$$P(t, x, \xi; \mu) - \mu^j B_{j+1} = 0, \quad (1.13)$$

где $P(t, x, \xi; \mu) = (\mu - \gamma_1(t, x, \xi)) \dots (\mu - \gamma_m(t, x, \xi))$, наследуют свойства (1.10)–(1.12) корней уравнения (1.1'), разумеется с новыми постоянными $N, \delta_1, C_{k, \alpha, \beta}, M$. Действительно, в силу (1.11) имеем

$$\mu_l(t, x, \xi) = \gamma_l(t, x, \xi) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(l)}(t, x, \xi) B_{j+1}^n \quad (l=1, \dots, m), \quad (1.14)$$

где

$$c_n^{(l)}(t, x, \xi) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\omega - \gamma_l| = \rho} \\ \frac{(\omega - \gamma_l(t, x, \xi)) (\omega P'_\omega(t, x, \xi; \omega) - j P(t, x, \xi; \omega) \omega^{j-1})}{(P(t, x, \xi; \omega))^{n+1}} d\omega = \\ = \frac{1}{(n-1)!} \left| \frac{d^{n-1}}{d\omega^{n-1}} \left\{ \left(\frac{\omega - \gamma_l(t, x, \xi)}{P(t, x, \xi; \omega)} \right)^{n+1} \omega^{j-1} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times (\omega P'_\omega(t, x, \xi; \omega) - j P(t, x, \xi; \omega)) \right\} \right|_{\omega = \gamma_l(t, x, \xi)}. \quad (1.15)$$

Повтому, при $0 < 2\rho < \delta_1$ справедливо неравенство

$$|c_n^{(l)}(t, x, \xi)| \leq c \delta_1^{1-m} (c / (\rho \delta_1^{m-1}))^n, \quad c = \text{const}, \quad (1.16)$$

в котором правая часть не зависит от t, x, ξ, l . Повтому радиус r_{j+1} сходимости ряда (1.14) ($|B_{j+1}| < r_{j+1}$) не зависит от t, x, ξ, l , и может быть выбран равным $q_1 \rho \delta_1^{m-1} / c$, где $q_1 = \text{const} < 1$. Таким образом, для сходимости рядов (1.14) достаточно, чтобы

$$-(\ln \lambda(t)) / (\Lambda(t) |\xi|) < q_1 \rho \delta_1^{m-1} / (2c), \quad (1.17)$$

где постоянная c не зависит от t, x, ξ, l , а ρ связана лишь условием $\rho < \delta_1/2$. Выбрав новое N в (1.2), будем теперь рассматривать только $(t, x, \xi) \in Z_h$, где Z_h определено с этим новым N .

Проверим, что корни уравнения (1.13) действительно наследуют все свойства (1.10)–(1.12). Имеем

$$|\mu_l(t, x, \xi)| \leq |\gamma_l(t, x, \xi)| + \sum_{n=1}^{\infty} c \delta_1^{1-m} \left(\frac{c |B_{j+1}|}{\rho \delta_1^{m-1}} \right)^n \leq \text{const}$$

для всех $(t, x, \xi) \in Z_h$ и всех l , что соответствует (1.10) с $k = |\alpha| = |\beta| = 0$.
Далее

$$\mu_l(t, x, \xi) - \mu_k(t, x, \xi) = (\gamma_l - \gamma_k) + \sum_{n=1}^m (c_n^{(l)} - c_n^{(k)}) B_{j+1}^n.$$

Но $|\gamma_l - \gamma_k| \geq \delta_1$, а

$$\left| \sum_{n=1}^m (c_n^{(l)} - c_n^{(k)}) B_{j+1}^n \right| \leq c \delta_1^{1-m} q_1,$$

что может быть сделано меньше $\delta_1/2$ при соответствующем выборе q_1 ; т. е. при достаточном увеличении N . Окончательно, для корней (1.13) получаем

$$|\mu_l(t, x, \xi) - \mu_k(t, x, \xi)| \geq \delta_1/2, (t, x, \xi) \in Z_h, k \neq l. \quad (1.18)$$

Теперь уже можно оценить производные $D_\xi^\alpha D_x^\beta D_t^\gamma \mu_l(t, x, \xi)$ либо оценив соответствующие производные коэффициентов $c_n^{(l)}(t, x, \xi)$, либо по формуле производной неявной функции, и получить оценки

$$|D_t^\gamma D_\xi^\alpha D_x^\beta \mu_l(t, x, \xi)| \leq C_{k, \alpha, \beta} \langle \xi \rangle^{-|\alpha|} \left(\frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)} \right)^k. \quad (1.19)$$

Далее

$$\begin{aligned} |\operatorname{Im} \mu_l(t, x, \xi)| &\leq |\operatorname{Im} \gamma_l(t, x, \xi)| + \left| \operatorname{Im} \sum_{n=1}^m c_n^{(l)}(t, x, \xi) B_{j+1}^n \right| \leq \\ &\leq c (\lambda(t) |\xi|)^{-1} \left\{ \frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)} + (m-2) \frac{\lambda(t) \ln^2 \lambda(t)}{\Lambda^2(t) |\xi|} \right\} + |\operatorname{Im} c_1^{(l)}| \cdot |B_{j+1}| + \\ &+ |c_1^{(l)}| |\operatorname{Im} B_{j+1}| + |B_{j+1}|^2 \sum_{n=2}^m |c_n^{(l)}| \cdot |B_{j+1}|^{n-2}. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Но

$$|\operatorname{Im} c_1^{(l)}| \leq c (\lambda |\xi|)^{-1} \left\{ \frac{\lambda}{\Lambda} + (m-2) \frac{\lambda \ln^2 \lambda}{\Lambda^2 |\xi|} \right\}, \quad (1.21)$$

$$\begin{aligned} |\operatorname{Im} B_{j+1}| &= \left| \sum_{|\alpha| < m-1-j} (\lambda |\xi|)^{j-m} \operatorname{Im} a_{j, \alpha}(t, x) \xi^\alpha \right| \leq \\ &\leq c (\lambda |\xi|)^{-1} + c (m-2) \sum_{0 < |\alpha| + j - m - 2} (\lambda |\xi|)^{j-m} |a_{j, \alpha}(t, x) \xi^\alpha| + \\ &+ \sum_{|\alpha| = m-1-j} (\lambda |\xi|)^{j-m} |\operatorname{Im} a_{j, \alpha}(t, x) \xi^\alpha| \leq c (\lambda |\xi|)^{-m} + \\ &+ c (m-2) \sum_{0 < |\alpha| + j - m - 2} \left(\frac{|\ln \lambda(t)|}{\Lambda(t) |\xi|} \right)^{m-j-|\alpha|} + c (\Lambda(t) |\xi|)^{-1} \leq \\ &\leq c (\lambda(t) |\xi|)^{-1} \left\{ \frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)} + (m-2) \frac{\lambda(t) \ln^2 \lambda(t)}{\Lambda^2(t) |\xi|} \right\}, \end{aligned} \quad (1.22)$$

$$|B_1|^2 \leq c \left(\frac{|\ln \lambda(t)|}{\Lambda(t) |\xi|} \right)^2, \sum_{n=2}^m |c_n^{(l)}| |B_1^{n-2}| \leq c. \quad (1.23)$$

Поэтому из (1.20)—(1.23) следует справедливость неравенств

$$\begin{aligned} |D_t^\gamma D_\xi^\alpha D_x^\beta \operatorname{Im} \mu_l(t, x, \xi)| &\leq C_{k, \alpha, \beta} \langle \xi \rangle^{-|\alpha|} \left(\frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)} \right)^k \times \\ &\times \frac{1}{\lambda(t) \langle \xi \rangle} \left\{ \frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)} + \frac{\lambda(t) \ln^2 \lambda(t)}{\Lambda^2(t) \langle \xi \rangle} \right\}, l=1, \dots, m, \end{aligned} \quad (1.24)$$

при $r = k + |\alpha| + |\beta| = 0$. Для доказательства (1.24) при всевозможных r достаточно воспользоваться формулой производной неявной функции и индукцией по r , чем и завершается доказательство того, что корни уравнения (1.13) наследуют все свойства корней $\{\gamma_l(t, x, \xi)\}$.

Таким образом, для корней уравнения (0.5'), а следовательно и для нулей $\{\gamma_l(t, x, \xi)\}_1^m$ главного символа справедливы неравенства, соответствующие (1.3), (1.4) и, кроме того

$$|\operatorname{Im} \lambda_l(t, x, \xi)'| \leq c \left\{ \frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)} + \frac{\lambda(t) \ln^2 \lambda(t)}{\Lambda^2(t) \langle \xi \rangle} \right\} \quad (1.25)$$

для всех $(t, x, \xi) \in Z_h(N)$. Если предположить теперь, что при некоторых $t_0, \xi_0, t_0 \neq 0, \operatorname{Im} \lambda_{i_0}(t_0, x_0, \xi_0) \neq 0$, то при достаточно больших $|\xi|$ точка $(t_0, x_0, |\xi| \xi_0)$ попадает в зону $Z_h(N)$ и, вследствие однородности по ξ функции $\lambda_{i_0}(t, x, \xi)$, (1.25) нарушается при $|\xi| \rightarrow \infty$. Т. о. все $\lambda_l(t, x, \xi)$ — вещественные функции. Импликация $A \Rightarrow B$ доказана.

Доказательство импликации $B \Rightarrow A$ отличается только тем, что теперь уже рассматриваем (1.1') как возмущенное (0.5'). Лемма доказана.

При «слабом» нарушении условий гиперболичности, которое имеет место в теореме 1, утверждения леммы 1 остаются в силе только частично. Для описания поведения корней полного символа определим точку t_3 как решение уравнения (см. (2.2) [2])

$$\Lambda(t_3) \langle \xi \rangle = N_3 \nu(t_3) \ln^2 \lambda(t_3), \quad N_3 = \operatorname{const} > 0. \quad (1.26)$$

Лемма 2. В условиях теоремы 1 существуют постоянные M_0, N_0, N_{30} , такие, что для всех $N > N_0, N_3 > N_{30}, M > M_0$, корни $\{\tau_j(t, x, \xi)\}_1^m$ обладают следующими свойствами: для любых k, α, β существуют положительные постоянные $\delta_1, C_{k, \alpha, \beta}$ такие, что при $(x, \xi) \in \Gamma, t_\xi \leq t \leq T$, имеют место (1.3), (1.4), а также

$$|D_t^k D_\xi^\alpha D_x^\beta \operatorname{Im} \tau_l(t, x, \xi)| \leq C_{k, \alpha, \beta} \langle \xi \rangle^{-|\alpha|} \left(\frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)} \right)^k \left\{ \frac{\lambda(t)}{\nu(t) \Lambda(t)} + \right. \\ \left. + (m-2) \frac{\lambda(t) \ln^2 \lambda(t)}{\Lambda^2(t) \langle \xi \rangle} \right\} \quad \text{при } (x, \xi) \in \Gamma, t_\xi \leq t \leq T, \quad (1.27)$$

$$|\operatorname{Im} \tau_k(t, x, \xi)| \leq o(1) \frac{\lambda(t)}{\Lambda(t) \nu(t)}, \quad k=1, \dots, r \quad \text{при } (x, \xi) \in \Gamma, t_3 \leq t \leq T, \quad (1.28)$$

$$|\operatorname{Im} \tau_k(t, x, \xi)| \geq \delta_1 \frac{\lambda(t)}{\Lambda(t) \nu(t)}, \quad k=r+1, \dots, m \quad \text{при } (x, \xi) \in \Gamma, t_3 \leq t \leq T, \quad (1.29)$$

для всех $j, l = 1, \dots, m$, и с $r \leq m-1$. Здесь $o(1)$ относительно $T \downarrow 0$.

Доказательство аналогично доказательству леммы 1, поэтому мы его опускаем.

§ 2. Построение неустойчивого решения. Случай $s=0$

1°. В § 2 [1] осуществлено приведение (0.1), (0.2) к задаче Коши для системы «первого» порядка (2.8) [1], а затем в §§ 3—5 [1]—построение параметрикса сведено к построению экспоненты некоторого матричного ПДО. Повторяя конструкции §§ 2—5 [1] в ситуации теоремы 1 мы приходим к системе

$$iD_t U - R(t, x, D_x) U = 0, \quad (2.1)$$

аналогичной (5.4) [1], где $U = (U_1, \dots, U_m)$, $R(t, x, \xi) = \bar{D}(t, x, \xi) + \bar{F}(t, x, \xi) + \varepsilon(t, x, \xi)$, $\bar{D}(t, x, \xi)$ — вещественная диагональная матрица, $\varepsilon(t) \in H[0, 0, 1]$ в обозначениях [1], $\bar{F}(t, x, \xi)$ — диагональная матрица, и

$$\bar{D}(t, x, \xi) = \bar{F}(t, x, \xi) = 0 \text{ при } 0 \leq t \leq t_0, (x, \xi) \in \Gamma, \quad (2.2)$$

$$\|D_t^\alpha D_x^\beta \bar{F}(t, x, \xi)\| \leq C_{k, \alpha, \beta} \langle \xi \rangle^{-|\alpha|} (\ln \langle \xi \rangle)^{|\alpha| + |\beta|} \left(\frac{i_+(t)}{\Lambda(t)} \right)^{k+1},$$

$$t_0 \leq t \leq T, (x, \xi) \in \Gamma, \quad (2.3)$$

$$\|D_t^\alpha D_x^\beta \bar{D}(t, x, \xi)\| \leq C_{k, \alpha, \beta} \langle \xi \rangle^{-|\alpha|} (\ln \langle \xi \rangle)^{|\alpha| + |\beta|} \left\{ \frac{\lambda(t)}{\Lambda(t) \vee (t)} + \right.$$

$$\left. + (m-2) \frac{\lambda(t) \ln^2 \lambda(t)}{\Lambda^2(t) \langle \xi \rangle} \right\} \left(\frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)} \right)^k, \quad t_0 \leq t \leq T, (x, \xi) \in \Gamma, \quad (2.4)$$

$$\|D_x^\alpha \varepsilon(t, x, \xi)\| \leq C_{\alpha, \beta} \langle \xi \rangle^{-|\alpha|} (\ln \langle \xi \rangle)^{|\alpha| + |\beta|} (\rho(t, \xi) + \rho_t(t, \xi) / \rho(t, \xi)), \quad 0 \leq t \leq t_0, (x, \xi) \in \Gamma, \quad (2.5)$$

$$|\bar{D}_{kj}(t, x, \xi)| \leq o(1) \frac{\lambda(t)}{\Lambda(t) \vee (t)} \delta_{kj}, \quad k=1, \dots, r, t_0 \leq t \leq T, (x, \xi) \in \Gamma, \quad (2.6)$$

$$|\bar{D}_{kj}(t, x, \xi)| \geq \delta_{kj} \delta_1 \frac{\lambda(t)}{\Lambda(t) \vee (t)}, \quad k=r+1, \dots, m, t_0 \leq t \leq T, (x, \xi) \in \Gamma, \quad (2.7)$$

$$\bar{D}_{m, m}(t, x, \xi) > 0, \bar{D}_{m-1, m-1}(t, x, \xi) < 0, t_0 \leq t \leq T, (x, \xi) \in \Gamma. \quad (2.8)$$

Здесь коническое множество Γ хоть и не совпадает с тем, которое было в условиях теоремы, но, являясь его частью, обладает всеми его свойствами и потому мы его также обозначаем через Γ . Функция $\rho(t, \xi)$ определена в (2.1) [1], а $o(1)$ описана в лемме 2.

2°. Асимптотическое решение системы (2.1) будем искать в виде

$$U(t, x, \xi) = e^{i x \xi} \sum_{n=0}^N U_n(t, x, \xi), \quad (2.9)$$

где большое число N будет выбрано ниже, а $(x, \xi) \in \Gamma$. Подстановка в (2.1) приводит к следующим системам: $(R^{(n)} = \partial_x^n R)$

$$iD_t U_0 - R(t, x, \xi) U_0 = 0, \quad (2.10)$$

$$iD_t U_n - R(t, x, \xi) U_n - \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{|\alpha|=\pi-k} \frac{1}{\alpha!} R^{(\alpha)}(t, x, \xi) D_x^\alpha U_k(t, x, \xi) = 0. \quad (2.11)$$

К (2.10), (2.11) добавим начальные условия

$$U_0(t_3, x, \xi) = \varphi(0, \dots, 0, \varphi(x < \xi >^\delta)) = \Phi(x, \xi), \quad \delta > 0, \quad (2.12)$$

$$U_n(t_3, x, \xi) = 0, \quad n = 1, \dots, N, \quad (2.13)$$

где $\varphi \in C_0^\infty(R^n)$, $\int |\varphi(x)|^2 dx = 1$, $(0, \xi) \in \Gamma$, а постоянная $\delta < 1/2$ будет выбрана ниже, причем $\lambda(t)/\Lambda(t) < c\Lambda^{-\delta}(t)$ при $t \in J^0$.

3°. Прежде всего рассмотрим зону $0 \leq t \leq t_3$. Очевидно, что

$$|D_\xi^\alpha D_x^\beta R(t, x, \xi)| \leq C_{\alpha, \beta} < \xi >^{-|\alpha|} (\ln < \xi >)^{|\alpha| + |\beta|} g(t, \xi), \quad t \leq t_3, \quad (2.14)$$

где для функции $g(t, \xi)$ согласно (2.2)–(2.5) имеем при $(x, \xi) \in \Gamma$

$$\int_0^{t_3} g(t, \xi) dt \leq \gamma_1 \ln < \xi >. \quad (2.15)$$

Из (2.10)–(2.13) нетрудно получить представления

$$U_0(t, x, \xi) = \sum_{i=0}^n \underbrace{JR \dots JR}_i \Phi(x, \xi), \quad (2.16)$$

где обозначено $Jv(t) = \int_t^i v(\tau) d\tau$,

$$U_n(t, x, \xi) = \sum_{i=1}^n \underbrace{JR \dots JR}_i \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{|\alpha|=\pi-k} \frac{1}{\alpha!} R^{(\alpha)} D_x^\alpha U_k, \quad (2.17)$$

откуда

$$\begin{aligned} |D_x^\alpha U_n(t, x, \xi)| &\leq C_{n, \alpha} < \xi >^{\delta(|\alpha| + n) - n} \left(\int_\gamma^{t_3} g(\tau, \xi) d\tau \right)^n \times \\ &\times \exp \left(\int_t^{t_3} g(\tau, \xi) d\tau \right), \quad \text{при } (x, \xi) \in \Gamma, \quad 0 \leq t \leq t_3, \end{aligned} \quad (2.18)$$

и, следовательно,

$$|D_x^\alpha U_n(t, x, \xi)| \leq C_{n, \alpha} (\ln < \xi >)^n < \xi >^{\delta(|\alpha| + n) - n + \gamma_1}, \quad (x, \xi) \in \Gamma, \quad t \leq t_3. \quad (2.19)$$

Далее, для любого псевдодифференциального оператора $R(t, x, D_x)$ имеем:

$$\begin{aligned} R(t, x, D_x) e^{lx\xi} U_k(t, x, \xi) &= e^{lx\xi} \sum_{|\alpha|=\pi-k} \frac{1}{\alpha!} R^{(\alpha)}(t, x, \xi) D_x^\alpha U_k(t, x, \xi) + \\ &+ r_{N, k}(t, x, \xi), \end{aligned} \quad (2.20)$$

где с любым $l > 0$

$$r_{N,k}(t, x, \xi) = e^{ix\xi} \int_{R^n} d\zeta \int_{K^n} dy \int_0^1 d\theta \sum_{|\alpha|=N-k} \frac{1}{\alpha!} R^{(\alpha)}(t, x, \xi + \theta\zeta) e^{k(x-y)}$$

$$\langle \zeta \rangle^{-2l} \langle Dy \rangle^{2l} D_x^\alpha U_k(t, y, \xi). \quad (2.21)$$

В случае $R(t, x, D_x)$ из (2.1) для $\forall \varepsilon > 0$ с помощью неравенства Питре получаем ($|z| = N - k$)

$$\|R^{(\alpha)}(t, x, \xi + \theta\zeta)\| \leq C_{\varepsilon, \alpha, \beta} \langle \xi + \theta\zeta \rangle^{\varepsilon - N + k} \leq C_{\varepsilon, \alpha, \beta} \langle \xi \rangle^{\varepsilon - N + k} \langle \zeta \rangle^{N - k - \varepsilon}. \quad (2.22)$$

Выбирая теперь $2l - N + k + \varepsilon > n$ из (2.21), (2.22) выводим ($\delta < 1/2$)

$$|D_x^\beta r_{N,k}(t, x, \xi)| \leq C_{\varepsilon, l, k, N, \beta} \langle \xi \rangle^{|\beta| - N(1-2\delta) + 2\delta(n-k) + \varepsilon(1-2\delta)} |Jg|^k \exp|Jg| \leq C_{\varepsilon, l, N, k, \beta} (\ln \langle \xi \rangle)^k \langle \xi \rangle^{|\beta| - N(1-2\delta) - 2\delta(k-n) + \varepsilon(1-2\delta) + \tau}, \quad (2.23)$$

где $0 \leq t \leq t_3$, а n — размерность пространства x -ов.

Ясно, что

$$(iD_t - R(t, x, D_x)) U(t, x, \xi) = R_N, \text{ где } R_N = \sum_{k=0}^N r_{N+1, k}, \quad (2.24)$$

$$|D_x^\beta R_N(t, x, \xi)| \leq C_{\varepsilon, \beta, N, \beta} \langle \xi \rangle^{|\beta| - (N+1)(1-2\delta) + 2\delta n + \tau + \varepsilon}, \quad (2.25)$$

при $(x, \xi) \in \Gamma$, $t \leq t_3$, для любого $\varepsilon > 0$ и $\delta < 1/2$. Отметим также, что

$$|D_x^\alpha (e^{-ix\xi} U(t, x, \xi))| \leq C_{\varepsilon, \alpha} \langle \xi \rangle^{\delta|\alpha| + \tau}, \quad t \leq t_3, (x, \xi) \in \Gamma. \quad (2.26)$$

4°. Определим точку t_4 как решение уравнения

$$\frac{\ln \lambda(t_4)}{\nu(t_4)} = 2N_3 \ln |\xi| + \frac{\ln \lambda(t_3)}{\nu(t_3)}, \quad N_3 > 0, \quad (2.27)$$

и докажем асимптотическое неравенство Гординга. Выберем еще точку $t_3 < t_4$ из

$$\langle \xi \rangle \Lambda(t_3) = (N_3/4) \nu(t_3) (\ln \lambda(t_3))^2, \quad (2.28)$$

и обозначив через $d_i(t, x, \zeta)$, $i = 1, \dots, m$, элементы матрицы $\tilde{D}_{i,j}(t, x, \xi)$, продолжим их на $[0, T] \times \Gamma$ следующим образом:

$$\tilde{d}_i(t, x, \zeta) = \langle \zeta \rangle \chi \left(\frac{2 \langle \zeta \rangle \Lambda(t)}{N_3 \nu (\ln \lambda(t))^2} \right) + d_i(t, x, \zeta) \left(1 - \chi \left(\frac{2 \langle \zeta \rangle \Lambda(t)}{N_3 \nu (\ln \lambda(t))^2} \right) \right),$$

так что $\tilde{d}_i \in C(\mathcal{J}; S^1)$, $\tilde{d}_i$ — вещественны, и для $i = r + 1, \dots, m$ $|\tilde{d}_i(t, x, \zeta)| \geq C(t, \zeta)$, где

$$C(t, \zeta) = \langle \zeta \rangle \chi \left(\frac{2 \langle \zeta \rangle \Lambda(t)}{N_3 \nu (\ln \lambda(t))^2} \right) + \frac{\delta_1}{2} \frac{\lambda(t)}{\Lambda(t) \nu(t)} \times \times \left(1 - \chi \left(\frac{2 \langle \zeta \rangle \Lambda(t)}{N_3 \nu (\ln \lambda(t))^2} \right) \right).$$

Построим теперь оператор $B(t, x, D_x)$ так, чтобы

$$2 \operatorname{Re}(\tilde{d}(t, x, D_x) - \frac{1}{2} C(t, D_x)) - B^*(t, x, D_x) B(t, x, D_x) \in \Psi^{-\infty}(\Gamma)$$

равномерно по $t \in J$, где $2 \operatorname{Re}(\tilde{d} - C/2) = \tilde{d} + \tilde{d}^* - C$. Для этого ищем B в виде

$$B \sim \sum_{k=0} b_k,$$

где $b_{-k} \in C(J; S^{1/2-k}(\Gamma))$, $k = 0, 1, \dots$, определяются рекуррентно.

Рассмотрим теперь действие какого-нибудь п. д. о.: $R(t, x, D_x)$ на функцию $v(t, x, \xi)$ — компоненту вектора $U(t, x, \xi)$ (2.9) определенного согласно (2.10) — (2.13), [где $\xi/|\xi|$ — фиксированный вектор, $(0, \xi) \in \Gamma$]:

$$R(t, x, D_x) v(t, x, \xi) = e^{ix\xi} \sum_{|\alpha| < N} \frac{1}{\alpha!} R^{(\alpha)}(t, x, \xi) D_x^\alpha (e^{-ix\xi} \times \\ \times v(t, x, \xi)) + r_N(t, x, \xi), \quad (2.29)$$

$$r_N(t, x, \xi) = e^{ix\xi} \int_{R^n} \int_{R^n} d\zeta \int_0^1 d\theta \frac{1}{\alpha!} R^{(\alpha)}(t, x, \xi + \theta\zeta) e^{i\zeta(x-y)} \times$$

$$\times \langle \zeta \rangle^{-2l} \langle D_y \rangle^{2l} D_y^\alpha (e^{-i\zeta y} v(t, y, \xi)), \quad |\alpha| = N, \quad \forall l \geq 0. \quad (2.30)$$

Заметив, далее, что (2.26) с новым γ_1 , пусть даже зависящим от N_1 , выполняется и при $t_3 \leq t \leq t_4$, $(x, \xi) \in \Gamma$, получаем, что если $d_j(t_3, x, \xi) \geq 0$, $j \geq r+1$, то при $t_3 \leq t \leq t_4$ для любого $N_1 > 0$

$$(\tilde{d}_j(t, x, D_x) - d_j(t, x, D_x)) v(t, x, \xi) = \tilde{r}_N(t, x, \xi) - \\ - r_N(t, x, \xi) = O(|\xi|^{-N_1}), \quad (2.31)$$

при соответствующем выборе N в (2.9), равномерно по $t, x \in R^n$.

Итак, для указанных $d_j(t, x, D_x)$ при $t \in [t_3, t_4]$

$$2 \operatorname{Re}(d_j(t, x, D_x) v(t, x, \xi), v(t, x, \xi)) = (C(t, D_x) v(t, x, \xi), v(t, x, \xi)) + \\ + O(|\xi|^{-N_1}) + \|B(t, x, D_x) v(t, x, \xi)\|_{L_x^2(R_x^n)}^2 >$$

$$\geq \frac{\delta_1}{2} \frac{\lambda(t)}{\Lambda(t) \nu(t)} \|v(t, x, \xi)\|_{L_x^2(R_x^n)}^2 + O(|\xi|^{-N_1}), \quad t \in [t_3, t_4], \quad (2.32)$$

что естественно назвать асимптотическим неравенством Гординга.

Аналогично доказываются оценки сверху при $t \in [t_3, t_4]$:

$$|(d_j(t, x, D_x) v(t, x, \xi), v(t, x, \xi))| \leq c \frac{\lambda(t)}{\Lambda(t) \nu(t)} \|v(t, x, \xi)\|_{L_x^2(R_x^n)}^2 + \\ + O(|\xi|^{-N_1}), \quad j = r+1, \dots, m, \quad (2.33)$$

$$|(d_j(t, x, D_x) v(t, x, \xi), v(t, x, \xi))| \leq o(1) \frac{\lambda(t)}{\Lambda(t) \nu(t)} \|v(t, x, \xi)\|_{L_x^2(R_x^n)}^2 + \\ + O(|\xi|^{-N_1}), \quad j = 1, \dots, r, \quad (2.34)$$

$$|(\tilde{F}(t, x, D_x) U(t, x, \xi), U(t, x, \xi))| \leq c \frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)} \|U(t, x, \xi)\|_{L_2(R_x^n)}^2 + O(|\xi|^{-N_1}), \quad (2.35)$$

$$|(\varepsilon(t, x, D_x) U(t, x, \xi), U(t, x, \xi))| \leq o(1) \frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)} \|U(t, x, \xi)\|_{L_2(R_x^n)}^2 + O(|\xi|^{-N_1}). \quad (2.36)$$

5⁰. Введем обозначение $\sigma_k = \text{sign } d_k(t, x, \xi)$, $k \geq r+1$, $t \geq t_3$, и рассмотрим форму

$$S(t, \xi) = \sum_{k=r+1}^m \sigma_k \|U_k(t, x, \xi)\|_{L_2(R_x^n)}^2 - \sum_{k=1}^r \|U_k(t, x, \xi)\|_{L_2(R_x^n)}^2, \quad (2.37)$$

где $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_m\}$. Тогда, в силу (2.24) имеем ($f_k = \tilde{F}_{kk}$)

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \sum_{k=r+1}^m \sigma_k 2 \text{Re}(U_k, U_k)_{L_2} - \sum_{k=1}^r 2 \text{Re}(U_k, U_k)_{L_2} = \\ &= \sum_{k=r+1}^m \sigma_k 2 \text{Re}(U_k, d_k U_k)_{L_2} + \sum_{k=r+1}^m \sigma_k 2 \text{Re}(U_k, f_k U_k)_{L_2} + \\ &\quad + \sum_{k=r+1}^m \sum_{l=1}^m \sigma_k 2 \text{Re}(U_k, \varepsilon_{kl} U_l)_{L_2} - \\ &\quad - \sum_{k=1}^r 2 \text{Re}(U_k, d_k U_k)_{L_2} - \sum_{k=1}^r 2 \text{Re}(U_k, f_k U_k)_{L_2} - \\ &\quad - \sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^m 2 \text{Re}(U_k, \varepsilon_{kl} U_l)_{L_2} + \\ &\quad + \sum_{k=r+1}^m \sigma_k 2 \text{Re}(U_k, R_{N_k})_{L_2} - \sum_{k=1}^r 2 \text{Re}(U_k, R_{N_k})_{L_2} > \\ &\geq \frac{\delta_1}{2} \frac{\lambda(t)}{\Lambda(t) \nu(t)} \sum_{k=r+1}^m \|U_k\|_{L_2}^2 - c \frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)} \sum_{k=r+1}^m \|U_k\|_{L_2}^2 - \\ &\quad - \sum_{k=1}^m o(1) \frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)} \|U_k\|_{L_2}^2 - o(1) \frac{\lambda(t)}{\Lambda(t) \nu(t)} \sum_{k=1}^r \|U_k\|_{L_2}^2 - \\ &\quad - O(|\xi|^{-N_1}) (\|U(t, x, \xi)\|_{L_2} + 1) \geq \\ &> \alpha \frac{\lambda(t)}{\lambda(t) \nu(t)} S(t, \xi) - O(|\xi|^{-N_1}) (\|U(t, x, \xi)\|_{L_2} + 1), \end{aligned}$$

т. е.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(S(t, \xi) \exp \left(-\alpha \int_{t_3}^t \frac{\lambda(\tau) \nu(\tau)}{\lambda(\tau) \nu(\tau)} d\tau \right) \right) &\geq -O(|\xi|^{-N_1}) (\|U(t, x, \xi)\|_{L_2} + 1) \times \\ &\times \exp \left(-\alpha \int_{t_3}^t \frac{\lambda(\tau) \nu(\tau)}{\lambda(\tau) \nu(\tau)} d\tau \right), \quad \alpha = \text{const} > 0, \quad t_3 < t, \end{aligned}$$

откуда

$$S(t, \xi) \geq \exp\left(a \int_{t_2}^t \frac{\lambda_1(\tau)}{\lambda(\tau) \nu(\tau)} d\tau\right) \left\{ S(t_2, \xi) - \int_{t_2}^t O(|\xi|^{-N_1}) \times \right. \\ \left. \times (|U(\tau, x, \xi)|_{L_1} + 1) \exp\left(-a \int_{t_2}^{\tau} \frac{\lambda_1(\sigma)}{\lambda(\sigma) \nu(\sigma)} d\sigma\right) d\tau \right\}, \quad t \geq t_2. \quad (2.38)$$

Принимая во внимание, что (2.26) выполняется и при $t \in [t_2, t_4]$, получаем

$$S(t, \xi) \geq \exp\left(a \int_{t_2}^t \frac{\lambda_1(s)}{\lambda(s) \nu(s)} ds\right) |S(t_2, \xi) - O(|\xi|^{-N_1})|. \quad (2.39)$$

Но $S(t_2, \xi) = \langle \xi \rangle^{-n_1} |\varphi(x)|_{L_1}^2 = \langle \xi \rangle^{-n_1}$, и поэтому

$$S(t, \xi) \geq \frac{1}{2} \langle \xi \rangle^{-n_1} \exp\left(a \int_{t_2}^t \frac{\lambda_1(s)}{\lambda(s) \nu(s)} ds\right), \quad t_2 < t \leq t_4. \quad (2.40)$$

Далее

$$N_1 \ln |\xi| \leq \int_{t_2}^{t_4} \frac{\lambda_1(s)}{\lambda(s) \nu(s)} ds \leq 2 N_1 \ln |\xi|, \quad (2.41)$$

так что $S(t_4, \xi) \geq \langle \xi \rangle^{-N_1 - \delta n_1 / 2}$, и следовательно,

$$|U(t_4, x, \xi)|_{L_2(R_x^n)}^2 > \frac{1}{2} \langle \xi \rangle^{-N_1 - \delta n_1}. \quad (2.42)$$

Неустойчивое решение для (0.1), (0.2) получаем, взяв первую компоненту вектора

$$U_{\text{неуст.}}(t, x, \xi) = H^{-1}(t) \bar{M}^*(t) N(t) E(t, 0) U(t, x, \xi), \quad (2.43)$$

где $H(t)$, $M(t)$, $N(t)$ описаны в § 2 [1], а матричный интегральный оператор Фурье $E(t, s)$ построен в § 4 [1] и имеет вид (4.31) [1]. Из (2.43) получаем

$$U(t, x, \xi) = E(0, t) N^*(t) M(t) H(t) U_{\text{неуст.}}(t, x, \xi) + O(|\xi|^{-N_1}),$$

откуда

$$\langle \xi \rangle^{-\epsilon N_1 - \delta n} < c \sum_{|\alpha| < p} |D_x^\alpha U_{\text{неуст.}}(t_4, x, \xi)|_{L_2(R_x^n)}^2. \quad (2.44)$$

Конечно указанные выше построения работы [1] следует проводить микролокально только в коническом множестве Γ , в конической окрестности фиксированного ранее вектора $\xi/|\xi|$. Вне этой окрестности выбор $E(t, s)$, $M(t)$, $H(t)$, $N(t)$ в значительной степени произволен.

6°. Выведем теперь из корректности задачи Коши априорную оценку, нарушение которой неустойчивым решением и доказывает теорему.

Из теоремы о замкнутом графике легко получаем, что если задача (0.1), (0.2) корректно поставлена в окрестности точки (t_0, x_0) в смысле определения 1, то для любого $p \geq 0$ существуют S_0 , $C_{(\epsilon, p, t_0, x_0)}$ такие, что

$$|u|_{p, 2}(t_0, x_0, \varepsilon_0) \leq C_{(s, p, t_0, x_0)} \|Lu\|_{s, 2}(t_0, x_0, \varepsilon_0) + \sum_{j=0}^{m-1} |D_j^t u|_{s, D}(t_0, x_0, \varepsilon_0), \quad (2.45)$$

где $\|\cdot\|_{s, 2}(t_0, x_0, \varepsilon_0)$, $\|\cdot\|_{s, D}(t_0, x_0, \varepsilon_0)$ есть равномерные нормы пространств $C^s(\Omega(t_0, x_0, \varepsilon_0))$, $C^s(D(t_0, x_0, \varepsilon_0))$, соответственно.

Введем обозначения $\Omega_\mu = \Omega(t_0, x_0, \mu^{-1})$, $\Omega_{\mu, \text{ус.}} = \Omega_\mu \cap \{t \leq t_0 + 1/(2\mu)\}$, $D_\mu = D(t_0, x_0, \mu^{-1})$.

Лемма 3. Пусть задача Коши (0.1), (0.2) корректно поставлена в окрестности точки (t_0, x_0) в смысле определения 1. Тогда для любого $p \geq 0$ существуют постоянные s_0, s_1, C_0 такие, что для любого $\mu > 1$ и любой функции $u \in C^\infty(\Omega_1)$

$$|u|_{p, \Omega_{\mu, \text{ус.}}} \leq C_0 \mu^{s_1} (\|Lu\|_{s_0, \Omega_{\mu, \text{ус.}}} + \sum_{j=0}^{m-1} |D_j^t u|_{s_0, D_\mu}). \quad (2.46)$$

Доказательство почти дословно совпадает с доказательством леммы 2.1 [5], по этой причине мы его здесь не приводим.

7°. Для завершения доказательства теоремы 1 остается только указать, что $t_0 = 0, x_0 = 0, \mu = 1/(2t_1(\xi))$, так что

$$(t_1^{-1}(\xi))^{s_1} \leq (t_1^{-1})^{s_1} \leq (\Lambda(t_1))^{-s_1} \leq \langle \xi \rangle^{s_1}. \quad (2.47)$$

При этом $\lambda_0 t_1(\xi) \geq \lambda_0 \Lambda^{1/2-1}(t_1(\xi)) \geq \lambda_0 (N \ln \langle \xi \rangle)^{1/2-1} \langle \xi \rangle^{-\delta}$ при подходящем выборе $\delta < 1/2$.

Необходимо также принять во внимание следующий легко проверяемый факт. Если $|x| > c|\xi|^{-\delta}$, $\delta < 1/2, c = \text{const} > 0$, то при $t \leq t_1(\xi)$

$$A(t, x, D_x)u(t, x, \xi) = O(\xi^{-N_1}), \quad \forall N_1 \geq 0 \quad (2.48)$$

для любого интегрального оператора Фурье, а, в частности, для любого псевдодифференциального оператора $A(t, x, D_x)$.

Таким образом, для неустойчивого решения $U_{\text{неуст.}}(t, x, \xi)$ при достаточно больших N из (2.9), $N_1, |\xi|$ нарушается оценка (2.46). Теорема 1 в случае $s = 0$ доказана.

§ 3. Окончание доказательства теоремы 1. Случай $s = T$

1°. Предварительно выведем из корректности задачи в смысле определения 2 априорную оценку. Из теоремы о замкнутом графике следует, что для любого $p \geq 0$ существуют s_0, C^0 такие, что для любой функции $u \in C^\infty(\Omega_-(x_0, t_0, \varepsilon_0))$

$$|u|_{p, \Omega_-(x_0, t_0, \varepsilon_0)} \leq C^0 (\|Lu\|_{s_0, \Omega_-(x_0, t_0, \varepsilon_0)} + \sum_{j=0}^{m-1} |D_j^t u|_{s_0, D_-(x_0, t_0, \varepsilon_0)}).$$

Введем обозначения: $\Omega_\mu^- = \Omega_-(x_0, t_0 + \mu^{-1}, \varepsilon_0 - \mu^{-1})$, $D_\mu^- = \Omega_\mu^- \cap \{t = t_0 + \varepsilon_0\}$, $\Omega_{\mu, \text{ус.}}^- = \Omega_\mu^- \cap \{t \geq t_0 + 2\mu^{-1}\}$.

Лемма 4. Для любого $p \geq 0$ существуют постоянные s_0, C_0 такие, что для любого $\mu \geq 2$ и любой функции $u \in C^\infty(\Omega_-(x_0, t_0, \varepsilon_0))$

$$|u|_{p, \Omega_{\mu, \text{ус.}}^-} \leq C_0 (\|Lu\|_{s_0, \Omega_{\mu, \text{ус.}}^-} + \sum_{j=0}^{m-1} |D_j^t u|_{s_0, D_\mu^-}). \quad (3.1)$$

Доказательство. Предположим, что для каждого μ существует u_μ такая, что

$$|u_\mu|_{\rho, \Omega_{\mu, \text{ус}}^-} \geq \mu (|Lu_\mu|_{s_0, \Omega_{\mu, \text{ус}}^-} + \sum_{j=0}^{m-1} |D^j u_\mu|_{s_j, D_{\mu}^-}).$$

Ясно, что можно считать $|u_\mu|_{\rho, \Omega_{\mu, \text{ус}}^-} = 1$. Положим $f_\mu = Lu_\mu$ и $\Psi_{j, \mu} = D^j u_\mu(t_0 + \varepsilon_0, x)$. Можно продолжить f_μ и $\Psi_{j, \mu}$ на $\Omega_-(x_0, t_0, \varepsilon_0)$ и $D_-(x_0, t_0, \varepsilon_0)$ так, чтобы для их продолжений $\tilde{f}_\mu, \tilde{\Psi}_{j, \mu}$ выполнялись неравенства

$$|\tilde{f}_\mu|_{s_0, \Omega_-(x_0, t_0, \varepsilon_0)} \leq M |f_\mu|_{s_0, \Omega_{\mu, \text{ус}}^-},$$

$$|\tilde{\Psi}_{j, \mu}|_{s_j, D_-(x_0, t_0, \varepsilon_0)} \leq M |\Psi_{j, \mu}|_{s_j, D_{\mu}^-},$$

где M не зависит от μ . В самом деле, если, например, $t_0 + \varepsilon_0 = 1$, $g \in C^s(D_{\mu}^-)$, то, осуществив переход к полярным координатам в области $D_{\mu}^- = \{(r, \omega); 0 \leq r \leq 1 - \mu^{-1}, \omega \in S^{s-1}\}$, полагаем

$$\tilde{g}(r, \omega) = \begin{cases} g(r, \omega), & 0 \leq r \leq 1 - \mu^{-1}, \\ \sum_{i=1}^{s_0+1} a_i g(1 - \mu^{-1} - \frac{i}{s_0+1}(r - 1 + \mu^{-1}), \omega), & 1 - \mu^{-1} < r \leq 1, \end{cases}$$

где постоянные a_i выбраны так, что $\sum_{i=1}^{s_0+1} a_i \left(-\frac{i}{s_0+1}\right) = 1, j = 0, \dots, s_0$.

Функция f_μ продолжается сначала очевидным образом на полный конус Ω_{μ}^- , а затем и на $\Omega_-(x_0, t_0, \varepsilon_0)$ с помощью преобразования $(x, t) \rightarrow (r, \omega, \tau)$, где $r = |x|$, $\tau = t + r - \mu^{-1}$. Очевидно, что решение и соответствующей задаче Коши согласно определению 2 совпадает с u_μ в $\Omega_{\mu, \text{ус}}^-$, так что $|u_\mu|_{\rho, \Omega_{\mu, \text{ус}}^-} > 1$. Оставшиеся рассуждения очевидны. Лемма доказана.

2°. Рассмотрим теперь решения систем (2.10), (2.11) с начальными условиями

$$U_0(t_0, x, \xi) = {}^t(0, \dots, 0, \Phi(x < \xi >^{-\delta}), 0), \quad (3.2)$$

$$U_n(t_0, x, \xi) = 0, \quad n = 1, \dots, N, \quad (3.3)$$

где t_0 определяется из условия

$$N_0 \ln \lambda(t_0) = -\nu(t_0) \ln |\xi|, \quad \text{где } N_0 = \text{const} > 0. \quad (3.4)$$

Легко видеть, что

$$|D_x^\alpha U_n(t, x, \xi)| \leq C_{n, \alpha, \delta} (\ln < \xi >)^n < \xi >^{\delta(|\alpha| + n) - n + \gamma_1}, \quad t_0 \leq t \leq T. \quad (3.5)$$

$$|D_x^\alpha (e^{-x\xi} U(t, x, \xi))| \leq C_{\alpha, \delta} < \xi >^{\delta|\alpha| + \gamma_2}, \quad t_0 \leq t \leq T, \quad (3.6)$$

что является следствием того факта, что с некоторой постоянной $\gamma_2 > 0$

$$\int_{t_0}^T |d_h(t, x, \xi)| dt \leq c \int_{t_0}^T \frac{\lambda(t)}{\Lambda(t) \nu(t)} dt \leq \gamma_2 \ln |\xi|, \quad (x, \xi) \in \Gamma. \quad (3.7)$$

Если теперь t_5 определить из условия

$$\frac{\ln \lambda(t_6)}{\nu(t_6)} - \frac{\ln \lambda(t_5)}{\nu(t_5)} = 2 N_5 \ln |\xi|, \quad N_5 = \text{const} > 0, \quad (3.8)$$

то ясно, что

$$|D_x^n U_n(t, x, \xi)| \leq C_{n, \alpha, \delta} (\ln \langle \xi \rangle)^n \langle \xi \rangle^{\delta(|n| + n) - n + \gamma}, \quad t_5 \leq t \leq t_6, \quad (3.9)$$

$$|D_x^n (e^{-Lx} U(t, x, \xi))| \leq C_{n, \delta} \langle \xi \rangle^{\delta(|n| + \gamma)}, \quad t_5 \leq t \leq t_6. \quad (3.10)$$

С другой стороны, для формы $S_-(t, \xi) = -S(t, \xi)$ (см. (2.37)) при $t \in [t_5, t_6]$ легко получаем

$$\frac{dS_-(t, \xi)}{dt} \leq -\alpha \frac{\lambda_1(t)}{\lambda(t) \nu(t)} S_-(t, \xi) + O(|\xi|^{-N_1}) (\|U(t, x, \xi)\|_{L_x(R_x^n)} + 1),$$

откуда при достаточно большом N из (2.9) выводим

$$S_-(t_6, \xi) \geq \frac{1}{2} \langle \xi \rangle^{-\delta n} \exp\left(\alpha \int_{t_5}^{t_6} \frac{\lambda_1(t)}{\lambda(t) \nu(t)} dt\right) \geq \frac{1}{2} \langle \xi \rangle^{\alpha N_1 - \delta n}, \quad (3.11)$$

и, следовательно

$$|U(t_6, x, \xi)| \geq \frac{1}{2} \langle \xi \rangle^{\alpha N_1 - \delta n}, \quad \alpha = \text{const} > 0. \quad (3.12)$$

3°. Укажем, наконец, что $t_0 = 0$, $x_0 = 0$, $\varepsilon_0 = T$, $\mu = 2/t_5$, и что

$$\frac{\langle \xi \rangle^{-\delta}}{t_6 - \mu^{-1}} = 2 \frac{\langle \xi \rangle^{-\delta}}{2t_6 - t_6} \leq 2 \frac{\langle \xi \rangle^{-\delta}}{t_6} \leq 2 \frac{\langle \xi \rangle^{-\delta}}{t_5} \leq 2 \frac{1}{(N \ln \langle \xi \rangle)^\delta}, \quad (3.13)$$

при подходящем выборе $\delta < 1/2$, так что правая часть (3.13) стремится к 0 при $|\xi| \rightarrow \infty$. Дальнейшие рассуждения почти дословно совпадают с соответствующими рассуждениями доказательства теоремы в случае $s=0$, и по этой причине мы их не приводим. Отметим только, что построенное неустойчивое решение

$$U_{\text{неуст.}}(t, x, \xi) = H^{-1}(t) M^*(t) N(t) E(t, T) U(t, x, \xi) \quad (3.14)$$

нарушает априорную оценку (4.1). Теорема 1 полностью доказана.

§ 4. Доказательство теоремы 2

Поскольку многие технические детали доказательства теоремы 2 совпадают с уже описанными и использованными в доказательстве теоремы 1, мы опустим часть из них.

1°. Обозначим через t_i , $i=1, 2$, решения уравнений: ($N_1=1$, $N_2 = \text{const} > 0$)

$$|\xi| \Lambda(t) = -N_i \nu^*(t) \ln \lambda(t), \quad \text{где } \alpha = 1/(m - \tilde{j} - \tilde{k}). \quad (4.1)$$

Запишем уравнение (0.1) в виде системы

$$|D_x^{\beta} D_t^{\alpha} D_i^k B_2(t, x, \xi)| \leq C_{\alpha, \beta, k} \langle \xi \rangle^{-|\alpha|+k} \sqrt[1+|\xi| \lambda^m(t) \left(\frac{|\ln \lambda(t)|}{\Delta(t)} \right)^{m-1}}. \quad (4.5)$$

2°. Перепишем (4.4) в виде (2.1) $c - iR = B_1 + B_2 + iNN_i^{\#}$, и решим системы (2.10), (2.11) с начальными условиями

$$U_0(t_1, x, \xi) = {}^{ir}(0, \dots, 0, \varphi(x < \xi >^{\delta})), \quad (4.6)$$

$$U'_n(t_1, x, \xi) = 0, \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (4.7)$$

Очевидно, что при $(x, \xi) \in \Gamma$ имеют место неравенства, аналогичные (2.25), (2.26):

$$|D_x^{\alpha} D_t^k (e^{-\lambda x^{\epsilon}} U(t, x, \xi))| \leq C_{\alpha, k} \langle \xi \rangle^{\delta|\alpha| + \gamma_l + k}, \quad t \leq t_1, \quad (4.8)$$

$$|D_x^{\beta} R_N(t, x, \xi)| \leq C_{\alpha, \delta, N, \beta} \langle \xi \rangle^{|\beta| - (N+1)(1-2\delta) + \gamma_l + \epsilon}, \quad t \leq t_1. \quad (4.9)$$

3°. Введем обозначение $\sigma_l = -\text{sign}(\text{Im } \Delta_l)$, $l = r+1, \dots, m-j$, и для функции $U(t, x, \xi)$ рассмотрим форму

$$S(t, \xi) = - \sum_{l=1}^{\widehat{j+r}} |U_l(t, x, \xi)|_{L_2(R_x^n)}^2 + \sum_{l=\widehat{j+r+1}}^m \sigma_{l-j} |U_l(t, x, \xi)|_{L_2(R_x^n)}^2.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{dS(t, \xi)}{dt} &= - \sum_{l=1}^{\widehat{j+r}} 2 \text{Re}(U_l, U_{ll}) + \sum_{l=\widehat{j+r+1}}^m \sigma_{l-j} 2 \text{Re}(U_l, U_{ll}) = \\ &= - \sum_{l=\widehat{j+1}}^{\widehat{j+r}} 2 \text{Re}(U_l, i(B_1)_{ll} U_l) - \sum_{l=1}^{\widehat{i+r}} 2 \text{Re}(U_l, (iB_2)_{ll} U_l) + \\ &+ \sum_{l=1}^{\widehat{j+r}} 2 \text{Re}(U_l, (NN_i^{\#} U)_l) - \sum_{l=1}^{\widehat{j+r}} 2 \text{Re}(U_l, iR_{Nl}) + \\ &+ \sum_{l=\widehat{j+r+1}}^m \sigma_{l-j} 2 \text{Re}(U_l, i\Delta_{l-j} U_l) + \sum_{l=\widehat{j+r+1}}^m \sigma_{l-j} 2 \text{Re}(U_l, (iB_2)_{ll} U_l) - \\ &- \sum_{l=\widehat{j+r+1}}^m \sigma_{l-j} 2 \text{Re}(U_l, (NN_i^{\#} U)_l) + \sum_{l=\widehat{j+r+1}}^m \sigma_{l-j} 2 \text{Re}(U_l, R_{Nl}). \quad (4.10) \end{aligned}$$

Нам придется оценивать нормы сверху, поэтому приведем пример такой оценки в зоне $t_1 \leq t \leq t_2$:

$$|(U_l, (B_2)_{lk} U_k)| \leq |U_l| \sqrt{(B_{2lk}^* B_{2lk} U_k, U_l)}.$$

Но (см. (4.5), (4.13))

$$|(B_2)_{lk}(t, x, \xi)| < \frac{c}{2} (1 + N_2^{1/m} \rho(t)), \quad \text{где } \rho(t) = \frac{\lambda(t)}{\Delta(t)} |\ln \lambda(t)| v^{1/m}(t),$$

и поэтому с некоторым оператором T

$$- \tilde{B}_{2_{ik}}^1 \tilde{B}_{2_{ik}} + c^2 (1 + \bar{\rho}(t, D_x))^2 - T^* T \in \Psi^{-N_2},$$

где $\bar{\rho}(t, D_x)$, $\tilde{B}_{2_{ik}}$ — продолжения $N_2^{l/m} \rho(t)$, $B_{2_{ik}}(t, x, \xi)$ на все $[0, T] \times \times R^{2n}$. Поэтому при $t_1 \leq t \leq t_2$ имеем

$$\begin{aligned} (B_{2_{ik}}^1 B_{2_{ik}} U_k, U_k) &= (\tilde{B}_{2_{ik}}^1 \tilde{B}_{2_{ik}} U_k, U_k) + O(|\xi|^{-N_2}) = \\ &= (c^2 (1 + \bar{\rho}(t, D_x))^2 U_k, U_k) - (T^* T U_k, U_k) + O(|\xi|^{-N_2}) \leq \\ &\leq (c^2 (1 + \tilde{\rho}(t, D_x))^2 U_k, U_k) + O(|\xi|^{-N_2}) = \\ &= c^2 (1 + N_2^{l/m} \rho(t))^2 |U_k(t, x, \xi)|_{L_2(R_x^n)}^2 + O(|\xi|^{-N_2}), \end{aligned}$$

откуда

$$|(U_l, (B_2)_{ik} U_k)| \leq c (1 + N_2^{l/m} \rho(t)) \sum_{l=1}^m \|U_l(t, \xi)\|_{L_2(R_x^n)}^2 + O(|\xi|^{-N_2}).$$

Аналогично

$$|(U_l, (NN_i^*)_{ik} U_k)| \leq c \left(1 + \frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)}\right) \sum_{l=1}^m \|U_l(t, \xi)\|_{L_2(R_x^n)}^2 + O(|\xi|^{-N_2}).$$

Таким образом

$$\begin{aligned} &\left| - \sum_{l=1}^{j+r} 2 \operatorname{Re}(U_l, (iB_2 U)_l) - \sum_{l=1}^{j+r} 2 \operatorname{Re}(U_l, (NN_i^* U)_l) + \right. \\ &+ \sum_{l=\widehat{j+r+1}}^m \sigma_{l-\widehat{j}} 2 \operatorname{Re}(U_l, (iB_2 U)_l) + \sum_{l=\widehat{j+r+1}}^m \sigma_{l-\widehat{j}} 2 \operatorname{Re}(U_l, (NN_i^* U)_l) \left. \right| \leq \\ &\leq c \left(1 + N_2^{l/m} \rho(t) + \frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)}\right) \sum_{l=1}^m \|U_l(t, x, \xi)\|_{L_2(R_x^n)}^2 + O(|\xi|^{-N_2}). \quad (4.11) \end{aligned}$$

Следовательно

$$\begin{aligned} \frac{dS(t, \xi)}{dt} &> \sum_{l=\widehat{j+r+1}}^m (2 \operatorname{Re}(i\sigma_{l-\widehat{j}} \Delta_{l-\widehat{j}}) U_l, U_l) - \sum_{l=\widehat{j+1}}^{j+r} (2 \operatorname{Re}(i\Delta_{l-\widehat{j}}) U_l, U_l) - \\ &- c \left(1 + N_2^{l/m} \rho(t) + \frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)}\right) \sum_{l=1}^m \|U_l(t, x, \xi)\|_{L_2(R_x^n)}^2 + O(|\xi|^{-N_2}). \quad (4.12) \end{aligned}$$

Далее, при $t_1 \leq t \leq t_2$ имеем

$$|\xi| \leq v^a(t) \frac{|\ln \lambda(t)|}{\Lambda(t)} (1 + N_2), \quad |\xi| \geq v^z(t) \frac{|\ln \lambda(t)|}{\Lambda(t)}, \quad (4.13)$$

откуда

$$\lambda(t) \frac{|\ln \lambda(t)|}{\Lambda(t)} \leq \sqrt[m-\widehat{j}]{|\xi|^{m-\widehat{k}-\widehat{j}} \lambda^{m-\widehat{j}}(t) \left(\frac{|\ln \lambda(t)|}{\Lambda(t)}\right)^{\widehat{k}} \cdot \frac{1}{v(t)}}, \quad (4.14)$$

$$\chi(t) \frac{|\ln \lambda(t)|}{\Lambda(t)} \geq (1 + N_2) \sqrt[m-\widehat{j}]{|\xi|^{m-\widehat{k}-\widehat{j}} \lambda^{m-\widehat{j}}(t) \left(\frac{|\ln \lambda(t)|}{\Lambda(t)}\right)^{\widehat{k}} \cdot \frac{1}{v(t)}}, \quad (4.15)$$

Очевидно также, что

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\lambda(t) |\ln \Delta(t)|}{\Lambda(t)} dt \geq \frac{1}{2} (\ln^2 \Lambda(t)) \Big|_{t_1}^{t_2} =$$

$$= -\frac{1}{2} (\ln \Lambda(t_2) + \ln \Lambda(t_1)) \ln \frac{N_2 v^*(t_2) |\ln \Lambda(t_2)|}{v^*(t_1) |\ln \Lambda(t_1)|}.$$

Из условия (0.13) следует, что для любого N_2 при достаточно больших M , с постоянной c_1 не зависящей от N_2 , ξ для всех $\xi \in R^n$, $|\xi| > M$, справедливо

$$c_1 \ln \Lambda(t_1) \leq \ln |\xi| \leq 3 |\ln \Lambda(t_2)|,$$

и, следовательно

$$\int_{t_1}^{t_2} \lambda(t) \frac{|\ln \lambda(t)|}{\Lambda(t)} dt \geq \gamma_1 (\ln N_2) \ln |\xi|, \text{ где } \gamma_1 = \text{const} > 0. \quad (4.16)$$

Рассмотрим теперь первые два из слагаемых в правой части (4.12):

$$G = \sum_{l=\widehat{j+r+1}}^m (2 \operatorname{Re}(i\sigma_{l-\widehat{j}} \Delta_{l-\widehat{j}})) U_l, U_l - \sum_{l=\widehat{j+1}}^{\widehat{j+r}} (2 \operatorname{Re}(i\Delta_{l-\widehat{j}})) U_l, U_l.$$

Пусть $\rho_l(t, x, D_x)$ — оператор, для которого при $t_1 \leq t \leq t_2$, $(x, \xi) \in \Gamma$, $|\xi| > \text{const}$,

$$\rho_l(t, x, \xi) = \sqrt[2(m-\widehat{j})]{|\xi|^{m-\widehat{k}-\widehat{j}} \lambda^{m-\widehat{j}}(t) \left(\frac{|\ln \lambda(t)|}{\Lambda(t)} \right)^k \frac{|b(t, x, \xi)|}{v(t)}} > 0,$$

тогда

$$G \geq \sum_{l=\widehat{j+r+1}}^m (2 \operatorname{Re}(i\sigma_{l-\widehat{j}} Z_{l-\widehat{j}})) \rho_l U_l, \rho_l U_l -$$

$$- \sum_{l=\widehat{j+1}}^{\widehat{j+r}} (2 \operatorname{Re}(iZ_{l-\widehat{j}})) \rho_l U_l, \rho_l U_l -$$

$$- c \sum_{l=\widehat{j+1}}^m \|U_l(t, x, \xi)\|_{L_2(R_x^n)}^2 - O(|\xi|^{-N_3}) \geq$$

$$> \frac{\varepsilon}{2} \sum_{l=\widehat{j+r+1}}^m (\rho_l U_l, \rho_l U_l) - \varepsilon \sum_{l=\widehat{j+1}}^{\widehat{j+r}} (\rho_l U_l, \rho_l U_l) -$$

$$- c \sum_{l=\widehat{j+1}}^m \|U_l(t, x, \xi)\|_{L_2(R_x^n)}^2 - O(|\xi|^{-N_3}), \quad \forall N_3 > 0,$$

где постоянная ε может быть выбрана сколь угодно малой за счет сужения Γ и увеличения $|\xi|$. Итак

$$\begin{aligned}
 G &\geq \frac{\delta}{2} \frac{\lambda(t) |\ln \lambda(t)|}{\Lambda(t)} \left(\sum_{l=\widehat{j+r+1}}^m \|U_l(t, x, \xi)\|_{L_2(R_x^n)}^2 - \right. \\
 &\quad \left. - \varepsilon N_2 \widehat{m}^{-\widehat{j}} \sum_{l=\widehat{j+1}}^{\widehat{j+r}} \|U_l(t, x, \xi)\|_{L_2(R_x^n)}^2 \right) - \\
 &\quad - c \sum_{l=\widehat{j+1}}^m \|U_l(t, x, \xi)\|_{L_2(R_x^n)}^2 - O(|\xi|^{-N_2}).
 \end{aligned}$$

Так как выбор N_2 диктуется только потерей гладкости из (2.46), то, благодаря свободе в выборе ε , для каждого N_2 можно добиться выполнения

неравенства $\varepsilon N_2 \widehat{m}^{-\widehat{j}} < 1/2$, и, следовательно

$$\begin{aligned}
 G &\geq \frac{\delta}{4} \frac{\lambda(t) |\ln \lambda(t)|}{\Lambda(t)} \left(\sum_{l=\widehat{j+r+1}}^m \|U_l(t, x, \xi)\|_{L_2(R_x^n)}^2 - \right. \\
 &\quad \left. - \sum_{l=\widehat{j+1}}^{\widehat{j+r}} \|U_l(t, x, \xi)\|_{L_2(R_x^n)}^2 \right) - c \sum_{l=\widehat{j+1}}^m \|U_l(t, x, \xi)\|_{L_2(R_x^n)}^2 - \\
 &\quad - O(|\xi|^{-N_2}), \quad \forall N_2 > 0.
 \end{aligned} \tag{4.17}$$

Окончательно, при $t_1 \leq t \leq t_2$

$$\begin{aligned}
 \frac{dS(t, \xi)}{dt} &\geq \frac{\delta}{4} \frac{\lambda(t) |\ln \lambda(t)|}{\Lambda(t)} \left(\sum_{l=\widehat{j+r+1}}^m \|U_l(t, x, \xi)\|_{L_2(R_x^n)}^2 - \right. \\
 &\quad \left. - \sum_{l=\widehat{j+1}}^{\widehat{j+r}} \|U_l(t, x, \xi)\|_{L_2(R_x^n)}^2 \right) - c \left(1 + N_2^m \rho(t) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)} \right) \sum_{l=1}^m \|U_l(t, x, \xi)\|_{L_2(R_x^n)}^2 - O(|\xi|^{-N_2}), \quad \forall N_2 > 0,
 \end{aligned}$$

и при фиксированном N_2 при достаточно больших M , $|\xi| > M$, для любого $N_3 > 0$,

$$\frac{dS(t, \xi)}{dt} \geq \gamma \frac{\lambda(t) |\ln \lambda(t)|}{\Lambda(t)} S(t, \xi) - O(|\xi|^{-N_3}), \quad t_1 < t \leq t_2,$$

откуда

$$S(t, \xi) > \frac{1}{2} \langle \xi \rangle^{-\varepsilon N_3} \exp \left(\alpha \int_{t_1}^t \frac{\lambda(s) |\ln \lambda(s)|}{\Lambda(s)} ds \right), \quad t_1 \leq t \leq t_2,$$

и потому

$$\sum_{l=1}^m \|U_l(t_2, x, \xi)\|_{L_2(R_x^n)}^2 \geq S(t_2, \xi) \geq \frac{1}{2} \langle \xi \rangle^{\alpha \gamma (\ln N_3) - \varepsilon N_3}. \tag{4.18}$$

Неустойчивое решение $U_{нзуст}(t, x, \xi)$ для (0.1), (0.2), нарушающее оценку (2.45) получаем, взяв первую компоненту вектора $\mu = 1/(2t_2)$. $N^z(t, x, D_x) U(t, x, \xi)$.

4". Укажем, наконец, что в (2.46) выбирается $t_0 = 0, x_0 = 0, \mu = 1/(2t_2)$. При этом принимается во внимание то, что из условия стремления к нулю при $t \rightarrow 0$ правой части (0.12), при подходящем выборе $\varepsilon > 0$

$$t \geq c \left(\frac{\Lambda(t)}{v^*(t) |\ln \lambda(t)|} \right)^{1/2-\varepsilon}, \quad c > 0,$$

откуда

$$t_0 t_2 \geq c \lambda_0 N_2^{1/2-\varepsilon} \langle \xi \rangle^{-\delta}, \quad 0 < \delta = \frac{1}{2} - \varepsilon < \frac{1}{2}. \quad (4.19)$$

Теорема 2 доказана.

5°. О б о б щ е н и я. Предложенный выше метод вместе с методами работы [1] позволяет получать условия корректности задачи Коши и для более широкого класса гиперболических операторов с кратными характеристиками. В частности, опишем случай слияния к нулю с разными скоростями характеристических корней λ_i .

Предположим, что

$$\lambda_i(t, x, \xi) = \lambda_i(t) \tilde{\lambda}_i(t, x, \xi),$$

где $\lambda_i \in C^\infty(J)$, $\lambda_i(0) = 0, \lambda_i(t) > 0$, при $t > 0, c_1 \lambda_i(t)/\Lambda_i(t) \leq \lambda_i/\lambda_i(t) < c_0 \lambda_i(t)/\Lambda_i(t), |\lambda_i^{(k)}(t)| \leq c_k (\lambda_i(t)/\lambda_i(t))^{k-1} \lambda_i'(t)$, где $c_1 > (m-1)/m$,

$$\Lambda_i(t) = \int_0^t \lambda_i(s) ds, \quad i = 1, \dots, m \text{ и}$$

$$\lambda_i(t)/\lambda_i(t) \leq \lambda_{i+1}(t)/\lambda_{i+1}(t), \quad \lambda_{i+1}(t) \leq c \lambda_i(t), \quad t \in J^0.$$

Если $\lim_{t \rightarrow 0} \lambda_{k+1}(t)/\lambda_k(t) \neq 0$, то мы будем считать, что $\lambda_{k+1}(t) \equiv \lambda_k(t)$.

Предположим далее, что при всех $t \in J, \xi \in R^n \setminus 0, x \in R^n$,

$$|\tilde{\lambda}_l(t, x, \xi) - \tilde{\lambda}_r(t, x, \xi)| \geq \delta |\xi|, \quad \delta = \text{const} > 0, \quad l \neq r,$$

и что младшие члены оператора удовлетворяют условиям

$$|D_t^k D_x^\beta a_{j, \alpha}(t, x)| \leq C_{k, \beta} \left(\prod_{l=1}^{m-j} \lambda_l(t) \right) \left(\prod_{l=|\alpha|+1}^{m-j} \frac{|\ln \lambda_l(t)|}{\Lambda_l(t)} \right) \left(\frac{\lambda_{m-j}(t)}{\Lambda_{m-j}(t)} \right)^k, \quad (4.20)$$

$$|D_t^k D_x^\beta \text{Im } a_{m-1-|\alpha|, \alpha}(t, x)| \leq C_{k, \beta} \left(\prod_{l=1}^{|\alpha|} \lambda_l(t) \right) \left(\frac{\lambda_{|\alpha|}(t)}{\Lambda_{|\alpha|}(t)} \right)^{k+1}, \quad (4.21)$$

при всех $j, \alpha, |\alpha| > 0, j + |\alpha| \leq m-1$, и условию

$$|D_t^k D_x^\beta a_{j, \alpha}(t, x)| \leq C_{k, \beta} \frac{\lambda_1(t) \cdots \lambda_{m-j}(t)}{\Lambda_{|\alpha|+1}(t) \cdots \Lambda_{m-j}(t)} \left(\frac{\lambda_{m-j}(t)}{\Lambda_{m-j}(t)} \right)^k, \quad (4.22)$$

при $\lambda_{|\alpha|+1}(t) \neq \lambda_{|\alpha|}(t), j = 0, \dots, m-2-|\alpha|$. Тогда параметрикс задачи (0.1), (0.2) (при достаточно малых T) строится методами работ [1], [2], что, например, доказывает достаточность указанных условий для

C^∞ -корректности задачи Коши. Необходимость этих условий формулируется и доказывается аналогично теоремам 1, 2. Ввиду громоздкости упомянутых результатов мы их здесь не приводим.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 23.VI.1987

Կ. Հ. ՅԱԴՋՅԱՆ. Կոշի խնդրի կորեկտության անհրաժեշտ պայմանները բազմապատիկ բնութագրչենքով օպերատորների համար (ամփոփում)

Հոդվածում ստամանաիրված են օպերատորներ, որոնց գլխավոր սիմվոլի արմատները համընկնում են ժամանակի որոշակի պահին: Ճանր կարգի ածանցյալների գործակիցների վրա պայմանները ձևակերպված են, ինչպես բացահայտ տեսքով, այնպես էլ լրիվ սիմվոլի արմատների միջոցով: Երբ վերահիշյալ պայմանները բավարարված են [1]-ում կառուցված է Կոշի խնդրի ֆունդամենտալ լուծումը: Ներկա հոդվածում ապացուցված է այդ պայմանների անհրաժեշտությունը C^∞ -կորեկտության համար:

K. H. YAGDJIAN. On the Cauchy problem for operators with multiple characteristics (summary)

The paper deals with the operators whose characteristics coincide at certain time instant. The lower order terms satisfy some conditions given both in terms of the explicit form and in terms of the roots of the full symbol. For such operators the fundamental solutions of the Cauchy problem had been constructed in [1]. The paper proves that the mentioned conditions are also necessary for the C^∞ -well-posedness of the Cauchy problem.

ЛИТЕРАТУРА

1. К. А. Ягджян. Псевдодифференциальные операторы с параметром и фундаментальное решение задачи Коши для операторов с кратными характеристиками, Изв. АН АрмССР, «Математика», 21, № 4, 1986, 317—344 (Engl. transl. Soviet J. of Contemporary Math. Anal., 1986, v. 21, № 4, 1—29).
2. К. А. Ягджян. Необходимые и достаточные условия корректности задачи Коши для операторов с кратными характеристиками, Изв. АН АрмССР, «Математика», 20, № 1, 1985, 3—25 (Engl. transl.: Soviet J. of Contemporary Math. Anal., 1985, v. 20, № 1, 1—23).
3. L. Hörmander. The Analysis of linear partial differential operators, III. Pseudodifferential operators, Berlin, Springer, 1985.
4. S. Nakane. Uniqueness and non-uniqueness in the Cauchy problem for a class of operators of degenerate type, II, Proc. Japan Acad., v. 59A, № 7, 1983, 318—320.
5. K. Kajitani. Strongly hyperbolic systems with variable coefficients, Publ. RIMS, Kyoto Univ., v. 8, № 3, 1974, 597—612.
6. В. Я. Иврий, В. М. Петков. Необходимые условия корректности задачи Коши для нестрого гиперболических уравнений, УМН, 29, вып. 5, 1974, 3—70.
7. N. Iwasaki. The Cauchy problem for hyperbolic equations with double characteristics, Publ. RIMS, Kyoto Univ., v. 19, № 3, 1983, 927—942.
8. Л. Р. Волевич, В. Я. Иврий. Гиперболические уравнения (комментарий к работам № 1, 3), в кн. Петровский И. Г., Избранные труды. Системы уравнений с частными производными. Алгебраическая геометрия, Москва, «Наука», 1986, 395—418.
9. S. Nakane. Non-uniqueness in the Cauchy problem for partial differential operators with multiple characteristics, II, Publ. RIMS, Kyoto Univ., v. 21, № 4, 1985, 699—717.
10. А. Б. Нерсисян. О необходимых условиях корректности задачи Коши для слабогиперболических уравнений (в печати).
11. О. А. Олейник, Е. В. Радкевич. Уравнения второго порядка с неотрицательной характеристической формой, «Итоги науки», М., 1971.