ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱ: ԱՐՅԱՆ ՇՐՋԱՆԱՌՈՒԹՅՈՒՆ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XXIII, № 4, 1988 Математика

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.53

А. М. ДЖРБАШЯН

КЛАССЫ ФУНКЦИЙ ОГРАНИЧЕННОГО ВИДА В ПОЛУПЛОСКОСТИ, ТЕОРЕМА ЕДИНСТВЕННОСТИ И ТЕОРЕМА ТИПА ФРАГМЕНА-ЛИНДЕЛЕФА

1. Основные результаты, анонсированные в данной заметке, усиливают и обобщают классические и хорошо известные результаты, приводимые в этом пункте.

Общеизвестно принадлежащее Р. Неванлинне [1] (см. также [2], п.п. 6.3—6.5) полное описание роста аналитических функций ограниченного вида в верхней полуплоскости $G^{(+)}=\{z:\operatorname{Im}z>0\}$, *непрерывных вплоть до вещественной оси*. А именно, пара условий Р. Неванлинны

$$\lim_{R\to+\infty}\frac{1}{R}\int_0^\pi \log^+|f(Re^{i\theta})|\sin\theta d\theta<+\infty, \tag{1}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\log^+|f(x)|\frac{dx}{1+x^2}<+\infty, \tag{2}$$

выполнение которых необходимо и достаточно для того, чтобы аналитическая в $G^{(+)}$ функция $f(z)$, непрерывная вплоть до вещественной оси, была ограниченного вида в $G^{(+)}$ (т. е. функция $\log^+|f(z)|\equiv\max\{\log|f(z)|,0\}$ имела бы в $G^{(+)}$ гармоническую мажоранту).

Общеизвестна также нижеприведенная классическая теорема единственности Р. Неванлинны [3] (гл. III, п. 38).

Теорема А. *Пусть функция $f(z)$ аналитична в $G^{(+)}$ и такова, что для всех $t\in(-\infty,+\infty)$*

$$\overline{\lim_{\substack{z\to t\\ z\in G^{(+)}}}}|f(z)|\leqslant 1. \tag{3}$$

Тогда, если

$$\underline{\lim_{R\to+\infty}}R^{-1}\log M(R)=-\infty\ \ (M(R)=\sup_{0<\theta<\pi}|f(Re^{i\theta})|), \tag{4}$$

то $f(z)\equiv 0$, $z\in G^{(+)}$.

С двумя вышеприведенными результатами идейно неразрывно связана классическая теорема типа Фрагмена-Линделефа, принадлежащая Ф. и Р. Неванлиннам [4]. Ее существенным дополнением является следующая теорема, принадлежащая Л. Альфорсу и М. Хейнсу [5], [6].

Теорема Б. *Пусть функция $f(z)$ аналитична в $G^{(+)}$ и удовлетворяет условию (3).*

1°. *Тогда существует предел*

$$\beta = \lim_{R\to+\infty} R^{-1} \log M(R) \in [0, +\infty],$$

и, если

$$\alpha = \sup_{y>0} y^{-1} \log |f(x+iy)|,$$

то $\beta = \alpha^+$

2°. *В случае, когда* $\beta = \alpha^+ < +\infty$, *для всех* $\theta \in (0, \pi)$, *лежащих вне некоторого множества нулевой внешней логарифмической емкости, справедливо также соотношение*

$$\alpha \sin\theta = \lim_{R\to+\infty} R^{-1} \log |f(Re^{i\theta})|. \tag{5}$$

Отметим, что как приведенные результаты Р. Неванлинны, так и теорема Б. Альфорса-Хейнса справедливы для субгармонических в $G^{(+)}$ функций $u(z)$ после замены $\log|f(z)| = u(z)$. Аналогично, после такой замены верны для субгармонических в $G^{(+)}$ функций и все нижеприводимые результаты заметки.

2. Прежде чем перейти к изложению результатов заметки, укажем методы, с применением которых они получены. Изначально, путем исчерпания полукруга $G^{(+)}(R) = \{z: \operatorname{Im} z > 0, |z| < R\}$ сегментами вида $G^{(+)}_\rho(R) = \{z \in G^{(+)}(R): \operatorname{Im} z > \rho > \}$, получены формулы типа Ф. и Р. Неванлинн и Карлемана для аналитических в $G^{(+)}$ функций, ограниченного вида в $G^{(+)}(R)$. Эти формулы совпадают с аналогичными формулами Н. В. Говорова [7] (формулы (2.4), (2.15), однако основополагающее значение для результатов заметки имеет также конструктивное построение меры по отрезку $(-R, R)$ в тех же формулах, найденное благодаря вышеуказанному исчерпыванию. Результаты, анонсированные в заметке получены путем применения указанных формул и перехода $R \to +\infty$.

Обозначим через $N^a(\gamma)$ $(-1 < \gamma \leq 2)$ множество всех аналитических в $G^{(+)}$ функцию $f(z)$, удовлетворяющих условиям

$$\varliminf_{R\to+\infty} \frac{1}{R} \int_0^\pi \log^+ |f(Re^{i\theta})| \sin\theta d\theta \begin{cases} < +\infty, & \text{если } 1 < \gamma \leq 2 \\ = 0, & \text{если } -1 < \gamma \leq 1, \end{cases} \tag{6}$$

$$\varliminf_{R\to+\infty} \varliminf_{y\to+0} \int_{-R}^{R} \log^+ |f(x+iy)| \frac{dx}{(1+|x|)^\gamma} < +\infty. \tag{7}$$

Справедлива следующая теорема о параметрических представлениях классов $N^a(\gamma)$.

Теорема 1. 1°. *Класс* $N^a(\gamma)$ $(-1 < \gamma \leq 2)$ *совпадает с множеством функций, допускающих в* $G^{(+)}$ *представление вида*

$$f(z)=B(z)\exp\left\{-ihz+\frac{1}{i\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1+tz}{t-z}\,\frac{d\mu(t)}{1+t^2}+iC\right\}, \tag{8}$$

где

$$B(z)=\prod_k \frac{z-z_k}{z-\bar z_k}\,\frac{|1+z_k^2|}{1+z_k^2}$$

— произведение Бляшке, составленное по нулям $\{z_k\}\subset G^{(+)}$ *функции* $f(z)$, h *и* C *— вещественные числа, причем* $h\leqslant 0$, *если* $-1\leqslant\gamma<1$, *а* $\mu(t)$ *— функция, допускающая разложение* $\mu(t)=\mu^+(t)-\mu^-(t)$, *в котором* $\mu^{\pm}(t)$ *— монотонно неубывающие функции, подчиненные условиям*

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\mu^+(t)}{(1+|t|)^{\gamma}}<+\infty,\quad \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\mu^-(t)}{(1+|t|)^2}<+\infty. \tag{9}$$

2° *Функции* $\mu^{\pm}(t)$ *из представлоения (8)—(9) могут быть определены из соотношений*

$$\lim_{y\to+0}\int_0^t \log^{\pm}|f(x+iy)|\,dx=\mu^{\pm}(t)$$

$(a^-=a^+-a)$, *где пределы существуют и конечны для всех* $t\in\in(-\infty,+\infty)$. *При этом, будут справе дливы также соотношения*

$$\lim_{y\to+0}\int_{-\infty}^{+\infty}\log^+|f(x+iy)|\frac{dx}{(1+|x|)^{\gamma}}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\mu^+(x)}{(1+|x|)^{\gamma}},$$

$$\lim_{y\to+0}\int_{-\infty}^{+\infty}\log^-|f(x+iy)|\frac{dx}{(1+|x|)^2}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\mu^-(x)}{(1+|x|)^2}.$$

Кроме того, для любого конечного отрезка $[a,b]\subset(-\infty,+\infty)$ *будет справедливо равенство*

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}\mu=\overset{b}{\underset{a}{V}}\mu^++\overset{b}{\underset{a}{V}}\mu^-,$$

а для любой непрерывной на $[a,b]$ *функции* $g(x)$ *— соотношения*

$$\lim_{y\to+0}\int_a^b g(x)\log^{\pm}|f(x+iy)|\,dx=\int_a^b g(x)\,d\mu^{\pm}(x).$$

3°. *Для числа* h *из представления (8)—(9) (так называемого среднего типа функции* $f(z)$*) справедливы соотношения*

$$h^{\pm}=\frac{2}{\pi}\lim_{R\to+\infty}\frac{1}{R}\int_0^{\pi}\log^{\pm}|f(Re^{i\theta})|\sin\theta\,d\theta,$$

$$h = \overline{\lim_{y \to +\infty}}\, y^{-1} \log |f(iy)|,$$

а также, вне некоторого множества нулевой внешней логарифмической емкости — соотношение

$$h \sin \theta = \lim_{R \to +\infty} R^{-1} \log |f(Re^{i\theta})|.$$

Замечание 1. Как очевидно из представления (8)—(9), класс $N^a(2)$ совпадает с неванлинновским классом всех аналитических в $G^{(+)}$ функций ограниченного вида. Тем самым, условия (6)—(7) при $\gamma = 2$, в отличие от более частных условий (1)—(2) Р. Неванлинны, представляют собой полное описание роста уже *всего* класса аналитических в $G^{(+)}$ функций ограниченного вида, независимо от того, задана ли каким-либо образом функция на вещественной оси.

Замечание 2. Из представления (8)—(9) также непосредственно следует, что класс $N^{(a)}(0)$ совпадает с классом **N** В. И. Крылова [8] аналитических в $G^{(+)}$ функций $f(z)$, для которых

$$\sup_{y>0} \int_{-\infty}^{+\infty} \log^+ |f(x+iy)|\, dx < +\infty.$$

Замечание 3. Как показывают примеры аналитических в $G^{(+)}$ функций неограниченного вида $\exp\{z^{-1}\}$ и $\exp\{-(z+i)^{-2}\exp\{-iz\}\}$, ни одно из условий (6) или (7), взятое в отдельности, не обеспечивает ограниченный вид функции $f(z)$.

3. Справедлива следующая теорема единственности.

Теорема 2. *Пусть функция $f(z)$ аналитична в $G^{(+)}$ и существует последовательность $R_n \uparrow +\infty$ такая, что при любом $n > 1$*

$$\int_0^{\pi} \log^+ |f(R_n e^{i\theta})| \sin \theta d\theta < +\infty$$

и

$$\lim_{y \to +0} \int_{-R_n}^{R_n} \log^+ |f(x+iy)|\, dx < +\infty.$$

Тогда, если при каком-либо R_0 $(0 < R_0 < +\infty)$

$$\lim_{R \to +\infty} \left\{ \frac{1}{R} \int_0^{\pi} \log |f(Re^{i\theta})| \sin \theta d\theta + \right.$$

$$\left. + \underline{\lim_{y \to +0}} \int_{-R}^{R} g_{R_0}(R, x) \log |f(x+iy)|\, dx \right\} = -\infty, \tag{10}$$

где

$$g_{R_0}(R, x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{R^2}\right), & \text{при } R_0 \leqslant |x| \leqslant R \\ g_{R_0}(R, R_0), & \text{при } |x| < R_0, \end{cases}$$

то $f(z) \equiv 0$, $z \in G^{(+)}$.

Замечание. Легко видеть, что из теоремы 2, в частности, следует теорема А Р. Неванлинны. Однако имеет место также качественное различие условия (10) теоремы 2 от условий (3)—(4) Р. Неванлинны. А именно, в отличие от (3)—(4) условие (10) предполагает «превалирование» в некотором интегральном смысле скорости убывания функции $f(z)$ вблизи границы $G^{(+)}$ над скоростью ее возрастания.

4. Установлена также следующая теорема типа Фрагмена-Линделефа, более общая, чем теорема Б Альфорса-Хейнса.

Теорема 3. *Пусть функция $f(z)$ аналитична в $G^{(+)}$ и такова, что при любом R $(0 < R < +\infty)$*

$$\lim_{y\to+0}\int_{-R}^{R}\log^+|f(x+iy)|\,dx=0.$$

1°. *Тогда существуют и равны пределы*

$$\beta=\lim_{R\to+\infty}R^{-1}\log M(R)=\lim_{R\to+\infty}R^{-1}\log^- M(R)=$$

$$=\frac{2}{\pi}\lim_{R\to+\infty}\frac{1}{R}\int_0^{\pi}\log^+|f(Re^{i\theta})|\sin\theta d\theta\in[0,+\infty].$$

При этом, если

$$\alpha=\sup_{y>0}y^{-1}\log|f(x+iy)|,$$

то

$$\alpha^+=\sup_{y>0}y^{-1}\log^+|f(x+iy)|,$$

и $\beta=\alpha^+$.

2°. *В случае, когда $\beta=\alpha^+<+\infty$, имеем также*

$$\alpha=\frac{2}{\pi}\lim_{R\to+\infty}\frac{1}{R}\int_0^{\pi}\log|f(Re^{i\theta})|\sin\theta d\theta,$$

и, кроме соотношения (5), вне некоторого множества нулевой внешней логарифмической емкости справедливо также соотношение

$$\alpha^+\sin\theta\lim_{R\to+\infty}=R^{-1}\log^+|f(Re^{i\theta})|.$$

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 30. V 1988

ЛИТЕРАТУРА

1. *R. Nevanlinna.* Über die Eigenschaften meromorpher Functionen in einem Wincelraum, Acta Soc. Sci. Fennicae, 50, № 12, 1925, 3—45.
2. *R. P. Boas.* Entire Functions, New York, Ac. Press, 1954.
3. *Р. Неванлинна.* Однозначные аналитические функции, М.—Л., ОГИЗ, ГИТТЛ. 1941.

4. *F. Nevanlinna, R. Nevanlinna.* Über die Eigenschaften analytischer Functionen in der Umgebung einer singulären Stelle oder Linie. Acta Soc. Sci. Fennicae, 1922, 50, № 5, 3—46.
5. *M. Heins.* On the Phragmen — Lindelöf principle. Trans. Amer. Math. Soc., 60, 1946, 238 — 244.
6. *L. Ahlfors, M. Heins.* Questions of regularity connected with the Phragmen—Lindelöf principle, Ann. of Math., 50, № 2, 1949, 341 — 346.
7. *Н. В. Говоров.* Краевая задача Римана с бесконечным индексом. М., «Наука», 1986.
8. *В. И. Крылов.* О функциях, регулярных в полуплоскости, Матем. сб., 6 (48), № 1, 1939, 95—138.