ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XXIII, № 4, 1988 Математика

УДК 519.2.18.5

Г. Ю. ПАНИНА

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ n-МЕРНОГО ТЕЛА В ВИДЕ СУММЫ (n—1)-МЕРНЫХ ТЕЛ

Введение

В статье получено разложение n-мерных выпуклых гладких центрально-симметричных тел (n четно, $n \geqslant 4$) в виде интегральной суммы Минковского тел меньшей размерности.

Для осуществления такого разложения построен аппарат так называемых веджевых плотностей трансляционно-инвариантных мер и ядер выпуклых тел. Этот аппарат в значительной степени опирается на разработанный ранее (см. [1]), но отличен от последнего.

Для гладких тел K получено представление вида

$$K=\int [K^+(\omega)-K^-(\omega)]\,d\omega,$$

где $K^\pm(\omega)$ — тела, лежащие в гиперплоскости ω. Они указываются явно, в терминах опорной функции.

Этот результат относится к общей теории выпуклых тел, но имеет интересное приложение в теории зоноидов. В качестве несложного следствия (сл. 2 к теореме 6.1) получается гипотеза Вейля (см. [2]) о характеризации зоноидов для случая четной размерности пространства.

Автор выражает глубокую признательность Р. В. Амбарцумяну и его коллегам за пристальное внимание к данной работе.

§ 1. Предварительные сведения

Рассмотрим множество гиперплоскостей E в пространстве $\mathbf{R}_n$. Пусть на E задана мера μ, инвариантная относительно параллельных переносов $\mathbf{R}^n$.

Пусть Ω^{n-1} — единичная сфера в $\mathbf{R}^n$ с площадью S_{n-1}. Каждую гиперплоскость $\omega \in E$ можно задать парой координат: $\omega_0 \in \Omega^{n-1}$ — нормаль ω.

p — расстояние до начала координат O.

В дальнейшем будем отождествлять точку ω_0 на Ω^{n-1} с гиперплоскостью, проходящей через O и имеющей нормаль ω_0.

Каждая трансляционно-инвариантная мера μ однозначно представляется в виде

$$d\mu(\omega)=d\mu^*(\omega_0)\times dp,$$

где μ^* — некоторая симметричная мера на Ω^{n-1}.

Если в качестве $d\mu^*(\omega_0)$ взять $d\omega_0$, то мы получим т. наз. стандартную инвариантную меру $\mu_{инв}$. Она будет инвариантна относительно всех движений $\mathbf{R}^n$.

Как показано в [1] каждой мере μ соответствует ее т. наз. веджевая плотность ρ_μ. $\rho=\rho_\mu$ — это функция на множестве флагов F. Флагом называется пара.

f (прямая L, проходящая через O; гиперплоскость ω, содержащая L).

ρ аддитивно зависит от μ и может быть вычислена с помощью следующей формулы:

$$\rho_\mu(f(L, \omega_0)) = \int_{S^{n-1}} \frac{\sin^2(\omega\cap\omega_0, \widehat{\ } L)}{\cos^{n-3}(\omega, \widehat{\ }\omega_0)}\, d\mu^*(\omega).$$

Пусть $K\subset\mathbf{R}^n$ — выпуклое тело,

$$[K] = \{\omega\in E: \omega\cap K\neq\varnothing\}.$$

В статье [1] найдено выражение для $\mu([K])$ в терминах веджевой плотности ρ. Нам потребуется это выражение для многогранных K в § 2.

§ 1. $\mu([K])$ для многогранников

На протяжении всей статьи n — четное число, $n\geqslant 4$. Пусть $K\subset\mathbf{R}^n$ — выпуклый многогранник, $\omega\in E$, ω пересекает K. Тогда $K\cap\omega$ — $(n-1)$-мерный многогранник (случай касания мы не рассматриваем).

Если $\Delta_j^i(K)$ — i-мерные грани K, то согласно формуле Эйлера, примененной к $K\cap\omega$

$$\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{i+1}\sum_j I_{[\Delta_j^i(K)]}(\omega) = 2I_{(K)}(\omega). \tag{1.1}$$

Здесь $I_{[\cdot]}$ — индикаторная функция $[\cdot]$.

Проинтегрировав (1.1) по $d\mu(\omega)$, получаем

$$2\mu([K]) = \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{i+1}\sum_j \mu([\Delta_j^i]). \tag{1.2}$$

В правую часть (1.2) входят меры множеств гиперплоскостей, пересекающих многогранники размерности не выше $(n-1)$.

Коль скоро (1.2) выполняется для любой трансляционно-инвариантной меры μ, то верно

$$K = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_j(-1)^{i+1}\Delta_j^i(K) \tag{1.3}$$

(это равенство следует понимать как равенство опорных функций).

§ 2. Веджевая плотность ρ

Плоскостью мы будем называть плоскость размерности $n-2$. Равенство (1.2) дает возможность вычисления $\mu([K])$ для n-мерных многогранников, если известен способ вычисления $\mu([\Delta])$, где Δ — $(n-1)$-мерный многогранник в R^n. Пусть $\Delta\subset\omega_0\in E$. Мера μ на E индуцирует меру $\bar{\mu}$ на множестве плоскостей в ω_0, причем для плоскости $e\subset\omega_0$

$$d\bar{\mu}^*(e)=\int\limits_{\omega\supset e}|\sin(\omega,\widehat{\ }\omega_0)|^{n-1}\,d\mu^*(\omega).$$

В статье [1] было введено понятие внешнего веджа многогранника Δ. С каждым внешним веджем W в [1] связывается некоторое множество плоскостей $\Phi(W)$. При этом справедливо:

$$\mu([\Delta])=\bar{\mu}([\Delta])=\frac{1}{S_{n-3}}\sum_{W_l}F_{\omega_0}(W_l),\tag{2.1}$$

где W_l — внешние веджи Δ с ребрами ν_l;

$$F_{\omega_0}(W_l)=|\nu_l|\int\limits_{\Phi(W_l)}\rho_{\omega_0}(f(\nu_l,\ e))\,de.$$

Здесь $\rho_{\omega_0}(f)$ — веджевая плотность меры μ в гиперплоскости ω_0:

$$\rho_{\omega_0}(f(\nu,\ e_0))=\int\limits_{\Omega^{n-2}}\frac{\sin^2(e\cap e_0,\widehat{\ }\nu)}{\cos^{n-4}(e,\widehat{\ }e_0)}\,d\bar{\mu}^*(e_*)=$$

$$=\int\limits_{\Omega^{n-1}}\frac{\sin^2(\omega\cap\omega_0\cap e_0,\widehat{\ }\nu)}{\cos^{n-4}(e_0,\widehat{\ }\omega\cap\omega_0)}|\sin(\omega,\widehat{\ }\omega_0)|^{n-1}\,d\mu^*(\omega).$$

Удобно ввести новое понятие флага: с этого момента флагом $f(L,\ e,\ \omega)$ будем называть тройку:

f(прямая L, содержащая начало координат O; плоскость e, содержащая L; гиперплоскость ω, содержащая e).

Тогда, полагая

$$\rho(f(L,\ e,\ \omega))=\rho_\omega(f(L,\ e)),$$

имеем

$$F(W_l)=|\nu_l|\int\limits_{\Phi(W_l)}\rho(f(L,\ e,\ \omega))\,de,$$

где ω — гиперплоскость, содержащая W_l.

Сопоставляя (1.2) и (2.1), можно выразить $\mu([K])$ через $F(W_l)$, где W_l пробегает множество внешних веджей граней K размерности не выше $(n-1)$:

$$\mu([K])=\frac{1}{2S_{n-3}}\sum_{l=1}^{n-1}(-1)^{l+1}\sum_j\sum_k F(W^l_{jk}),\tag{2.2}$$

где W^l_{jk} — внешние веджи Δ^l_j.

В дальнейшем нам будет удобно пользоваться мерой df на множестве флагов, инвариантной относительно евклидовых движения R^n.

Удобно представлять меру df следующим образом:

Пусть $d\omega$ — стандартная инвариантная мера на множестве гиперплоскостей, содержащих O.

$dL(\omega)$ — стандартная инвариантная мера на множестве прямых в ω, содержащих O.

$de(L, \omega)$ — стандартная инвариантная мера на множестве плоскостей из ω, содержащих L.

Тогда

$$df(L, e, \omega) = d\omega\, dL(\omega)\, de(\omega, L).$$

В дальнейших вычислениях будет полезен

Пример. Пусть $\mu = \mu_{\text{инв}}$ — стандартная инвариантная мера на E: $d\mu^*_{\text{инв}} = d\omega$, вычислим ее веджевую плотность $\rho_{\text{инв}}$:

$$\rho_{\text{инв}}(f(L, e, \omega_0)) = \int\limits_{S^{n-1}} \frac{\sin^3(\omega \cap \omega_0 \cap e, \widehat{L})}{\cos^{n-4}(\omega \cap \omega_0, \widehat{e})} |\sin(\omega, \widehat{\omega_0})|^{n-1} d\omega =$$

$$= \frac{S_{n-3}}{n-2} \int\limits_0^{\pi} \sin_\alpha^{n-1} d\alpha = \frac{S_{n-3}\, n!}{(n-2)\left(\left[\frac{n}{2}\right]!\right)^2 2^{n-2}}.$$

§ 3. Основная теорема

Для гиперплоскости $\omega = \omega_0$ из R^n пусть $\Phi(\omega)$ — множество флагов с гиперплоскостью ω.

Для

$$f_0 = f_0(L_0, e_0, \omega) \in \Phi(\omega)$$

$$\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$\beta \in \Omega_+^{n-3}$ — верхняя полусфера Ω^{n-3}, положим $L_0^\perp$ — плоскость в ω, ортогональная L_0, $f_\alpha(f_0)$ — флаг, полученный из f_0 поворотом на угол α относительно e_0, $\omega_\alpha(f_0)$ — поворот ω на угол α относительно e_0, $e_{\alpha,\beta}(f_0)$ — плоскость из ω_α, образующая угол β с e_0 и содержащая L, $\omega_{\alpha,\beta}(f_0)$ — поворот ω на угол α относительно $e_{0,\beta}(f_0)$

$$f_{\alpha,\beta}(f_0) = f(L_0, e_{\alpha,\beta}(f_0), \omega_\alpha(f_0)).$$

В этих обозначениях справедлива

Теорема 3.1. *Для центрально-симметричного выпуклого тела $K \subset R^n$ класса C^n-гладкости с опорной функцией H существует непрерывная функция $A_k(f)$, заданная на множестве флагов F, такая, что*

1) *для любой трансляционно-инвариантной меры μ с веджевой плоскостью ρ:*

$$\mu([K]) = \int\limits_{P} A_k(f)\,\rho(f)\,df;$$

2) *$A_k(f(L, e, \omega))$ зависит лишь от значений функции H и ее первых n производных в точке ω.*

Замечание. Как станет ясно из доказательства функцию A_k можно вычислить явно:

$$A_k(f) = \sum_{i=0}^{n/2} C_n^{2i}\left[(-1)^{\frac{n-2i}{2}+1}\cdot\frac{L(n-2)(n-1)}{n!\,S_{n-3}^2}+\right.$$

$$\left.+\,I_n(2_i)\cdot\frac{2^{2n+1}\cdot(n-2)\left(\left[\frac{n}{2}\right]!\right)^2}{n!\cdot S_{n-2}\cdot S_{n-3}^n}\right].$$

$$\cdot\int\limits_{\Omega_+^{n-3}}\sum_{i=0}^{n/2} C_n^{2i}(-1)^{\frac{n-2i}{2}}\,\frac{8(n-2)(n-1)}{n!\,S_{n-3}^3}\,H_\beta^{(2i)}(f)\,d\beta.$$

Здесь

$$I_n(2i) = \begin{cases}1, & \text{если } 2i = n,\\ 0, & \text{иначе;}\end{cases}$$

$$H^{(i)}(f) = \frac{d^i}{d\alpha^i}\bigg|_{\alpha=0} H(\omega_\alpha(f)),\quad H_\beta^{(i)}(f) = \frac{d^i}{d\alpha^i}\bigg|_{\alpha=0} H(\omega_{\alpha,\beta}(f)).$$

Доказательство теоремы. Зафиксируем гиперплоскость ω. Построим прямой круговой конус D с основанием — единичным шаром $D_0\subset\omega$ и с высотой $h=\operatorname{tg}\alpha$. Пусть на D_0 случайным образом брошены с независимыми и равномерными распределениями n точек. D_{n_0} — их выпуклая оболочка. D_n — конус с основанием D_{n_0} и с той же вершиной, что и D.

Тогда

$$\mu([D]\setminus[D_0]) = \lim_{n\to\infty} E\mu([D_n]\setminus[D_0]) =$$

D_n и D_{n_0} — многогранники. Применим к ним формулу (2.2), а затем из соображений симметрии получим

$$= A_1(\alpha)\int\limits_{\Phi(\omega)}\rho(f_\alpha(f))\,df(\omega) - S_{n-2}\frac{n!\,S_{n-3}}{(n-2)\left[\left(\frac{n}{2}\right)!\right]^2 2^{n-2}}\int\limits_{\Phi(\omega)}\rho(f)\,df(\omega)+$$

$$+\frac{S_{n-2}\,n!\cos\alpha}{\left[\left(\frac{n}{2}\right)!\right]^2 2^{n-2}(n-2)}\int\limits_{\Phi(\omega)}\int\limits_{\Omega^{n-3}}\rho(f_{\alpha,\beta}(f))\,df(\omega).$$

Здесь $df(\omega) = dL(\omega)\,de(\omega, L)$ — инвариантная мера на $\Phi(\omega)$. Величину $A_1(\alpha)$ можно вычислить, подсчитав независимо

$$\mu_{\text{инв}}([D] \setminus [D_0]) = S_{n-2} \frac{\alpha^n}{(n-1)(n-2)} + o(\alpha^n) \text{ при } \alpha \to 0$$

и приравняв к соответствующему выражению.

При этом получаем

$$A_1(\alpha) = \frac{\alpha^n}{(n-1)(n-2) S_{n-3}} - \frac{S_{n-2} S_{n-3} n! \cos\alpha}{(n-2)\left[\left(\frac{n}{2}\right)!\right]^2 2^{n-1}} + o(\alpha^n). \quad (3.1)$$

Для краткости обозначив

$$A_2(\alpha) = \frac{S_{n-2} n! \cos\alpha}{\left[\left(\frac{n}{2}\right)!\right]^2 2^{n-1}(n-2)}, \quad A_3(\alpha) = -\frac{S_{n-2} S_{n-3} n!}{\left[\left(\frac{n}{2}\right)!\right]^2 2^{n-2}(n-2)},$$

получаем

$$\mu([D]\setminus[D_0]) = A_1(\alpha) \int_{\Phi(\omega)} \rho(f_\alpha(f))\, df(\omega) +$$

$$+ A_2(\alpha) \int_{\Phi(\omega)} \int_{\Omega_+^{n-3}} \rho(f_{\alpha,\beta}(f))\, d\beta\, df(\omega) + A_3 \int_{\Phi(\omega)} \rho(f)\, df. \quad (3.2)$$

Предположим, что мера μ обладает плотностью λ относительно стандартной инвариантной меры $\mu_{\text{инв}}$.

Тогда при $\alpha \to 0$

$$\mu([D] \setminus [D_0]) = \lambda(\omega)\, \mu_{\text{инв}}([D] \setminus [D_0]) + o(\alpha^n).$$

Значит

$$\lambda(\omega) = \frac{\left.\frac{d^n}{d\alpha^n}\right|_{\alpha=0} \mu([D] \setminus [D_0])}{\left.\frac{d^n}{d\alpha^n}\right|_{\alpha=0} \mu_{\text{инв}}([D]\setminus[D_0])}.$$

Продифференцируем тождество (3.2)

$$\left.\frac{d^n}{d\alpha^n}\right|_{\alpha=0} \mu([D] \setminus [D_0]) = \int_{\Phi(\omega)} \sum_{l=0}^{n/2} C_n^{2l} A_1^{(n-2l)} \rho^{(2l)}(f)\, df(\omega) +$$

$$+ \int_{\Phi(\omega)} \int_{\Omega_+^{n-3}} \sum_{l=0}^{n/2} C_n^{2l} A_2^{(n-2l)} \rho_\beta^{(2l)}(f)\, d\beta\, df(\omega).$$

Здесь

$$A_i^{(k)} = \left.\frac{d^k}{d\alpha^k}\right|_{\alpha=0} A_i, \quad \rho^{(l)}(f) = \left.\frac{d^l}{d\alpha^l}\right|_{\alpha=0} \rho(f_\alpha(f)),$$

$$\rho_\beta^{(l)}(f) = \left.\frac{d^l}{d\alpha^l}\right|_{\alpha=0} \rho(f_{\alpha,\beta}(f)), \quad \left.\frac{d^n}{d\alpha^n}\right|_{\alpha=0} \mu_{\text{инв}}([D] \setminus [D_0]) = \quad (33)$$

$$=|\Phi(\omega)|\,\rho_{\text{инв}}(f)\left(A_1^{(n)}+A_2^{(n)}\frac{S_{n-3}}{2}\right)=$$

$$=\frac{S_{n-2}S_{n-3}}{4}\cdot\frac{S_{n-3}\,n!}{(n-2)\left(\left[\frac{n}{2}\right]!\right)^2 2^{n-2}}\,\frac{S_{n-3}}{2}\,\frac{n!}{(n-1)\,(n-2)}=$$

$$=\frac{S_{n-2}S_{n-3}^3(n!)^2}{(n-2)^2(n-1)\left(\left[\frac{n}{2}\right]!\right)^2 2^{n+1}}.$$

Отсюда получаем

$$\lambda(\omega)=\frac{\left(\left[\frac{n}{2}\right]!\right)^2 2^{n+1}(n-2)^2(n-1)}{(n!)^2\,S_{n-2}S_{n-3}}\times$$

$$\times\int\limits_{\Phi(\omega)}\left[\sum_{l=0}^{n/2}C_n^{2l}A_1^{(n-2l)}\rho^{(2l)}(f)+\int\limits_{\Omega_+^{n-3}}\sum_{l=0}^{n/2}C_n^{2l}A_2^{(n-2l)}\rho_\beta^{(2l)}(f)\,d\beta\right]df(\omega).$$

Мы получили выражение для плотности меры через ее веджевую плотность. Пользуясь этим, вычислим теперь $\mu([K])$:

$$\mu([K])=\int\limits_{\Omega^{n-1}}H(\omega)\lambda(\omega)\,d\omega=$$

$$=\frac{\left(\left[\frac{n}{2}\right]!\right)^2 2^{n+1}(n-2)^2(n-1)}{(n!)\,S_{n-2}S_{n-3}^3}\int\limits_{\Omega^{n-1}}\int\limits_{\Phi(\omega)}\left[\sum_{l=0}^{n/2}C_n^{2l}A_1^{(n-2l)}\rho^{(2l)}(f)\,H(\omega)+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{\Omega_+^{n-3}}\sum_{l=0}^{n/2}C_n^{2l}A_2^{(n-2l)}\rho_\beta^{(2l)}(f)\,H(\omega)\,d\beta\right]df(\omega)\,d\omega=$$

$$=\frac{\left(\left[\frac{n}{2}\right]!\right)^2 2^{n+1}(n-2)^2(n-1)}{(n!)^2S_{n-2}\,S_{n-3}^3}\int\limits_{F}\left[\sum_{l=0}^{n/2}C_n^{2l}A_1^{(n-2l)}H^{(2l)}(f)\,\rho(f)\,df+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{\Omega_+^{n-3}}\sum_{l=0}^{n/2}C_n^{2l}A_2^{(n-2l)}H_\beta^{(2l)}(f)\,\rho(f)\,d\beta\right]df,$$

где

$$H^{(l)}(f)=\left.\frac{d^l}{d\alpha^l}\right|_{\alpha=0}H(\omega_\alpha(f)),\tag{3.4}$$

$$H_\beta^{(l)}(f)=\left.\frac{d^l}{d\alpha^l}\right|_{\alpha=0}H(\omega_{\alpha,\beta}(f)).$$

Вычислим явно $A_j^{(n-2l)}$ и произведем сокращения

$$\mu([K])=\int_{F}\rho(f)\Big(\sum_{i=0}^{n/2}C_n^{2i}\Big[(-1)^{\frac{n-2i}{2}+1}\frac{4(n-2)(n-1)}{n!\,S_{n-3}^2}+$$

$$+I_n(2i)\frac{2^{?n+1}(n-2)\left(\left[\frac{n}{2}\right]!\right)^2}{n!\,S_{n-2}S_{n-3}^4}\Big]H^{(2i)}(f)+$$

$$+\int_{\Omega_+^{n-3}}\sum_{i=0}^{n/2}C_n^{2i}(-1)^{\frac{(n-2i)}{2}}\frac{8(n-2)(n-1)}{n!\,S_{n-3}^3}H_3^{(2i)}(f)\,df.$$

Теорема доказана для мер, обладающих плотностью, а следовательно и для всех мер.

§ 4. Ядра выпуклых тел

Определение 4.1. Функция A, заданная на множестве флагов F, называется ядром выпуклого центрально-симметричного тела $K\subset \mathbf{R}$ если для любой трансляционно-инвариантной меры μ на E с веджевой плотностью ρ

$$\mu([K])=\int_{F}A(f)\rho(f)\,df.$$

Ядро тела K определено неоднозначно. Действительно, если A—ядро K, A_0 таково, что для любой μ

$$\int_{F}A_0(f)\rho(f)\,df=0,$$

то $A+A_0$ тоже является ядром K. Ядро A однозначно определяет тело K.

Очевидно, что ядро тела аддитивно зависит от K: если A_1 и A_2— ядра тел K_1 и K_2, то A_1+A_2 служит ядром K_1+K_2.

Нам известен способ вычисления некоторого ядра для довольно широкого класса тел: формула (2.2) дает представление о ядрах n-мерных многогранников, теорема 3.1 дает пример ядра гладкого тела.

Основной результат статьи [1] описывает ядра гладких тел из $\mathbf{R}^n$ размерности $(n-1)$. При этом очевидно, что если $K\subset\omega_0\in E$— тело размерности не выше $(n-1$, то K обладает таким ядром A, что

$$A(f(L,\ e,\ \omega))=0,\ \text{при}\ \omega\neq\omega_0. \qquad (4.1$$

Обратное тоже верно: если тело K обладает ядром, которое удовлетворяет условию (4.1), то $K\subset\omega_0$. Это замечание весьма существенно и будет использоваться в § 5.

§ 5. Представление n-мерного тела в виде интегральной суммы $(n-1)$-мерных тел

Пусть тело K удовлетворяет условиям теоремы 3.1. Наша задача — представить K в виде интегральной суммы тел меньшей размерности.

Это равносильно представлению ядра $A_k(f)$ в виде суммы ядер тел меньшей размерности.

Для каждого $\omega_0 \in \Omega_+^{n-1}$ определим

$$B_{\omega_0}(f(L, e, \omega)) = A_k(f(L, e, \omega))\,\delta_{\omega_0}(\omega),$$

где δ_{ω_0} — дельта-функция, сосредоточенная в точке ω_0. В таком случае

$$A_k(f) = \int\limits_{\Omega_+^{n-1}} B_{\omega_0}(f)\,d\omega_0.$$

Если $B_{\omega_0}(f)$ является ядром некоторого выпуклого тела, то это тело $(n-1)$-мерно (лежит в ω_0), и, следовательно, задача о разложении в этом случае решена.

В общем случае $B_{\omega_0}(f)$ — не обязательно ядро выпуклого тела, но $B_{\omega_0}(f)$ всегда является разностью ядер $(n-1)$-мерных выпуклых тел. Докажем это. Для каждого $\xi \in \Omega^{n-1}$ пусть μ_ξ такова, что $\mu_\xi^* = \delta_\xi$ — дельта-мера, сосредоточенная в точке ξ; ρ_ξ — веджевая плотность μ_ξ. Тогда

$$\mu_\xi([K]) = 2\,H_k(\xi),$$

где $H_k(\xi)$ — опорная функция K в направлении ξ.

Для каждого ω_0 образуем

$$H_{\omega_0}(\xi) = \frac{1}{2}\int\limits_{F} B_{\omega_0}(f)\,\rho_\xi(f)\,df = \frac{1}{2}\int\limits_{\Phi(\omega_0)} A_k(f)\,\rho_\xi(f)\,df(\omega_0).$$

Здесь $df(\omega_0)$ — инвариантная относительно движений мера на множестве флагов, лежащих в ω_0. При этом

$$df = d\omega_0\,df(\omega_0).$$

Представим $H_{\omega_0}(\xi)$ в виде разности двух выпуклых функций, являющихся опорными функциями тел, лежащих в ω_0:

$$H_{\omega_0}(\xi) = H_{\omega_0}^+(\xi) - H_{\omega_0}^-(\xi).$$

$H_{\omega_0}^+$ — опорная функция $K_{\omega_0}^+ \subset \omega_0$; $H_{\omega_0}^-$ — опорная функция $K_{\omega_0}^- \subset \omega_0$.

Пусть $B_{\omega_0}^+$ — ядро тела $K_{\omega_0}^+$. Тогда $B_{\omega_0}^- = B_{\omega_0}^+ - B_{\omega_0}$ — ядро $K_{\omega_0}^-$. Итак, получено представление

$$A_k(f) = \int\limits_{\Omega_+^{n-1}} [B_{\omega_0}^+(f) - B_{\omega_0}^-(f)]\,d\omega_0, \tag{5.1}$$

где $B_{\omega_0}^\pm$ — ядро некоторого выпуклого центрально-симметричного тела $K_{\omega_0}^\pm$, лежащего в гиперплоскости ω_0.

$B^{\pm}_{\omega_0}$ зависит лишь от значений $A_k(f)$, где $f\subset\omega_0$, а, значат, лишь от значений H_k и ее первых n производных в точке ω_0. Поскольку имеет место представление (5.1), то

$$K = \int\limits_{\Omega_+^{n-1}} [K_\omega^+ - K_\omega^-]\, d\omega. \tag{5.2}$$

Это равенство следует понимать как равенство опорных функций.

§ 6. Представление тела K в виде интегральной суммы отрезков

Как известно (см. [3]), гладкое центрально-симметричное выпуклое тело $A\subset\mathbf{R}^{n-1}$ представимо в виде

$$A = \int\limits_{\Omega_+^{n-2}} P_\xi\,(H_A)\,\bar{\xi}\,d\xi,$$

где $\bar{\xi}$ — единичный отрезок с направлением ξ, H_A — опорная функция A, P_ξ — некоторый линейный функционал.

Если известен вид P_ξ для размерности $(n-1)$, то получим его вид для размерности n следующим образом: представим n-мерное тело вначале в виде суммы $(n-1)$-мерных тел, а затем каждое $(n-1)$-мерное тело с помощью P_ξ представим в виде интегральной суммы отрезков.

Теорема 6.1. *Для выпуклого тела $K\subset\mathbf{R}^n$, удовлетворяющего условиям теоремы* 4.1, *верно:*

$$K = \int \mathbf{P}_\xi\,(K)\,\bar{\xi}\,d\xi,$$

где

$$\mathbf{P}_\xi\,(K) = \int\limits_{\bar{\xi}\in\omega} P_\xi\,(H)\,d\xi,\quad H_\omega = H_\omega^+ - H_\omega^- \quad (\textit{см.}\ \S\ 5).$$

Следствие 1. Значение $\mathbf{P}_\xi\,(K)$ определяется поведением опорной функции H_k в окрестности точек ω, содержащих $\bar{\xi}$.

Следствие 2. Если тело K с опорной функцией H_k таково, что для любой сферы $\Omega = \Omega^{n-2}\subset\Omega^{n-1}$ существует окрестность $\varepsilon(\Omega)$ и зоноид K_Ω с опорной функцией H_{K_Ω} такой, что $H_{K_\Omega} = H_K$, $\varepsilon(\Omega)$, то тело K тоже является зоноидом.

Доказательство. Для тел класса C^n-гладкости утверждение следует непосредственно из следствия 1 к теореме 6.1. Для произвольных тел результат получается путем аппроксимации их гладкими.

Следствие 2 дает доказательство гипотезы Вейля (см. [2]) для случая четной размерности. Формулировка гипотезы в точности совпадает с формулировкой следствия.

ЛОМИ АН СССР
им. В. А. Стеклова

Поступила 6. I. 1988

Գ. ՅՈՒ. ՊԱՆԻՆԱ. Ուռուցիկ մարմինների ներկայացումը նվազ չափողականություն ունեցող մարմինների գումարի տեսքով *(ամփոփում)*

Հոդվածը նվիրված է ուռուցիկ մարմինների ինտեգրալային ներկայացումներին։ Օգտագործված է սեպային խտությունների ապարատը։ Հիմնական արդյունքն է՝ ուռուցիկ մարմինների ներկայացումը նվազ չափողականություն ունեցող մարմինների գումարի տեսքով։ Որպես հետևանք ստացվել է զոնոիդների բնույթին վերաբերվող Վայլի վարկածի ապացույցը։

G. J. PANINA. *On the representation of central symmetric body by a sum of less-dimensional bodies* (summary)

The article is devoted to convex body integral representations. The method of wedge dencities and nuclei is developed. The main result is the representation of central by symmetric even-dimensional convex body as a sum of less-dimensional bodies.

A positive solution of Weil's zonoid characterisation hypotheses is obtained as a result.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Г. Ю. Панина.* Трансляционно-инвариантные меры и выпуклые тела в R^n, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., XXII № 5, 1987.
3. *W. Weil.* Blaschkes Problem der lokalen Charakterisierng von Zonoiden. Arch. Math., 29, 1977, 655—659.
3. *А. В. Погорелов.* Четвертая проблема Гильберта, М., «Наука», 1974.