ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XXIII, № 5, 1988 Математика

УДК 517.53

М. М. ДЖРБАШЯН

О БАЗИСНОСТИ СИСТЕМ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ, ПОРОЖДЕННЫХ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕЙ В КОМПЛЕКСНОЙ ОБЛАСТИ

§ 0. Введение

В работе автора [1] приводились решения двух неординарных краевых задач A и $\tilde{A}$ для особого рода интегродифференциального уравнения дробного порядка в комплексной области. Доказывалось, что указанные задачи порождают отличные друг от друга последовательности собственных чисел $\{\lambda_k\}_0^\infty$, а также системы собственных функций

$$\{E_{3/2}(\lambda_n z, \mu) z^{\mu-1}\}_0^\infty \tag{0.1}$$

на совокупности трех отрезков

$$\nabla(\sigma) = \bigcup_{j=-1}^{1} \nabla_j(\sigma), \ \nabla_j(\sigma) = \{z = re^{ij\frac{2\pi}{3}} : 0 \leqslant r \leqslant \sigma^{2/3}\} \ (j = -1, 0, 1). \tag{0.2}$$

При этом, собственные числа $\{\lambda_k\}_0^\infty$ этих задач явились простыми корнями функции

$$e_\sigma(z, \nu) \equiv E_{1/2}(\sigma^2 \lambda^0, 1 + \nu) \ (0 \leqslant \nu < 2) \tag{0.3}$$

(кроме числа $\lambda_0 = 0$), где, как всегда

$$E_\rho(z, \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\mu + n/\rho)} \tag{0.4}$$

— целая функция типа Миттаг-Леффлера порядка ρ.

В заключение этой статьи устанавливалось, что системы собственных функций обеих краевых задач A и $\tilde{A}$ (совместно с присоединенной функцией в случае задачи $\tilde{A}$) полны в классе функций $X(z)$ $(z \in \nabla(\sigma))$, подчиненных условию

$$\int_{\Gamma(\sigma)} |X(z)|^2 |z|^{-1/2} |dz| < +\infty. \tag{0.5}$$

В §§ 1, 2 настоящей статьи излагается построение систем функций, биортогональных с весом $|z|^{1/2}$ на $\nabla(\sigma)$ с системой собственных функций задачи A и системой собственных функций задачи $\tilde{A}$ с добавлением присоединенной функции

$$\frac{z^{3\mu/2}}{\Gamma(\mu+2/3)}=\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[E_{3/2}(\lambda z,\ \mu)\, z^{\frac{3\mu}{2}-1}\right]\Bigg|_{\lambda=\lambda_0=0}, \tag{0.6}$$

ассоциированной с двукратным собственным числом $\lambda_0=0$.

В § 3 приводятся доказательства основных результатов статьи. А именно, доказывается, что системы собственных функций (0.1) задачи A с присоединением к ней функции (0.6) в случае задачи $\tilde{A}$, не только полны в том же классе функций (0.5), но и после надлежащей нормировки являются базисами Рисса.

Данную статью в какой-то мере можно считать итоговой в цикле исследований, проведенных за последние годы по обобщенному дискретному гармоническому анализу в комплексной области автором и С. Г. Рафаеляном.

Как уже указывалось во введении работы [2], в давней совместной с А. Б. Нерсесяном работе автора [3] впервые были рассмотрены краевые задачи на отрезке $[0, l]$ вещественной оси для модельных дифференциальных операторов дробного порядка более сложной природы. Задачи эти также порождали системы от функций типа Миттаг-Леффлера $E_\rho(z, \mu)$, биортогональные на отрезке $[0, l]$. Наконец, существенно отличным от развитого нами за последние годы методом, сопряженным с преодолением значительных трудностей, устанавливалась лишь равносходимость с рядами Фурье разложений функций $f(x)\in L(0, l)$ по указанным биортогональным системам.

§ 1. Предварительные сведения

1.1. Известно, что целая функция типа Миттаг-Леффлера

$$E_{1/2}(\sigma^2 z,\ 1+\nu)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sigma^{2k} z^k}{\Gamma(1+\nu+2k)}\quad (0<\sigma<+\infty) \tag{1.1}$$

имеет порядок, равный 1/2 и тип σ при любом значении параметра $\nu\in(-1, +\infty)$. Но кроме того, эта функция обладает другим важным свойством: а именно, для значений параметра $\nu\in[0, 2)$ она имеет только вещественные, отрицательные и простые корни $\{-r_k\}_1^\infty$

$$0<r_1<r_2<\cdots<r_k<r_{k+1}<\cdots$$

(см. [3], лемму 1.1).

Из сказанного непосредственно следует, что при $0\leqslant\nu<2$ все корни функции

$$\tilde{e}_\sigma(z,\ \nu)\equiv E_{1/2}(\sigma^2 z^3,\ 1+\nu)\quad (0\leqslant\nu<2) \tag{1.2}$$

также простые и лежат только на трех полупрямых плоскости z

$$L_j=(0,\ \alpha^{j+1/2}(\infty))\quad (j=-1, 0, 1), \tag{1.3}$$

где $\alpha=\exp\left\{i\dfrac{2\pi}{3}\right\}$.

Нумеруя эти корни в порядке неубывания их модулей и возрастания аргументов, мы приходим к последовательности комплексных чисел

$$\{\lambda_k\}_1^\infty, \ (|\lambda_k| \leqslant |\lambda_{k+1}|, \ -\pi/3 = \operatorname{Arg}\lambda_1 < \operatorname{Arg}\lambda_k < \operatorname{Arg}\lambda_{k+1} = 2\pi/3 + \\ + \operatorname{Arg}\lambda_k, \ k \geqslant 2). \tag{1.4}$$

Таким образом, $\{\lambda_k\}_1^\infty$ — суть последовательность всевозможных отличных друг от друга и простых корней функции $\tilde{e}_3(z, \nu)$, лежащих только на совокупности лучей (1.3).

Как уже отмечалось выше, последовательность $\{\lambda_k\}_0^\infty$ ($\lambda_0 = 0$) совпадает с множеством всех собственных чисел двух краевых задач A и $\tilde{A}$, поставленных в работе [1] на совокупности отрезков $\nabla(\sigma)$.

При непременном условии на параметр μ

$$2/3 \leqslant \mu \leqslant 1 \tag{1.5}$$

в работе [1] была установлена полнота системы собственных функций (0.1) первой задачи A, а также второй задачи $\tilde{A}$ при добавлении к системе (0.1) присоединенной функции (0.6).

Доказательство полноты собственных функций существенно опиралось на установленные в работе [3] интерполяционные разложения специальных классов $\overset{*}{W}{}^{2,\,\omega}_{3/2,\,\sigma}$ целых функций $f(z)$ порядка $\rho = 3/2$ и типа $\sigma\,(0 < \sigma + \infty)$, подчиненных условию

$$\sum_{j=-1}^{1} \int_0^{+\infty} |f(\alpha^{j+\frac{1}{2}} r)|^2 r^\omega dr < +\infty, \tag{1.6}$$

где $\omega \in (-1, 1)$ — любое число. При этом, узлами интерполяционных разложений служило множество собственных чисел $\{\lambda_k\}_0^\infty$ обеих краевых задач A или $\tilde{A}$, при соответствующих условиях $\nu \in \Delta = (\mu - 1/6, \mu + 1/6)$, или $\nu \in \bar{\Delta} = (\mu + 1/6, \mu + 1/2)$ на параметр ν, входящий в определение функций $\tilde{e}_3(z, \nu)$ с корнями на последовательности $\{\lambda_k\}_1^\infty$.

Из более ранних результатов автора, в частности, следовала теорема типа Винера-Пэли для целых функций указанного выше класса $\overset{*}{W}{}^{2,\,\omega}_{3/2,\,\sigma}\,(-1 < \omega < 1)$, устанавливающая изоморфизм между этим классом и пространством трехкомпонентных вектор-функций

$$\varphi(\tau) = \{\varphi_j(\tau)\}_{-1}^1 \in L_2(0, \sigma). \tag{1.7}$$

Этот факт позволил в нашей совместной с С. Г. Рафаеляном работе [3] установить базисность вектор-систем вида

$$\{E_{3/2}(\alpha^j \lambda_n \tau^{2/3}, \mu)\, \tau^{\mu-1}\}_0^\infty \tag{1.8}$$

или же вида

$$\left\{\frac{\alpha^j \tau^{\mu-1/3}}{\Gamma(\mu + 2/3)}, \ [E_{1/2}(\alpha^j \lambda_n \tau^{2/3}, \mu)\, \tau^{\mu-1}]_0^\infty\right\} \tag{1.9}$$

(где $j=-1, 0, 1$) в пространстве вектор-функций (1.7), соответственно, при $\nu\in\Delta$ и $\nu\in\bar{\Delta}$.

Наша ближайшая цель — доказать, что указанные базисные вектор-системы функций из $L_2(0, \sigma)$ могут быть сведены к системам собственных функций краевых задач A и $\tilde{A}$, исследованных в работе [1].

1.2. Приведем теперь некоторые определения, а также формулировки двух результатов из работы [3], которые понадобятся ниже.

(a) С этой целью сначала введем в рассмотрение две пары систем трехкомпонентных вектор-функций из $L_2(0, \sigma)$, полагая, как и всюду ниже, что

$$\mu=5/6+\omega/3 \quad (-1/2\leqslant\omega\leqslant 1/2). \tag{1.10}$$

1°. Если $\nu\in\Delta=(\mu-1/6, \mu+1/6)$*, пару систем

$$\{\varkappa_{n,j}(\tau)\}_0^\infty \text{ и } \{\omega_{n,j}(\tau)\}_0^\infty \quad (j=-1, 0, 1) \tag{1.11}$$

кратко обозначим также

$$\varkappa_n(\tau)=\{\varkappa_{n,j}(\tau)\}_{-1}^1 \text{ и } \omega_n(\tau)=\{\omega_{n,j}(\tau)\}_{-1}^1 \quad (n=0, 1, 2,\cdots), \tag{1.11'}$$

где

$$\varkappa_{n,j}(\tau)=E_{3/2}(\alpha^j\lambda_n\tau^{2/3}, \mu)\tau^{\mu-1} \quad (n=0, 1, 2,\cdots), \tag{1.12}$$

и

$$\omega_{0,j}(\tau)=\frac{\sigma^{-\nu}\Gamma(1+\nu)}{3\Gamma(1+\nu-\mu)}(\sigma-\tau)^{\nu-\mu}, \tag{1.13}$$

$$\omega_{n,j}(\tau)=\frac{\sigma^{-\nu}\Gamma(1+\nu)}{3\Gamma(1+\nu-\mu)}\times$$

$$\times E_{3/2}(\alpha^{-j}\bar{\lambda}_n(\sigma-\tau)^{2/3}, 1+\nu-\mu)(\sigma-\tau)^{\nu-\mu} \quad (n=0, 1, 2,\cdots). \tag{1.13'}$$

1°. Если $\nu\in\bar{\Delta}=(\mu+1/6, \mu+1/2)$, пару систем

$$\{\tilde{\varkappa}^*_{0,j}(\tau), [\tilde{\varkappa}_{n,j}(\tau)]_0^\infty\} \text{ и } \{\tilde{\omega}^*_{0,j}(\tau), [\tilde{\omega}_{n,j}(\tau)]_0^\infty\} \tag{1.14}$$

кратко обозначим

$$\begin{gathered}\tilde{\varkappa}^*_0(\tau)=\{\tilde{\varkappa}^*_{0,j}(\tau)\}_{-1}^1, \quad \tilde{\varkappa}_n(\tau)=\{\tilde{\varkappa}_{n,j}(\tau)\}_{-1}^1,\\ \tilde{\omega}^*_0(\tau)=\{\tilde{\omega}^*_{0,j}(\tau)\}_{-1}^1, \quad \tilde{\omega}_n(\tau)=\{\tilde{\omega}_{n,j}(\tau)\}_{-1}^1,\end{gathered} \tag{1.14'}$$

где

$$\tilde{\varkappa}^*_{0,j}(\tau)=\frac{\alpha^j\tau^{\mu-1/3}}{\Gamma(\mu+2/3)}, \quad \tilde{\varkappa}_{n,j}(\tau)\equiv\varkappa_{n,j}(\tau) \quad (n=0, 1, 2,\cdots), \tag{1.15}$$

$$\tilde{\omega}^*_{0,j}(\tau)=\alpha^j\frac{\sigma^{-\nu}\Gamma(1+\nu)}{3\Gamma(1/3+\nu-\mu)}(\sigma-\tau)^{\nu-\mu-2/3}, \tag{1.16'}$$

---

* В работе [3], как в определении 1° (стр. 54), так и всюду дальше, интервалом изменения параметра ν предполагался $\bar{\delta}_1=(\mu, \mu+1/6)$ $(\subset\Delta)$. Однако, соответствующие утверждения этой работы, как нетрудно убедиться, сохраняют силу при всех $\nu\in\Delta$.

$$\overline{\omega}_{n,j}(\tau) = \alpha^{j} \frac{\sigma^{-\nu}}{3\overline{\lambda}_n^2 \tilde{e}_\sigma(\overline{\lambda}_n, \nu)} \times$$

$$\times E_{3/2}(\alpha^{-j}\overline{\lambda}_n(\sigma-\tau)^{2/3}, \nu+1/3-\mu)(\sigma-\tau)^{\nu-\mu-2/3} (n=0, 1, 2, \cdots). \quad (1.16'')$$

Легко проверить, что в обоих случаях 1° или 2° введенные функции будут из класса $L_2(0, \sigma)$, а произведения любых двух из них, взятых в отдельности по каждой из указанных систем, будут из класса $L_1(0, \sigma)$*.

(б) Для произвольной пары трехкомпонентных вектор-функций из $L_2(0, \sigma)$

$$y(\tau) = \{y_j(\tau)\}_{-1}^{1} \text{ и } z(\tau) = \{z_j(\tau)\}_{-1}^{1} \quad (1.17)$$

определим их скалярное произведение и норму, положив

$$\{y, z\} = \sum_{j=-1}^{1} \int_0^\sigma y_j(\tau)\overline{z_j(\tau)}\, d\tau, \quad \|y\| = \{y, y\}^{1/2}. \quad (1.18)$$

Очевидно, что $\|y\|=0$ только когда $y_j(\tau)=0\ (j=-1, 0, 1)$ почти всюду на $(0, \sigma)$.

Справедлива следующая теорема (см. [3], теорему 4.2).

Теорема I. 1°. *При* $\nu \in \Delta$ *системы вектор-функций* (1.11) *биортогональны в метрике* (1.16). *Иными словами, согласно обозначениям* (1.11')

$$\{\varkappa_n, \omega_m\} = \delta_{n,m}\ (n, m = 0, 1, 2, \cdots), \quad (1.19)$$

где $\delta_{n,m}$ — *символ Кронеккера.*

2°. *При* $\nu \in \tilde{\Delta}$ *системы вектор-функций* (1.14) *биортогональны в метрике* (1.16). *Иными словами, согласно обозначениям* (1.14')

$$\begin{gathered}\{\overline{\varkappa}_0^*, \tilde{\omega}_0^*\} = 1, \ \{\tilde{\varkappa}_0^*, \overline{\omega}_m\} = 0\ (m=0, 1, 2, \cdots), \\ \{\tilde{\varkappa}_n, \tilde{\omega}_0^*\} = 0, \ \{\overline{\varkappa}_n, \overline{\omega}_m\} = \delta_{n,m}\ (n, m=0, 1, 2, \cdots).\end{gathered} \quad (1.20)$$

(в) Целесообразно путем простой перенормировки ввести еще две пары вектор-систем, определив их таким образом:

1°. При $\nu \in \Delta$ положим

$$M_{n,j}(\tau) = (1+n)^{\mu-1}\varkappa_{n,j}(\tau), \ \Omega_{n,j}(\tau) = (1+n)^{1-\mu}\omega_{n,j}(\tau) \quad (1.21)$$

$$(n=0, 1, 2, \cdots; \ j=-1, 0, 1),$$

или короче

$$M_n(\tau) = (1+n)^{\mu-1}\varkappa_n(\tau), \ \Omega_n(\tau) = (1+n)^{1-\mu}\omega_n(\tau) \quad (1.21')$$

$$(n=0, 1, 2, \cdots).$$

2°. При $\nu \in \tilde{\Delta}$ положим

---

* Приведенные выше функции тождественны с соответствующими функциями работы [3], если только в них произвести замену $\mu_n = \alpha^{-1/2}\lambda_n\ (n \geq 0)$.

$$\widetilde{M}^{*}_{0,j}(\tau)=\widetilde{\varkappa}^{*}_{0,j}(\tau),\ \widetilde{M}_{n,j}(\tau)=(1+n)^{\mu-1}\,\widetilde{\varkappa}_{n,j}(\tau),$$
$$\widetilde{\Omega}^{*}_{0,j}(\tau)=\widetilde{\omega}^{*}_{0,j}(\tau),\ \widetilde{\Omega}_{n,j}(\tau)=(1+n)^{1-\mu}\,\widetilde{\omega}_{n,j}(\tau) \tag{1.22}$$
$$(n=0,1,2,\cdots;\ j=-1,0,1),$$

или короче

$$\left.\begin{aligned}\widetilde{M}^{*}_{0}(\tau)&=\widetilde{\varkappa}^{*}_{0}(\tau),\ \widetilde{M}_{n}(\tau)=(1+n)^{\mu-1}\,\widetilde{\varkappa}_{n}(\tau)\\ \widetilde{\Omega}^{*}_{0}(\tau)&=\widetilde{\omega}^{*}_{0}(\tau),\ \widetilde{\Omega}_{n}(\tau)=(1+n)^{1-\mu}\,\widetilde{\omega}_{n}(\tau)\end{aligned}\right\}\ (n=0,1,2,\cdots). \tag{1.22'}$$

Пользуясь этими определениями утверждение теоремы 1 можно сформулировать в следующем виде.

Теорема I′. 1°. *При* $\nu\in\Delta$ *имеем*

$$\{M_n,\ \Omega_m\}=\delta_{n,m}\ (n,\ m=0,\ 1,\ 2,\cdots). \tag{1.19'}$$

2°. *При* $\nu\in\widetilde{\Delta}$ *имеем*

$$\left.\begin{aligned}\{\widetilde{M}^{*}_{0},\ \widetilde{\Omega}^{*}_{0}\}&=1,\ \{\widetilde{M}^{*}_{0},\ \widetilde{\Omega}_{m}\}=0,\\ \{\widetilde{M}_{n},\ \widetilde{\Omega}^{*}_{0}\}&=0,\ \{\widetilde{M}_{n},\ \widetilde{\Omega}_{m}\}=\delta_{n,m}.\end{aligned}\right.\ (n,\ m=0,\ 1,\ 2,\cdots) \tag{1.20'}$$

Второй результат работы [3] (теорема 5.4), необходимый для дальнейшего изложения, может быть сформулирован следующим образом.

Теорема II. *Пусть* $\nu\in\Delta$, *или* $\nu\in\widetilde{\Delta}$. *Тогда система вектор-функций* (1.21)—(1.21′), *или соответственно, система вектор-функций* (1.22)—(1.22′), *биортогональны на* $(0,\sigma)$ *и образуют базис Рисса в пространстве* $L_2(0,\sigma)$ *трехкомпонентных вектор-функций* $\varphi(\tau)=\{\varphi_j(\tau)\}_{-1}^{1}\in L_2(0,\sigma)$, *вектор-ряды при* $\nu\in\Delta$

$$\varphi(\tau)=\sum_{n=0}^{\infty}\{\varphi,\ \Omega_n\}\,M_n(\tau), \tag{1.23'}$$

$$\varphi(\tau)=\sum_{n=0}^{\infty}\{\varphi,\ M_n\}\,\Omega_n(\tau), \tag{1.23''}$$

или вектор-ряды при $\nu\in\widetilde{\Delta}$

$$\varphi(\tau)=\{\varphi,\ \widetilde{\Omega}^{*}_{0}\}\,\widetilde{M}^{*}_{0}(\tau)+\sum_{n=0}^{\infty}\{\varphi,\ \widetilde{\Omega}_n\}\,\widetilde{M}_n(\tau), \tag{1.24'}$$

$$\varphi(\tau)=\{\varphi,\ \widetilde{M}^{*}_{0}\}\,\widetilde{\Omega}^{*}_{0}(\tau)+\sum_{n=0}^{\infty}\{\varphi,\ \widetilde{M}_n\}\,\widetilde{\Omega}_n(\tau) \tag{1.24''}$$

1) *сходятся в среднем в метрике вектор-пространства* $L_2(0,\sigma)$,

2) *имеют место двойные неравенства*

$$\{\varphi,\ \varphi\}=\|\varphi\|^2\asymp\sum_{n=0}^{\infty}|\{\varphi,\ \Omega_n\}|^2\asymp\sum_{n=0}^{\infty}|\{\varphi,\ M_n\}|^2,\ \nu\in\Delta, \tag{1.25}$$

$$(\varphi, \varphi) = \|\varphi\|^2 \asymp |(\varphi, \tilde{\Omega}_0^*)|^2 + \sum_{n=0}^{\infty} |(\varphi, \tilde{\Omega}_n)|^2 \asymp$$

$$\asymp |(\varphi, \tilde{M}_0^*)|^2 + \sum_{n=0}^{\infty} |(\varphi, \tilde{M}_n)|^2, \quad \nu \in \bar{\Delta}. \tag{1.26}$$

§ 2. Построение биортогональных систем на совокупности отрезков $\nabla(\sigma)$ комплексной плоскости

2.1 (а) Взамен отмеченных в § 1 пар систем вектор-функций, биортогональных на $(0, \sigma)$, теперь необходимо ввести в рассмотрение другого рода пары систем функций от переменной z, биортогональных на совокупности трех отрезков

$$\nabla(\sigma) = \bigcup_{j=-1}^{1} \nabla_j(\sigma), \quad \nabla_j(\sigma) = \{z = \alpha^j r, \ 0 \leqslant r \leqslant \sigma^{2/3}\} \tag{2.1}$$

комплексной плоскости.

1°. При $\nu \in \Delta = (\mu - 1/6, \ \mu + 1/6)$, $2/3 \leqslant \mu \leqslant 1$ введем пару систем

$$\{E_n(z)\}_0^\infty \text{ и } \{F_n(z)\}_0^\infty, \quad z \in \nabla(\sigma), \tag{2.2}$$

положив для $z \in \nabla_j(\sigma)$ $(j = -1, 0, 1)$

$$E_n(z) \equiv E_{n,j}(r) = \alpha^{\left(\frac{3\mu}{2} - 1\right) j} \varkappa_{n,j}(r^{3/2}) r^{1/2} = E_{3/2}(\lambda_n \alpha^j r, \mu) (\alpha^j r)^{\frac{3\mu}{2} - 1},$$

$$F_n(z) \equiv F_{n,j}(r) = \frac{3}{2} \alpha^{\left(\frac{3\mu}{2} - 1\right) j} \omega_{n,j}(r^{3/2}) r^{-1/2}. \tag{2.2'}$$

2°. При $\nu \in \bar{\Delta} = (\mu + 1/6, \ \mu + 1/2)$, $2/3 \leqslant \mu \leqslant 1$ введем другую пару систем

$$\{\tilde{E}_0^*(z), [\tilde{E}_n(z)]_0^\infty\} \text{ и } \{\tilde{F}_0^*(z), [\tilde{F}_n(z)]_0^\infty\}, \quad z \in \nabla(\sigma), \tag{2.3}$$

положив для $z \in \nabla_j(\sigma)$ $(j = -1, 0, 1)$

$$\tilde{E}_0^*(z) \equiv \tilde{E}_{0,j}(r) = \alpha^{\left(\frac{3\mu}{2} - 1\right) j} \tilde{\varkappa}_{0,j}^*(r^{3/2}) r^{1/2} = \frac{z^{\frac{3\mu}{2}}}{\Gamma(\mu + 2/3)}, \tag{2.4'}$$

$$\tilde{F}_0^*(z) \equiv \tilde{F}_{0,j}(r) = \frac{3}{2} \alpha^{\left(\frac{3\mu}{2} - 1\right) j} \tilde{\omega}_{0,j}^*(r^{3/2}) r^{1/2},$$

а затем

$$\tilde{E}_n(z) = \tilde{E}_{n,j}(r) \equiv E_{n,j}(r),$$

$$\tilde{F}_n(z) = \tilde{F}_{n,j}(r) \equiv F_{n,j}(r). \tag{2.4''}$$

(б) Обозначим через $L_2^{(1/2)}[\nabla(\sigma)]$ множество определенных на $\nabla(\sigma)$ функций $\Psi(z)$, для которых

$$\|\Psi, \nabla(\sigma)\| = \left(\int_{\nabla(\sigma)} |\Psi(z)|^2 |z|^{1/2} |dz| \right)^{1/2} < +\infty. \tag{2.5}$$

Далее, для любой пары функций $\Psi_k(z) \in L_2^{(1/2)}[\nabla(\sigma)]$ $(k=1, 2)$ определим их скалярное произведение, положив

$$[\Psi_1, \Psi_2]_{\nabla(\sigma)} \equiv [\Psi_1, \Psi_2] \equiv \int_{\nabla(\sigma)} \Psi_1(z) \overline{\Psi_2(z)} |z|^{1/2} |dz|, \tag{2.6}$$

и заметив, что тогда

$$|[\Psi_1, \Psi_2]| \leqslant \|\Psi_1\| \cdot \|\Psi_2\|. \tag{2.7}$$

Нетрудно убедиться в том, что функции каждой из систем (2.2) и (2.3) принадлежат классу $L_2^{(1/2)}[\nabla(\sigma)]$, и тем самым, скалярные произведения (2.7) любой пары функций, взятых в отдельности по каждой из них, всегда конечны. Вместе с тем, для любых функций Ψ_1 $\Psi_2 \in L_2^{(1/2)}[\nabla(\sigma)]$, ввиду (2.1), будем иметь

$$\begin{aligned}[\Psi_1, \Psi_2] &= \sum_{j=-1}^{1} \int_{\nabla_j(\sigma)} \Psi_1(z) \overline{\Psi_2(z)} |z|^{1/2} |dz| = \\ &= \sum_{j=-1}^{1} \int_0^{\sigma} \Psi_1(\alpha^j r) \overline{\Psi_2(\alpha^j r)} r^{1/2} dr.\end{aligned} \tag{2.8}$$

Теперь на основе теоремы I (§ 1), установим биортогональность введенных выше систем на совокупности отрезков $\nabla(\sigma)$ и в метрике (2.8).

Теорема 2.1.1°. *При* $\nu \in \Delta$ *системы функций.* (2.2) *биортогональны на* $\nabla(\sigma)$ *в метрике* (2.8), *т. е.*

$$[E_n, F_m] = \delta_{n,m} \quad (n, m = 0, 1, 2, \cdots). \tag{2.9}$$

2°. *При* $\nu \in \overline{\Delta}$ *системы функций* (2.3) *биортогональны на* $\nabla(\sigma)$ *в метрике* (2.8), *т. е.*

$$\begin{aligned}&[\tilde{E}_0^*, \tilde{F}_0^*] = 1, \ [\tilde{E}_0^*, \tilde{F}_m] = 0, \\ &[\tilde{E}_n, \tilde{F}_0^*] = 0, \ [\tilde{E}_n, \tilde{F}_m] = \delta_{n,m}.\end{aligned} \quad (n, m = 0, 1, 2, \cdots). \tag{2.10}$$

Доказательство. Пользуясь первой из формул (2.8) и определениями (2.2′), получим

$$\begin{aligned}[E_n, F_m] &= \sum_{j=-1}^{1} \int_{\nabla_j(\sigma)} E_{n,j}(r) \overline{F_{m,j}(r)} r^{1/2} dr = \\ &= \sum_{j=-1}^{1} \frac{3}{2} \int_0^{\sigma^{2/3}} \varkappa_{n,j}(r^{3/2}) \overline{\omega_{m,j}(r^{3/2})} r^{1/2} dr = \\ &= \sum_{j=-1}^{1} \int_0^{\sigma} \varkappa_{n,j}(\tau) \overline{\omega_{m,j}(\tau)} d\tau = [\varkappa_n, \omega_m] = \delta_{n,m} \ (n, m = 0, 1, 2, \cdots).\end{aligned}$$

2°. В силу (2.4′)–(2.4″) вполне аналогичным образом из теоремы I (2°) следуют равенства

$$[\widetilde{E}_0^{\bullet}, \widetilde{F}_0^{\bullet}] = \sum_{j=-1}^{1} \int_0^{\sigma} \widetilde{\varkappa}_{0,j}^{\bullet}(\tau) \overline{\widetilde{\omega}_{0,j}^{\bullet}(\tau)}\, d\tau = [\widetilde{\varkappa}_0^{\bullet}, \widetilde{\omega}_0^{\bullet}] = 1,$$

$$[\widetilde{E}_0^{\bullet}, \widetilde{F}_m] = \sum_{j=-1}^{1} \int_0^{\sigma} \widetilde{\varkappa}_0^{\bullet}(\tau) \overline{\widetilde{\omega}_m(\tau)}\, d\tau = [\widetilde{\varkappa}_0^{\bullet}, \widetilde{\omega}_m] = 0,$$

$$[\widetilde{E}_n, \widetilde{F}_0^{\bullet}] = \sum_{j=-1}^{1} \int_0^{\sigma} \widetilde{\varkappa}_{n,j}(\tau) \overline{\widetilde{\omega}_0^{\bullet}(\tau)}\, d\tau = [\widetilde{\varkappa}_n, \widetilde{\omega}_0^{\bullet}] = 0,$$

$$[\widetilde{E}_n, \widetilde{F}_m] = \sum_{j=-1}^{1} \int_0^{\sigma} \widetilde{\varkappa}_{n,j}(\tau) \overline{\widetilde{\omega}_{m,j}(\tau)}\, d\tau = [\widetilde{\varkappa}_n, \widetilde{\omega}_m] = \delta_{m,m}$$

$$(n, \ m = 0, \ 1, \ 2, \cdots).$$

Итак, соотношения (2.9) и (2.10) справедливы.

(в) Наряду с введенными системами полезно ввести также их простые модификации, определив:

при $\nu \in \Delta$ системы

$$\{e_n(z)\}_0^{\infty} \text{ и } \{T_n(z)\}_0^{\infty}, \ z \in \nabla(\sigma) \tag{2.11}$$

как

$$e_n(z) = (1+n)^{\mu-1} E_n(z) \text{ и } T_n(z) = (1+n)^{1-\mu} F_n(z), \tag{2.12}$$

при $\nu \in \overline{\Delta}$ системы

$$\{\widetilde{e}_0^{\bullet}(z), [\widetilde{e}_n(z)]_0^{\infty}\} \text{ и } \{\widetilde{T}_0^{\bullet}(z), [\widetilde{T}_n(z)]_0^{\infty}\} \tag{2.13}$$

как

$$\widetilde{e}_0^{\bullet}(z) = \widetilde{E}_0^{\bullet}(z), \ \ \widetilde{T}_0^{\bullet}(z) = \widetilde{F}_0^{\bullet}(z), \tag{2.14}$$

$$\widetilde{e}_n(z) = (1+n)^{\mu-1} \widetilde{E}_n(z), \ \widetilde{T}_n(z) = (1+n)^{1-\mu} \widetilde{F}_n(z). \tag{2.14′}$$

Очевидно, что системы (2.11) и (2.13) сохраняют все свойства биортогональности первоначальных систем (2.2) и (2.3), приведенные в теореме 2.1.

§ 3. Базисность систем собственных функций на системе отрезков $\nabla(\sigma)$

3.1 (а) Наряду с пространством $L_2^{(1/2)}[\nabla(\sigma)]$ необходимо ввести в рассмотрение также пространство $L_2^{(-1/2)}[\nabla(\sigma)]$ функций $\Phi(z)$, вновь заданных на совокупности отрезков $\nabla(\sigma)$, но подчиненных взамен (2.5) уже условию

$$\int_{\nabla(\sigma)} |\Phi(z)|^2 |z|^{-1/2} |dz| < +\infty. \tag{3.1}$$

Заметим, что из очевидного неравенства

$$\int\limits_{\nabla(\sigma)} |\Phi(z)|^2 |z|^{-1/2} |dz| > \sigma^{-2/3} \int\limits_{\nabla(\sigma)} |\Phi(z)|^2 |z|^{1/2} |dz|$$

следует включение $L_2^{(-1/2)}[\nabla(\sigma)] \subset L_2^{(1/2)}[\nabla(\sigma)]$.

(б) Перейдем теперь к установлению основных результатов статьи.

Теорема 3.1. *Пусть* $\nu \in \Delta = (\mu - 1/6,\ \mu + 1/6)$, $2/3 \leqslant \mu \leqslant 1$, *и*

$$\{E_n(z)\}_0^{\infty} = \{E_{3/2}(\lambda_n z,\ \mu)\, z^{\frac{3\mu}{2}-1}\}_0^{\infty},\quad z \in \nabla(\sigma) \tag{3.2}$$

— системы собственных функций краевой задачи A.

Тогда нормированные согласно формулам (2.12) *биортогональные на* $\Delta(\sigma)$ *системы функций*

$$\{e_n(z)\}_0^{\infty} \text{ и } \{T_n(z)\}_0^{\infty} \tag{3.3}$$

образуют базис Рисса в $L_2^{(-1/2)}[\nabla(\sigma)]$.

Доказательство. Достаточно установить справедливость следующих двух утверждений для любой функции $\Phi(z) \in L_2^{(-1/2)}[\nabla(\sigma)]$.

1) Имеют место разложения

$$\begin{aligned}\Phi(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} [\Phi,\ T_n]\, e_n(z) = \sum_{n=0}^{\infty} [\Phi,\ F_n]\, E_n(z) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} [\Phi,\ e_n]\, T_n(z) = \sum_{n=0}^{\infty} [\Phi,\ E_n]\, F_n(z),\end{aligned} \tag{3.4}$$

сходящиеся в метрике $L_2^{(-1/2)}[\nabla(\sigma)]$.

2) Имеют место двойные неравенства

$$\begin{aligned}\int\limits_{\nabla(\sigma)} |\Phi(z)|^2 |z|^{-1/2} |dz| &\asymp \sum_{n=0}^{\infty} |[\Phi,\ T_n]|^2 \asymp \sum_{n=0}^{\infty} (1+n)^{2(1-\mu)} |[\Phi,\ F_n]|^2 \asymp \\ &\asymp \sum_{n=0}^{\infty} |[\Phi,\ e_n]|^2 \asymp \sum_{n=0}^{\infty} (1+n)^{2(\mu-1)} |[\Phi,\ E_n]|^2.\end{aligned} \tag{3.5}$$

Метод доказательства опирается на теорему II, и поэтому нам достаточно установить справедливость первых строк соотношений (3.4) и (3.5).

С функцией $\Phi(z) \in L_2^{(-1/2)}[\nabla(\sigma)]$ будем ассоциировать трехкомпонентную вектор-функцию $\varphi(\tau) = \{\varphi_j(\tau)\}_{-1}^{1}$, положив

$$\varphi_j(\tau) = \alpha^{-\left(\frac{3\mu}{2}-1\right)j}\, \Phi(\alpha^j \tau^{2/3})\, \tau^{-1/3} \quad (j = -1,\ 0,\ 1). \tag{3.6}$$

Заметим, что при этом $\varphi(\tau) \in L_2(0,\ \sigma)$, поскольку, как легко видеть

$$\int\limits_0^{\sigma} |\varphi_j(\tau)|^2 d\tau < 2 \int\limits_{\nabla(\sigma)} |\Phi(z)|^2 |z|^{-1/2} |dz| < +\infty \quad (j = -1,\ 0,\ 1).$$

Чтобы приступить непосредственно к доказательству теоремы, вычислим сначала значение $[\varphi, \omega_n]$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$.

Пользуясь соответствующими определениями вектор-функций φ, ω_n и $F_n(z) = F_{n,j}(r)$, $z \in \nabla_j(\sigma)$ (см. (2.2′)), последовательно получим

$$[\varphi, \omega_n] = \sum_{j=-1}^{1} \int_0^{\sigma} \varphi_j(\tau) \overline{\omega_{n,j}(\tau)}\, d\tau =$$

$$= \sum_{j=-1}^{1} \int_0^{\sigma} \Phi(\alpha^j \tau^{2/3}) \overline{\left[\alpha^{\left(\frac{3\mu}{2}-1\right)j} \omega_{n,j}(\tau)\right]}\, d\tau =$$

$$= \sum_{j=-1}^{1} \int_0^{\sigma^{2/3}} \Phi(\alpha^j r) \overline{\left\{\frac{3}{2} \alpha^{\left(\frac{3\mu}{2}-1\right)j} \omega_{n,j}(r^{3/2})\, r^{-1/2}\right\}}\, r^{1/2}\, dr =$$

$$= \sum_{j=-1}^{1} \int_0^{\sigma^{2/3}} \Phi(\alpha^j r) \overline{F_{n,j}(r)}\, r^{1/2}\, dr =$$

$$= \sum_{j=-1}^{1} \int_{\nabla_j(\sigma)} \Phi(z) \overline{F_{n,j}(z)}\, |z|^{1/2} |dz| = [\Phi, F_n].$$

Итак, в силу (1.21)—(1.21′), имеем

$$[\varphi, \omega_n] = [\Phi, F_n] = (1+n)^{\mu-1} [\varphi, \Omega_n] \quad (n \geqslant 0). \tag{3.7}$$

Теперь воспользуемся теоремой II, согласно которой определяемые из (3.6) компоненты $\varphi_j(\tau)$ $(j = -1, 0, 1)$ вектор-функции $\varphi(\tau) = [\varphi_j(\tau)]_{-1}^{1}$ в силу левого из равенств (1.21) и формулы (3.7) допускают разложения

$$\varphi_j(\tau) = \alpha^{-\left(\frac{3\mu}{2}-1\right)j} \Phi(\alpha^j \tau^{2/3})\, \tau^{-1/3} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} [\varphi, \Omega_n] M_{n,j}(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} [\Phi, F_n] \varkappa_{n,j}(\tau) \quad (j = -1, 0, 1),$$

сходящиеся в метрике $L_2(0, \sigma)$. Произведем здесь замену переменной $\tau = r^{3/2}$, тогда придем к разложениям

$$\Phi(\alpha^j r)\, r^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} [\Phi, F_n] \left[\alpha^{\left(\frac{3\mu}{2}-1\right)j} \varkappa_{n,j}(r^{3/2})\right] (j = -1, 0, 1), \tag{3.8}$$

сходящимся в метрике $L_2(0, \sigma^{2/3};\ dr^{3/2})$.

Наконец, согласно первой из формул (2.2′), имеет место равенство

$$\alpha^{\left(\frac{3\mu}{2}-1\right)j} \varkappa_{n,j}(r^{3/2})\, r^{1/2} = E_n(z), \quad z \in \nabla_j(\sigma) \quad (j = -1, 0, 1).$$

Отсюда и из (3.8) следует утверждение 1) о сходимости рядов (3.4) в метрике $L_2^{(-1/2)}[\nabla(\sigma)]$.

Чтобы завершить доказательство вновь обратимся к теореме II, а точнее к ее двойным неравенствам (1.25) применительно к выбранной нами вектор-функции $\varphi(\tau)$ с компонентами (3.6).

С одной стороны, мы будем иметь

$$\{\varphi, \varphi\} = \sum_{j=-1}^{1} \int_{L}^{\infty} |\Phi(\alpha^j \tau^{2/3})|^2 \tau^{-2/3} d\tau =$$

$$= \frac{3}{2} \sum_{j=-1}^{1} \int_{\nabla_j(\sigma)} |\Phi(z)|^2 |z|^{-1/2} |dz| = \frac{3}{2} \int_{\nabla(\sigma)} |\Phi(z)|^2 |z|^{-1/2} |dz|.$$

С другой стороны, так как в силу (3.7) и (2.12)

$$\{\varphi, \Omega_n\} = [\Phi, (1+n)^{1-\mu} F_n] = [\Phi, T_n] \ (n \geqslant 0),$$

то двойные неравенства (1,25) могут быть записаны в виде (3.5).

Итак, соотношения (3.4)—(3.5) полностью доказаны. Что касается таких же утверждений при замене местами функций $T_n(z)$ и $e_n(z)$ в (3.4) и (3.5), то они устанавливаются вполне аналогичным способом на основе теоремы II.

Теорема 3.2. *Пусть* $\nu \in \tilde{\Delta} = (\mu + 1/6, \mu + 1/2)$, $2/3 \leqslant \mu < 1$ *и*

$$\left\{\frac{z^{\frac{3\mu}{2}}}{\Gamma(\mu + 2/3)}, \left[E_{3/2}(\lambda_n z, \mu) z^{\frac{3\mu}{2}-1}\right]_0^\infty\right\} = \{\tilde{E}_0^\bullet, [\tilde{E}_n(z)]_0^\infty\}$$

— система собственных и присоединенных функций краевой задачи $\tilde{A}$.

Тогда биортогональные на $\Delta(\sigma)$ системы функций

$$\{\tilde{e}_0^\bullet(z), [\tilde{e}_n(z)]_0^\infty\} \text{ и } \{\tilde{T}_0^\bullet, [\tilde{T}_n(z)]_0^\infty\}$$

из (2.14)—(2.14′) образуют базис Рисса в $L_2^{(-1/2)}[\nabla(\sigma)]$.

Доказательство мы опускаем, поскольку оно аналогично доказательству теоремы 3.1.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 11.XI.1987

Մ. Մ. ՋՐԲԱՇՅԱՆ. Կոմպլեքս տիրույթում մի եզրային խնդրից ծնվող սեփական ֆունկցիաների բազիսայնության մասին *(ամփոփում)*

Ներկա աշխատանքում ապացուցվում է [1] հոդվածում դրված $\dot{A}$ և $\tilde{A}$ եզրային խնդիրների սեփական ֆունկցիաների սիստեմների բազիս լինելը, կոմպլեքս տիրույթում երեք հատվածների

$$\nabla(\sigma) = \bigcup_{j=-1}^{1} \{z;\ z = ze^{i\frac{2\pi}{3}j},\ j = -1, 0, 1\}$$

սիստեմի վրա, ֆունկցիաների

$$\int_{\nabla(\sigma)} |\chi(z)|^2 |z|^{-1/2} |dz| < +\infty$$

տարածության մեջ:

M. M. DJRBASHIAN. *On the basis property of eigenfunctions of a boundary value problem in complex plane* (summary)

In the present paper we prove the basis property of the eigenfunctions of the boundary value problems A and $\tilde{A}$ posed in [1] in the space of functions

$$\int_{\nabla(\sigma)} |\chi(z)|^2 |z|^{-1/2} |dz| < +\infty$$

with

$$\nabla(\sigma) = \bigcup_{j=-1}^{1} \{z;\ z = re^{i\frac{2\pi}{3}j},\ j = 1, 0, 1\}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. М. Джрбашян*, Об одной краевой задаче в комплексной области, Изв. АН АрмССР, «Математика», 2, № 6, 1987.
2. *М. М. Джрбашян*. Интерполяционные и спектральные разложения, ассоциированные с дифференциальными операторами дробного порядка, Изв. АН АрмССР, «Математика», 19, № 2, 1984, 81—181.
3. *М. М. Джрбашян, А. Б. Нерсесян*. Разложение по некоторым биортогональным системам и краевые задачи для дифференциальных операторов дробного порядка, Труды ММО, 10, 1961, 89—179.
4. *М. М. Джрбашян, С. Г. Рафаелян*. Интерполяционные разложения в классах целых функций и порождаемые ими базисы Рисса, Изв. АН АрмССР, «Математика», 22, № 1, 1987, 23—63.