ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XXIII, № 4, 1988 Математика

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.946

Э. М. МАДУНЦ

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

1°. Рассмотрим эллиптическую систему

$$Au_{xx}+2Bu_{xy}+Cu_{yy}=0, \tag{1}$$

где A, B, C — постоянные вещественные матрицы порядка $n\times n$. Эллиптичность, как известно, означает: $\det C\neq 0$ и уравнение

$$\det(A+2B\lambda+C\lambda^2)=0 \tag{2}$$

не имеет действительных корней.

В работе [1] А. В. Бицадзе было получено представление общего решения системы (1). На основе этого представления в работах [2, 3] исследовалась задача Дирихле для системы (1) в случае одного кратного корня.

Впоследствие Н. Е. Товмасяном [4] было получено другое представление для решений [1], обладающее тем преимуществом, что технически позволило исследовать также и задачу Пуанкаре [5].

Ниже получено новое, уже векторно-матричное, представление решений уравнения (1), коэффициенты которого, в отличие от упомянутых представлений, имеют явный вид. Это представление может быть использовано при изучении граничных задач для эллиптических систем.

2°. Обозначим через $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_\mu$ корни уравнения (2), а через $k_1, k_2, \cdots, k_\mu$ их кратности, соответствинно. Без ограничения общности можно положить $C=E$ (E — единичная матрица).

Система (1) эквивалентна следующей:

$$v_y=\bar{A}v_x\equiv\begin{pmatrix} O, & E\\ -A, & -B\end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_{1x}\\ v_{2x}\end{pmatrix};\ v_1=u_x,\ v_2=u_y. \tag{3}$$

Пусть матрица J приводит матрицу $\bar{A}$ к нормальной форме Жордана, т. е.

$$J^{-1}\bar{A}J=N\oplus\bar{N}, \tag{4}$$

где

$$P\oplus Q\overset{\mathrm{def}}{=}\begin{pmatrix} P, & O\\ O, & Q\end{pmatrix},$$

а черта означает комплексное сопряжение.

Заметим, что собственные числа матрицы $\tilde{A}$ в точности совпадают с корнями уравнения (2). Тогда матрица N представляется в виде

$$N = \bigoplus_{l=1}^{\mu} N_l. \tag{5}$$

В свою очередь, каждый блок N_l разлагается в прямую сумму «чистых» клеток, соответствующих корню λ_l

$$N_l = \bigoplus_{j=1}^{m_l} N_{lj}. \tag{6}$$

Заметим, что размеры матрицы N_l равны $k_l \times k_l$, а число „чистых" клеток в блоке N_l равно $m_l = n - r_l$, где $r_l = rank\,(A + 2B\lambda_l + \lambda_l^2)$. Формула для m_l отражает тот факт, что число „чистых" клеток равно падению ранга матрицы $(\tilde{A} - \lambda_l)$. Если размеры матриц N_{lj} обозначить через $l_{lj} \times l_{lj}$, то очевидны равенства

$$k_l = \sum_{j=1}^{m_l} l_{lj}, \quad n = \sum_{l=1}^{\mu} k_l.$$

Для структуры приводящей матрицы J из (4) заключаем

$$J = \begin{pmatrix} \delta, & \overline{\delta} \\ \delta N, & \overline{\delta N} \end{pmatrix}, \tag{7}$$

где δ—матрица порядка $n \times n$, а столбцы матрицы J, не что иное, как цепочка собственных и присоединенных векторов матрицы $\tilde{A}$.

Преобразование $v = Jw$ приводит систему (3) к виду

$$w_y = (N \oplus \overline{N})\, w_x. \tag{8}$$

Поскольку N имеет блочную структуру, является прямой суммой клеток N_{lj}, то система (8) расщепляется на независимые подсистемы так, что для ее решения достаточно решить каждую подсистему в отдельности.

3°. Обозначим

$$[a_1, a_2, \cdots, a_n] \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} a_1 & & & \\ a_2 & a_1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ a_n & \cdots & a_2 & a_1 \end{pmatrix}.$$

Общий вид подсистемы системы (8) таков

$$w_y = [\lambda, 1, 0, \cdots, 0]\, w_x.$$

Замена $x' + iy' = x + iy$ приведет к виду

$$w_y = [i, 2p, 0, \cdots, 0]\, w_x, \tag{9}$$

где переменные (x', y') вновь переобозначены через (x, y), и если $\lambda = \alpha + i\beta$, то $p = i/2\beta$. Систему (9) запишем в виде

$$\partial_{\bar{z}} w = [0, p, 0, \cdots, 0]\, w_x, \tag{10}$$

где $\partial_{\bar{z}} = (1/2)(\partial_x + i\partial_y)$.

Из (10) видно, что систему можно проинтегрировать. Для этого обозначим

$$S = [1,\ p,\ p^2, \cdots, p^{n-1}], \tag{11}$$

$$H = [0,\ 1,\ 0, \cdots, 0]. \tag{12}$$

Лемма 1. *Пусть $z = x + \lambda y$, тогда общее решение системы* (10) *представляется в виде*

$$w(z) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!} (p\bar{z} HS)^k \Phi^{(k)}(z), \tag{13}$$

где p, H, S определены выше, а $\Phi(z)$ — произвольная голоморфная функция переменного z.

Доказательство. Интегрируя систему (10), легко убедиться, что

$$w_1(z) = \varphi_1(z),\quad w_2(z) = \varphi_2(z) + p\bar{z}\varphi_1'(z).$$

Наше утверждение заключается в том, что

$$w_n(z) = \varphi_n(z) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(p\bar{z})^k}{k!} \sum_{l=1}^{n-k} p^{n-k-l} C_{n-l-1}^{k-1} \varphi_l^{(k)}(z), \tag{14}$$

где $\varphi_l(z)$ — произвольные голоморфные функции.

Интегрируя (10) для $n = 2, 3$, легко убедиться, что решения действительно даются формулой (14). Индукцией по n докажем (14). Прежде всего легко убедиться в равенствах

$$\partial_{\bar{z}} w_{n+1}(z) = \sum_{k=1}^{n} p \frac{(p\bar{z})^{k-1}}{(k-1)!} \sum_{l=1}^{n+1-k} p^{n+1-k-l} C_{n-l}^{k-1} \varphi_l^{(k+1)}(z),$$

$$\partial_x w_n(z) = \varphi_n'(z) + \sum_{k=1}^{n-1} p \frac{(p\bar{z})^{k-1}}{(k-1)!} \sum p^{n-k-l} C_{n-l-1}^{k-1} \varphi_l^{(k)}(z) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(p\bar{z})^k}{k!} \sum_{l=1}^{n-k} p^{n-k-l} C_{n-l-1}^{k-1} \varphi_l^{(k+1)}(z).$$

Используя очевидные соотношения

$$C_{n-l-1}^0 = C_{n-l}^0,\quad C_n^{k-1} + C_n^k = C_{n+1}^k,\quad C_k^k = C_{k+1}^{k+1},$$

легко видеть, что $\partial_{\bar{z}} w_{n+1} = p\partial_x w_n$.

Также имеет место равенство

$$[0, \cdots, 0, C_{k-1}^{k-1}, pC_k^{k-1}, \cdots, p^{n-k-1} C_{n-2}^{k-1}] = [0, 1, 0, \cdots, 0]^k \cdot [1, p, p^2, \cdots, p^{n-1}]^k$$

что в обозначениях (11), (12) дает (13).

4°. Лемма 2. *Пусть $z = x + \lambda y$, $\lambda = \alpha + i\beta$ и $p = i/2\beta$, матрицы S, H и вектор-функция $w(z)$ определены по формулам* (11), (12) *и* (13), *соответственно. Тогда справедливо равенство*

$$\int_{z_0}^{z} w(z)\,dx + (H + \lambda E) w(z)\,dy = S^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} (p\bar{z}HS)^k F^{(k)}(z) \Big|_{z_0}^{z}, \tag{15}$$

где $F(z)$ — первообразная от $\Phi(z)$, входящей в (13).

Доказательство. При вычислении

$$\int_{z_0}^{z} w(z)\,dx$$

используем соотношения

$$E - pH = S^{-1},\ (HS)^{n-1} = (HS)^{n-1} S^{-1}, \tag{16}$$

а при вычислении

$$\int_{z_0}^{z} (H + \lambda E)\, w(z)\, dx$$

кроме (16), используем равенство

$$p\bar{\lambda} = 1 + p\lambda.$$

В итоге нетрудно убедиться в справедливости формулы (15).

Теперь вспомним, что

$$v = J\, w_1 \oplus w_2,$$

где $w_1(z)$ — решение системы (10). Структура матрицы J, и тот факт, что нас интересуют лишь вещественные решения исходной системы (1), позволяют заключить: $w_2(z) = \overline{w}_1(z)$, что, в свою очередь, приводит к формуле

$$u(x, y) = \mathrm{Re}\left\{\delta \int_{z_0}^{z} w_1(z)\, dx + N w_1(z) dy\right\},$$

где δ—матрица, входящая в (7), а N определено в (5).

5°. Пусть

$$z_k = x + \lambda_k y,\ \lambda_k = \alpha_k + i\beta_k,\ p_k = i/2\beta_k,\ (k=1, \cdots, \mu), \tag{17}$$

$$N_{ij} = [\lambda_i,\ 1,\ 0, \cdots, 0], \tag{18}$$

$$S_{ij} = [1,\ p_i,\ p_i^2, \cdots, p_i^{l_{ij}-1}], \tag{19}$$

здесь N_{ij} и S_{ij} — теплицевы матрицы порядка $l_{ij} \times l_{ij}$.

Пусть, далее, $w^{ij}(z_i)$ обозначает общее решение системы

$$\partial_{\bar{z}} w^{ij} = N_{ij} \partial_x w^{ij}. \tag{20}$$

Теорема. Общее решение системы (1) имеет вид

$$u(x, y) = \mathrm{Re}\left\{\left\| \delta \bigoplus_{i,j} S_{ij}^{-1} \sum_{k=0}^{l_{ij}-1} \frac{1}{k!} (p_i \bar{z}_i H_{ij} S_{ij})^k F_{ij}^{(k)}(z_i) \right\|\right\}, \tag{21}$$

где δ — постоянная матрица, входящая в (7); S_{ij}, H_{ij} — матрицы, определенные в (18) и (19), соответственно, наконец, $F_{ij}(z_i)$ — произвольные голоморфные вектор-функции переменного z_i.

Доказательство. Общее решение системы (20) нами получено в лемме 1, а лемма 2 позволяет вычислить криволинейные интегралы для получения решений системы (1) из решений системы (20). Заметим, что $S_{ij}^{-1} = E - p_i H_{ij}$, где E — единичная матрица порядка $l_{ij} \times l_{ij}$.

Ереванский физический
институт

Поступила 20. IV. 1988

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. В. Бицадзе.* Об эллиптических системах дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка, ДАН СССР, 112, № 6, 1957, 983—986.
2. *Е. В. Золотарева.* Необходимые и достаточные условия фредгольмовости для некоторого класса эллиптических систем, ДАН СССР, 145, 1962, 724—726.
3. *Е. В. Золотарева.* О задаче Дирихле для некоторого класса эллиптических систем, ДАН СССР, 145, 1962, 983—985.
4. *Н. Е. Товмасян.* Общая краевая задача для эллиптических систем второго порядка с постоянными коэффициентами, Дифф. уравнения, 2, № 2, 1966, 163—171.
5. *А. В. Бицадзе.* Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка, М., Наука, 1966.