ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XXIII, № 4, 1988 Математика

УДК 517.55

П. Л. ПОЛЯКОВ

НУЛИ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ КОНЕЧНОГО ПОРЯДКА В ПОЛИДИСКЕ

Пусть f — голоморфная функция в полидиске $D^n = \{\zeta \in \mathbf{C}^n : |\zeta_i| \leqslant 1,\ i = 1, \cdots, n\}$. Ее порядок определяется следующим образом [1], [2]:

$$\operatorname{ord} f = \inf \left\{ \alpha : \int\limits_{\{|\zeta_1| = \cdots = |\zeta_n|\}} (\rho(\zeta))^{-1+\alpha} \ln^+ |f(\zeta)|\, d\lambda(\zeta) < \infty \right\},$$

где $\lambda(\zeta)$ — мера Лебега на $\{\zeta : |\zeta_1| = \cdots = |\zeta_n|\}$, $\rho(\zeta) = \operatorname{dist}(\zeta, (bD)^n)$ и $\ln^+ |f(\zeta)| = \max \{\ln f(\zeta), 0\}$.

Пусть M — аналитическое подмножество в D^n чистой размерности $n-1$. μ — положительный поток типа (1, 1), соответствующий интегрированию на M форм типа $(n-1, n-1)$. Порядок M определяется следующим образом [1]:

$$\operatorname{ord} M = \inf \left\{ \alpha : \int\limits_{\{|\zeta_1| = \cdots = |\zeta_n|\}} (\rho(\zeta))^{1+\alpha} \mu(\zeta) \wedge \varphi'(\zeta) < \infty \right\},$$

где $\varphi'(\zeta) = \sum\limits_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} d\varphi_1(\zeta) \wedge, \underset{\wedge}{\cdots}, \wedge d\varphi_n(\zeta)$, и $\varphi_i(\zeta) = \operatorname{Arg} \zeta_i$.

Имеет место известная теорема М. Джрбашяна [3].

Теорема. *Для дискретного подмножества M в D^1 выполняется равенство*

$$\operatorname{ord} M = \min_{\{f : Z(f) = M\}} \operatorname{ord} f,$$

где $Z(f) = \{\zeta : f(\zeta) = 0\}$.

Обобщение результата М. Джрбашяна на строго псевдовыпуклые области в $\mathbf{C}^n$ было получено Ш. Даутовым и Г. Хенкиным в [4]. Обобщение для случая бидиска получено в 1983 г. в работах [5], [8]. Для случая полидиска в $\mathbf{C}^n$ из многомерной формулы Йенсена [1], [2] вытекает

Предложение 1. *Если $M = \{\zeta : f(\zeta) = 0\}$, то* $\operatorname{ord} M \leqslant \operatorname{ord} f$.

Однако вопрос о построении функции f, обращающейся в нуль на $M \subset D^n$ и такой, что $\operatorname{ord} f = \operatorname{ord} M$, оставался открытым. Настоящая работа посвящена решению этого вопроса.

В работе доказывается следующая

Теорема 1. *Для любого аналитического подмножества M в D^n чистой размерности $n-1$ выполняется равенство*

$$\operatorname{ord} M = \min_{\{f: Z(f) = M\}} \operatorname{ord} f.$$

Эта теорема дает ответ на вопрос, поставленный в работе В. Штолля [1] и частичное решение задачи М. Джрбашяна об описании нулей голоморфных функций класса Неванлинны-Джрбашяна $N^a(D^n)$, определенного условием

$$N^a(D^n) = \left\{ f: \int_{\{|\zeta_1| = \cdots = |\zeta_n|\}} (\rho(\zeta))^{-1+a} \ln^+ |f(\zeta)| \, d\lambda(\zeta) < \infty \right\}.$$

Мы доказываем теорему.1 как следствие двух других теорем, формулируемых в терминах классов $N^a(D^n)$. Для формулировки этих теорем нам потребуются следующие обозначения:

$$D(\delta) = \left\{ \zeta \in D: \rho_i \Big/ \sum_{k=1}^{n} \rho_k > \delta, \ i = 1, \cdots, n \right\},$$

где $0 \leqslant \delta \leqslant 1/n$ и $\rho_k = 1 - |\zeta_k|$;

$$V_M^a(\delta) = \int_{D(\delta)} (\rho_{\min})^a \cdot \mu \Lambda \left(\sum_{l=1}^{n} \rho_{\widehat{l \, l \neq l}} \cdot \Lambda \frac{\tau_l}{\rho_l} \right),$$

где M — аналитическое множество, μ — соответствующий положительный поток, $\tau_l = \sqrt{-1}\, d\zeta_l \Lambda d\bar{\zeta}_l$, $\rho_{\min}(\zeta) = \min_k \rho_k(\zeta)$, $\rho_{\widehat{I}} = \sum_{k \in I} \rho_k$, I—мультииндекс.

Теорема 2. *Пусть $M \subset D^n$ — аналитическое подмножество чистой размерности $n-1$. Тогда для существования голоморфной функции $f \in N^a(D^n)$ такой, что $M = \{\zeta: f(\zeta) = 0\}$, необходимо, чтобы*

$$V_M^a(\delta) = O\left(\frac{(\ln \delta)^{n-2}}{\delta} \right), \tag{1}$$

и достаточно, чтобы:

при $\alpha > 0$

$$\int_0^{1/n} V_M^a(\delta)\, d\delta = C(\mu) < \infty, \tag{2}$$

при $\alpha = 0$

$$\int_0^{1/n} V_M(\delta) \cdot (\ln \delta)^{\nu(n) + \varepsilon} d\delta = C(\mu) < \infty, \tag{3}$$

где в случае $\alpha = 0$ $\nu(n) = \sum_{l=1}^{n-1} (n-l) \cdot 2^{l-1}$, $\varepsilon > 0$, а под $N(D^n)$ понимается класс Неванлинны, состоящий из голоморфных функций, удовлетворяющих условию

$$\sup_{r<1} \left\{ \int_{\{|\zeta_1| = \cdots = |\zeta_n| = r\}} \ln^+ |f(\zeta)| \bigwedge_{k=1}^{n} d\varphi_k(\zeta) \right\} < \infty.$$

Теорема 3. *Пусть $M \subset D^n$ — аналитическое подмножество чистой размерности $n-1$ такое, что* $\operatorname{ord} M = a$. *Тогда для* $\forall \varepsilon > 0$ *имеет место следующая оценка:*

$$V_M^{a+1}(\delta) < C(\varepsilon, M) \cdot \frac{(\ln \delta)^{n-2}}{\delta^{1-\varepsilon/2}},$$

где $C(\varepsilon, M)$-константа, зависящая только от ε и M.

Утверждение теоремы 2 для случая бидиска вытекает из результатов [5] и [8]. Дополнительные результаты для бидиска получены в [9]. Необходимость условия (1) в теореме 2 и теорема 3 доказаны в [12]. В настоящей работе мы докажем достаточные условия в теореме 2, и докажем теорему 1, используя теоремы 2 и 3.

Автор приносит благодарность Г. М. Хенкину за поддержку и внимание, оказанные при написании этой работы.

§ 1. Доказательство оценок для коэффициентов потока, определяемого аналитическим множеством

Аналитическому множеству $M = \{\zeta \in D^n : f(\zeta) = 0\}$ соответствует замкнутый положительный поток $\mu = \{\sum_{l,j=1}^{n} \sqrt{-1}\, \mu_{lj}\, d\zeta_l \wedge d\bar{\zeta}_j$, задаваемый интегрированием по M форм типа $(n-1, n-1)$, и положительная обобщенная функция типа меры $|\mu| = \sum_{l=1}^{n} \mu_{ll}$. При этом [10]:

(i) f и μ связаны уравнением Пуанкаре—Лелона

$$\frac{\sqrt{-1}}{\pi} \partial\bar{\partial} \ln |f| = \mu,$$

(ii) коэффициенты μ_{lj} являются мерами с носителями на M, регулярными относительно $|\mu|$, а меры μ_{ll} положительны.

Доказательство достаточности в теореме 2 мы проведем по классической схеме, предложенной впервые Лелоном [11] и использовавшейся затем во многих работах (см. [4], [5], [7], [8]). По этой схеме последовательно решаются d и $\bar{\partial}$ уравнения с необходимыми оценками, и полученное решение уравнения $\partial\bar{\partial}$ задает искомую голоморфную функцию. Нашей ближайшей целью является получение оценок на коэффициенты μ_{lj} потока μ, следующих из условий (2), (3).

Введем такие обозначения.

Для мультииндексов I, J, K таких, что $|I|, |J|, |K| \leqslant n$, и набора строго положительных чисел $a_1, \cdots, a_n$ таких, что $a_1 + \cdots + a_n = 1$, определим многообразия

$$\gamma^a_{I,K}(z_J) = \{\zeta \in D^n : \zeta_J = z_J;\ 0 \leqslant \hat{a}_{j_1} \cdot \rho_{j_1} \leqslant \cdots \leqslant \hat{a}_{j_r} \cdot \rho_{j_r} \leqslant$$

$$\leqslant \hat{a}_{i_1} \cdot \rho_{i_1} = \cdots = \hat{a}_{i_p} \cdot \rho_{i_p} \leqslant \hat{a}_{k_1} \cdot \rho_{k_1} = \cdots = \hat{a}_{k_q} \cdot \rho_{k_q};\ \hat{a}_{k_q} \cdot \rho_{k_q} \leqslant$$

$$< \hat{a}_l \cdot \rho_l \text{ для } l \bar{\in} I \cup K \cup J\}, \text{ где } r = |J|,\ p = |I|,\ q = |K| \text{ и } \hat{a}_s = \prod_{m \neq s} a_m;$$

$$\gamma^a_{I,K} = \gamma^a_{I,K}(z_J) \text{ для } J=\varnothing;\ \gamma^a_J=\gamma^a_{I,K},\text{ для } K=\varnothing;$$

$$a^a_{I,K}(z_J) = \{\zeta\in D^n:\ \zeta_J=z_J;\ 0\leqslant \widehat{a}_{j_1}\cdot\rho_{j_1}\leqslant\cdots\leqslant\widehat{a}_{j_r}\cdot\rho_{j_r}=$$

$$=\widehat{a}_{i_1}\cdot\rho_{i_1}=\cdots=\widehat{a}_{i_p}\cdot\rho_{i_p}\leqslant\widehat{a}_{k_1}\cdot\rho_{k_1}=\cdots=\widehat{a}_{k_q}\cdot\rho_{k_q};\ \widehat{a}_{k_q}\cdot\rho_{k_q}\leqslant$$

$$\leqslant\widehat{a}_l\cdot\rho_l,\ \text{для } l\overline{\in} I\cup K\cup J\}.$$

В следующем предложении мы доказываем необходимые оценки на коэффициенты μ.

Предложение 2. *Пусть* $\mu=\sum\limits_{l,j}\sqrt{-1}\,\mu_{lj}\,d\zeta_l\wedge d\overline{\zeta}_j$ — *поток интегрирования по аналитическому множеству* $M\subset D^n$ *чистой размерности* $n-1$ *такому, что* $\overline{M}\ni\{0\}$. *Пусть* μ *удовлетворяет условиям:*

при $\alpha>0$ *выполнено условие* (2) *теоремы* 2;

при $\alpha=0$ *выполнено условие* (3), *и аналитическое множество* M *задано в некоторой окрестности* D^n.

Тогда найдется набор чисел $(a_1, \ldots, a_n)$ *и константа* A *такие, что коэффициенты потока* μ *удовлетворяют следующим условиям:*

при $\alpha\geqslant 0$

$$\int\limits_{\gamma^a_I}\mu_{ii}\cdot\rho_i^{1+\alpha}\cdot T_I<A\cdot C(\mu), \tag{4}$$

$$\int\limits_{\gamma^n_I}(\mu_{mm}+|\mu_{mi}|)\cdot\rho_i^{\alpha}\cdot\rho_m\cdot T_I<A\cdot C(\mu), \tag{5}$$

$$\int\limits_{\gamma^a_{I,K}}(\mu_{mm}+\mu_{kk}+|\mu_{mk}|)\cdot\rho_i^{\alpha}\cdot T_{I,K}<A\cdot C(\mu); \tag{6}$$

при $\alpha=0$, *кроме условий* (4), (5), (6) *условиям*

$$\int\limits_0^{2\pi}d\varphi_{j_1}\cdots\int\limits_0^{2\pi}d\varphi_{j_r}\int\limits_{\gamma^a_J(z_J)}\mu_{ii}\cdot\rho_i\cdot T^J_I<A\cdot C(\mu), \tag{7}$$

$$\int\limits_0^{2\pi}d\varphi_{j_1}\cdots\int\limits_0^{2\pi}d\varphi_{j_r}\int\limits_{\gamma^a_J(z_J)}(\mu_{mm}+|\mu_{mi}|)\cdot\rho_m\cdot T^J_I<A\cdot C(\mu), \tag{8}$$

где $i\in I$, $k\in K$, $m\overline{\in} I$, $T_I=\bigwedge\limits_{s\overline{\in} I}\dfrac{\tau_s}{\rho_s}\wedge dr_i\bigwedge\limits_{i\in I}r_i\,d\varphi_i$,

$$T_{I,k}=\bigwedge\limits_{s\overline{\in} I\cup K}\frac{\tau_s}{\rho_s}\wedge dr_i\bigwedge\limits_{i\in I}r_i\,d\varphi_i\wedge dr_{k_1}\bigwedge\limits_{k\in K}r_k\,d\varphi_k,\quad T^J_I=\bigwedge\limits_{s\overline{\in} I\cup J}\frac{\tau_s}{\rho_s}\wedge dr_i\bigwedge\limits_{i\in I}r_i\,d\varphi_i,$$

в (7) *и* (8) $|z_{j_s}|=1$, *а константа* A *при* $\alpha=0$ *не зависит от окрестности полидиска* D^n, *в которой определен поток* μ.

Для доказательства предложения 2 нам понадобятся несколько лемм. Введем вначале такие обозначения. Для набора положительных чисел $\{a_i\}$ такого, что $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$, и числа $\delta \in (0, 1)$ определим

$$D^a(\delta) = \left\{ \zeta \in D : \rho_k / \sum_{m=1}^{n} \rho_m > a_k \delta \right\},$$

$$\gamma_I^a(\delta) = \left\{ \zeta \in \gamma_I^a : \rho_i / \sum_{m=1}^{n} \rho_m \geq a_i \delta, \text{ для } i \in I \right\},$$

$$\sigma_I^a(\delta) = \left\{ \zeta \in \gamma_I^a : \rho_i / \sum_{m=1}^{n} \rho_m = a_i \delta, \text{ для } i \in I \right\}.$$

Лемма 1. *Пусть положительный поток типа* (1,1) μ *удовлетворяет условиям:*

$$\int_0^{1/n} V_M^a(\delta)\, d\delta = C(\mu) < \infty, \text{ при } \alpha > 0, \tag{9}$$

$$\int_0^{1/n} V_M(\delta) \cdot (\ln \delta)^{\nu(n)+\varepsilon}\, d\delta = C(\mu), \text{ при } \alpha = 0. \tag{10}$$

Тогда найдется набор положительных чисел $(a_1, \ldots, a_n)$ *такой, что* $\sum_{m=1}^{n} a_m = 1$, *и константы* A, *для которых выполняются условия:*

при $\alpha > 0$

$$\int_{\gamma_I^a} \mu_{ii} \cdot \rho_i^{1+\alpha} \cdot T < A \cdot C(\mu), \tag{11}$$

при $\alpha = 0$

$$\int_{\gamma_I^a} \mu_{ii} \cdot \rho_i \cdot (\ln \theta_I)^{\nu(n)+\varepsilon} \cdot T_I < A \cdot C(\mu), \tag{12}$$

$$\int_0^{1/n} (\ln \delta)^{\nu(n)+\varepsilon}\, d\delta \int_{\gamma_I^a(\delta)} \mu_{ii} \cdot \rho_{\hat{i}} \cdot T_I < A \cdot C(\mu), \tag{13}$$

$$\int_0^{1/n} (\ln \delta)^{\nu(n)+\varepsilon}\, d\delta \int_{\gamma_I^a(\delta)} \mu_{kk} \cdot \rho_{\hat{k}} \frac{\rho_k}{\rho_I} \cdot T_I < A \cdot C(\mu), \tag{14}$$

где $i \in I$, $k \overline{\in} I$, $\rho_I = \frac{1}{|I|} \sum_{i \in I} \rho_i = \theta_I = \rho_I / \sum_{m=1}^{n} \rho_m$.

Доказательство. Пусть $V_a^a(\delta) = \int_{D^a(\delta)} \rho_{\min}^{\alpha} \cdot \mu \Lambda \left(\sum_{i=1}^{n} \rho_{\hat{i}} \bigwedge_{j \neq i} \frac{\tau_j}{\rho_j} \right).$

Тогда, учитывая, что $V_a^a(\delta) \leqslant V^a(\hat{a}\cdot\delta)$, где $\hat{a} = \min_i a_i$, получаем для $\alpha > 0$ из условия (9) леммы:

$$\int_0^{1/n} V_a^a(\delta)\, d\delta < A(a)\cdot C(\mu).$$

Интегрируя полученный интеграл по частям, имеем

$$\int_0^{1/n} \frac{dV_a^a(\theta)}{d\theta}\cdot\theta\, d\theta < A(a)\cdot C(\mu). \tag{15}$$

где константа A зависит только от $\{a_i\}$.

Используя теперь в (15) неравенство

$$\frac{dV_a^a(\theta)}{d\theta} \geqslant \frac{2a_l^{1+a}\theta^a}{(1-a_l\theta)^{2+a}}\int\limits_{\sigma_l^a(\theta)} \mu_{ll}\cdot r_l\cdot\rho_{\hat{l}}\cdot\left(\sum_{m\neq l}\rho_m\right)d\varphi_l\bigwedge_{m\neq l}\frac{\tau_m}{\rho_m},$$

получаем

$$\int\limits_{\gamma_l^a(\delta)} \mu_{ll}\,\rho_l^{1+a}\cdot T_l <$$

$$\leqslant \int_0^1 \frac{2a_l^{2+a}\theta^{1+a}}{(1-a_l\theta)^{3+a}}d\theta\int\limits_{\sigma_l^a(\theta)}\mu_{ll}\,r_l\left(\sum_{m\neq l}\rho_m\right)^2 d\varphi_l\bigwedge_{m\neq l}\frac{\tau_m}{\rho_m} < A(a)\cdot C(\mu), \tag{16}$$

где $A(a)$ — константа, зависящая только от набора $\{a_i\}$.

Из (16) заключаем, что неравенство (11) выполняется для $|I| = 1$ при произвольном выборе $\{a_i\}$ и соответствующей константе $A(a)$. Для доказательства (11) при $|I| > 1$ достаточно в интеграле из левой части (16) воспользоваться теоремой Фубини. Неравенство (12) доказывается вполне аналогично неравенству (11), но с использованием условия (10). Неравенства (13), (14) доказываются применением теоремы Фубини к интегралу из левой части (10).

З а м е ч а н и е. *Из доказательства леммы* 1 *видно, что множество наборов* $\{a_i\}$, *для которых выполняются неравенства* (11)—(14) *при соответствующей константе* A, *имеет положительную меру.*

Теперь всюду в дальнейшем будем предполагать набор $\{a_i\}$, для которого выполняется утверждение леммы 1, равным $\{1/n\}$ и будем писать всюду $\gamma_{I,K}$, $\sigma_{I,K}$ вместо $\gamma_{I,K}^a$, $\sigma_{I,K}^a$. В тех местах, где необходимо учесть отличие наборов $\{a_i\}$ и $\{1/n\}$, будут сделаны дополнительные замечания.

Для доказательства неравенства (5) нам понадобится такая лемма.

Л е м м а 2. *Пусть замкнутый положительный поток типа* (1,1) μ *удовлетворяет условиям* (9) *при* $\alpha > 0$ *или* (10)—*при* $\alpha = 0$. *Пусть кроме того выполнены условия:*

при $\alpha > 0$

$$\int\limits_{\gamma_I} \theta_I^{-1} \cdot \underline{\mu}_{mm} \cdot \psi_I^{\alpha} \cdot (\rho_m)^2 \left(\sum_{s=1}^{n} \rho_s\right)^{-1} \cdot T_I < A \cdot C(\mu), \tag{17}$$

при $\alpha = 0$

$$\int\limits_{\gamma_I} \theta_I^{-1} (\ln \theta_I)^{-n+p+1-\varepsilon} \cdot \mu_{mm}(\rho_m)^2 \cdot \left(\sum_{s=1}^{n} \rho_s\right)^{-1} \cdot T_I < A \cdot C(\mu), \tag{18}$$

где $|I| = p + 1 \geqslant 2$. *Тогда неравенства* (17) *при* $\alpha > 0$ *или* (18) *при* $\alpha = 0$ *выполняются и для мультииндексов* I *таких, что* $|I| = p$.

Доказательство. Мы будем доказывать лемму для $\alpha > 0$. При $\alpha = 0$ доказательство несколько отличается от приводимого ниже, но более громоздко.

Рассмотрим функцию $\chi(\rho) \in C^{\infty}[0, 1]$ такую, что $\chi(\rho) = 0$ для $\rho > 19/20$ и $\chi(\rho) = 1$, для $\rho \leqslant 9/10$. Зафиксируем мультииндекс $I = (i_1, \cdots, i_p)$, индекс $m \overline{\in} I$ и определим

$$\psi_m = \chi(\rho_m) \cdot \rho_m, \quad \psi_I = \chi(\rho_I) \cdot \rho_I \quad \text{и} \quad \beta = \psi_I^{\alpha} \cdot \psi_m \cdot \mu \bigwedge_{l \in I} d\varphi_l \bigwedge_{s \overline{\in} I \cup m} \frac{\tau_s}{\rho_s}.$$

Предположим вначале, что μ — гладкая дифференциальная форма, удовлетворяющая условиям леммы, и применим к форме β формулу Стокса на многообразии γ_I. Тогда получим

$$\sum_{l \overline{\in} I} \int\limits_{\gamma_{I \cup l}} \beta = \int\limits_{\gamma_I} d\beta. \tag{19}$$

По определению формы β имеем на γ_I: $\beta = \beta_m + \sum\limits_{l \overline{\in} I} \beta_{lm}$, где

$$\beta_m = \psi_I^{\alpha} \cdot \psi_m \cdot \mu_{mm} \tau_m \bigwedge_{l \in I} d\varphi_l \bigwedge_{s \overline{\in} I \cup m} \frac{\tau_s}{\rho_s},$$

$$\beta_{lm} = \psi_I^{\alpha} \cdot \psi_m (\mu_{lm} \sqrt{-1}\, d\bar{\zeta}_l \wedge d\zeta_m + \mu_{ml} \sqrt{-1}\, d\bar{\zeta}_m \wedge d\bar{\zeta}_l) \bigwedge_{l \in I} d\varphi_l \bigwedge_{s \overline{\in} I \cup m} \frac{\tau_s}{\rho_s}.$$

Аналогично $d\beta = \eta_m + \sum\limits_{l \in I} \eta_{lm}$,

где

$$\eta_m = \psi_m \cdot \psi_I^{\alpha-1} \cdot \mu_{mm} d\psi_I \wedge \tau_m \bigwedge_{l \in I} d\varphi_l \bigwedge_{s \overline{\in} I \cup m} \frac{\tau_s}{\rho_s},$$

$$\eta_{lm} = \psi_I^{\alpha} \cdot (\mu_{lm} \sqrt{-1}\, d\zeta_l \wedge d\bar{\zeta}_m + \mu_{ml} \sqrt{-1}\, d\zeta_m \wedge d\bar{\zeta}_l) \wedge d\psi_m \bigwedge_{l \in I} d\varphi_l \bigwedge_{s \overline{\in} I \cup m} \frac{\tau_s}{\rho_s}.$$

Введем такие обозначения:

$$\beta_l = \psi_I^{1+\alpha} \cdot \mu_{ll}\, d\varphi_m \wedge dr_l \bigwedge_{l \in I} d\varphi_l \bigwedge_{s \overline{\in} I \cup m} \frac{\tau_s}{\rho_s},$$

$$\eta_l = \psi_I^{1+\alpha} \cdot \mu_{ll}\, dr_l \bigwedge_{l \in I} d\varphi_l \bigwedge_{s \overline{\in} I} \frac{\tau_s}{\rho_s},$$

$$P_{ml}=\int\limits_{\gamma/Ul}|\beta_m|,\ P_l=\int\limits_{\gamma/Um}|\beta_l|,\ P_m=\int\limits_{\gamma/Um}\beta_m,\ P_{lm}=\int\limits_{\gamma/Um}|\beta_{lm}|,$$

$$Q_m=\int\limits_{\gamma_I}|\gamma_{lm}|,\ Q_l=\int\limits_{\gamma_I}|\gamma_{ll}|,\ Q_{lm}=\int\limits_{\gamma_I}|\gamma_{lm}|.$$

Ограничим область интегрирования в интеграле из (17) множеством $\hat{\gamma}_I=\gamma_I\cap\left\{\rho_i<\frac{9}{10}(i\in I),\ \rho_m<\frac{9}{10}\right\}$ и оценим этот интеграл следующим образом:

$$\int\limits_{\hat{\gamma}_I}\theta_I^{-1}\cdot\mu_{mm}\cdot\rho_I^2\cdot\rho_m^2\left(\sum_{s=1}^{n}\rho_s\right)^{-1}\cdot T_I\leqslant A\cdot Q_m. \tag{20}$$

Из (19), используя неравенство $|\mu_{lm}|^2\leqslant|\mu_{ll}|\cdot|\mu_{mm}|$ и неравенство Гёльдера для P_{lm} и Q_{lm}, получим

$$Q_m-\sum_{l\in I}Q_l^{1/2}\cdot Q_m^{1/2}<A\cdot\left(\sum_{l\in I\cup m}P_{ml}+\sum_{l\in I}P_l+P_m\right). \tag{21}$$

Используя теперь предположение леммы 2 для оценки P_l, P_m, P_{ml} и неравенство (11) из леммы 1 для оценки Q_l, получаем следующую оценку:

$$Q_m<A\cdot C(\mu). \tag{22}$$

Теперь, для завершения доказательства леммы 2 для гладких потоков, достаточно показать, что требуемая оценка сохраняется, если в интеграле из (20) расширить область интегрирования до γ_I. Для того, чтобы убрать условие $\rho_m<\frac{9}{10}$, произведем биголоморфное отображение $D^n\to D^n$ такое, что $\zeta_j'(\zeta)=\zeta_j$ при $j\neq m$, а $\zeta_m'(\zeta)=\frac{\zeta_m-1/5}{1-\zeta_m/5}$. При таком отображении $\rho_j'(\zeta)=\rho_j(\zeta)$ для $j\neq m$, а для $\rho_m'(\zeta)$ выполнены неравенства $C_1\rho_m(\zeta)\leqslant\rho_m'(\zeta)<C_2\cdot\rho_m(\zeta)$. Используя функции $\{\rho_j\,(j\neq m),\ \rho_m'\}$, получаем требуемую оценку для интеграла по области $\gamma_I\cap\left\{\rho_i(\zeta)<\frac{9}{10}\,(i\in I),\right.$ $\left.\rho_m'(\zeta)<\frac{9}{10}\right\}$, которая вместе с полученной ранее оценкой позволяет убрать условие $\rho_m(\zeta)<\frac{9}{10}$. Для того, чтобы убрать условие $\rho_l(\zeta)<$ $<\frac{9}{10}\,(i\in I)$, достаточно воспользоваться ограниченностью $V^a(\delta)$ при $\delta>0$ и теоремой Фубини, так как многообразие $\gamma_I\cap\left\{\rho_l\geqslant\frac{9}{10}(i\in I)\right\}$ лежит строго внутри D^n для любого мультииндекса I.

Для доказательства леммы 2 для произвольного потока, приблизим поток μ на вложенных полидисках гладкими потоками $\mu^\delta(z)=$

$= \int\limits_D \chi_\delta(\zeta, z)\,\mu(\zeta)$, где $\chi_\delta(\zeta, z)$ — семейство гладких форм, приближающее диагональ $\{\zeta = z\}$ в $D(\zeta) \times D(z)$ в смысле теории потоков. Используя затем лемму 2 для гладких потоков μ^δ и неравенства (17) для потоков μ^δ и μ, получаем утверждение леммы 2 для произвольного потока μ.

Докажем теперь неравенство (5) из предложения 2. Для этого считая утверждение леммы 1 для $\gamma_{1\ldots n}$ базой индукции и применяя лемму 2 в качестве шага индукции, получим такие неравенства для замкнутого положительного потока μ, удовлетворяющего условиям предложения 2:

при $\alpha > 0$

$$\int\limits_{\gamma_I} \mu_{mm} \cdot \rho_I^{\alpha-1} \cdot \rho_m^2 \cdot T_I < A \cdot C(\mu), \tag{23}$$

при $\alpha = 0$

$$\int\limits_{\gamma_I} \mu_{mm} \cdot \rho_I^{-1} \cdot (\ln \theta_I)^{-n+p-\varepsilon} \cdot \rho_m^2 \cdot T_I < A \cdot C(\mu), \tag{24}$$

где $p = |I|$.

Из (23), (24) сразу следует часть неравенства (5) для μ_{mm}. Оставшаяся часть неравенства (5) при $\alpha > 0$ следует из такой цепочки неравенств:

$$\int\limits_{\gamma_I} |\mu_{ml}| \cdot \rho_l^\alpha \cdot \rho_m \cdot T_I < \Big(\int\limits_{\gamma_I} \mu_{ll} \cdot \rho_l^{1+\alpha} \cdot T_I \Big)^{1/2} \times$$
$$\times \Big(\int\limits_{\gamma_I} \mu_{mm}\, \rho_l^{\alpha-1} \cdot \rho_m^2 \cdot T_I \Big)^{1/2} < A \cdot C(\mu). \tag{25}$$

При $\alpha = 0$ необходимо воспользоваться неравенствами (12), (24) и неравенством $\nu(n) = 2\nu(n-1) + n - 1 \geqslant 2\nu(n-1) + n - p$ для получения неравенства

$$\int\limits_{\gamma_I} |\mu_{ml}|\, (\ln \theta_I)^{\nu(n-1)+\varepsilon/4} \cdot \rho_m \cdot T_I < A \cdot C(\mu), \tag{26}$$

которое заведомо сильнее (5) при $\alpha = 0$.

Неравенство (6) является простым следствием неравенства (5), которое получается с использованием теоремы Фубини для диагональных коэффициентов μ и затем неравенства Гёльдера для недиагональных.

Для завершения доказательства предложения 2, т. е. для доказательства неравенств (7), (8) нам нужна, кроме доказанных выше лемм 1 и 2, еще одна лемма, которую мы приведем без доказательства.

Введем также обозначения:

$$D(\varphi_j, \delta) = \Big\{ \zeta \in D \colon \zeta_j = e^{\sqrt{-1}\,\varphi_j},\ \frac{\rho_i}{\sum_{k \neq j} \rho_k} \geqslant \delta\ (i \neq j) \Big\},$$

$$V_M(\varphi_j, \delta) = \int\limits_{D(\varphi_j, \delta)} \mu \wedge \Big(\sum_{i \neq j} \rho_{\widehat{ij}} \bigwedge_{s \neq i, j} \frac{\tau_s}{\rho_s} \Big).$$

Лемма 3. *Пусть положительный замкнутый поток типа* (1, 1) μ *задан в окрестности полидиска* D^n *и удовлетворяет условию* (3). *Тогда выполняются следующие неравенства:*

$$\int\limits_0^{2\pi} d\varphi_j \int\limits_0^{1/n} (\ln \delta)^{\nu(n-1)+\varepsilon 2}\, V'_M(\varphi_j \delta),\, d\delta < A \cdot C(\mu), \tag{27}$$

где $j \in (1, \dots, n)$ *и константа* A *не зависит от окрестности* D^n, *в которой задан поток.*

Теперь, для доказательства неравенств (7), (8) достаточно применять по индукции лемму 3 и использовать на каждом шаге леммы 1, 2 для ограничения потока μ на $D(z_j)$ $(|z_{jm}| = 1)$. Это возможно для почти всех φ_j по теореме Фубини.

§ 2. Решение d-уравнения с оценкой

Наше следующее предложение показывает существование специального решения уравнения $dg = \mu$ для правой части μ, удовлетворяющей неравенствам (4)—(8).

Предложение 3. *Пусть аналитическое множество в* D^n $M \ni \{0\}$ *таково, что соответствующий положительный замкнутый поток* μ *удовлетворяет неравенствам* (4)÷(8), *а при* $\alpha = 0$ *множество* M *задано в некоторой окрестности* D^n. *Тогда существует решение уравнения* $dg = \mu$ *на* D^n *такое, что* $g = g^{0,1} + \overline{g^{0,1}}$, *и коэффициенты* $\bar\partial$-*замкнутой формы* $g^{0,1} = \sum_{m=1}^{n} g_m\, d\bar\zeta_m$ *удовлетворяют следующим условиям:*

при $\alpha > 0$

$$\int\limits_{\tau_I} \rho_I^{\alpha} \cdot |g_i| \cdot T_I < A \cdot C(\mu), \tag{28}$$

$$\int\limits_{\tau_{I,K}} \rho_I^{\alpha-1} \cdot |g_k| \cdot T_{I,K} < A \cdot C(\mu), \tag{29}$$

при $\alpha = 0$

$$\int\limits_0^{2\pi} d\varphi_{j_1} \cdots \int\limits_0^{2\pi} d\varphi_{j_r} \int\limits_{\tau_I(z_J)} |g_i| \cdot T_I^J < A \cdot C(\mu) \quad (|z_{\tau_m}| = 1), \tag{30}$$

где $i \in I$, $k \in K$, *и при* $\alpha = 0$ *константа* A *не зависит от окрестности, в которой задан поток* μ.

Доказательство. Искомая форма $g^{0,1}$ находится по формулам гомотопии

$$g^{0,1}(\zeta)=\sum_{l=1}^{n}\left(\int_{0}^{1} dt\sum_{k=1}^{n}\frac{dZ_k(\zeta,t)}{dt}\cdot\mu_{kl}(Z(\zeta,t))\right)d\bar{\zeta}_l, \tag{31}$$

где $Z(\zeta, t): D^n\times[0,1]\to D^n$ — гомотопия, выбираемая по разному для случаев $\alpha>0$ и $\alpha=0$. Опишем выбор гомотопии в случаях $\alpha>0$ и $\alpha=0$.

Пусть $\alpha>0$. Предположим для упрощения выкладок, что набор чисел $\{a_i\}$ из предложения 2 таков: $\{1/n\}$, и рассмотрим гомотопию Пуанкаре: $Z_m(\zeta, t)=t\cdot\zeta_m$. Для доказательства (28) предположим, что $I=(1,\dots,p)$ и воспользуемся такой цепочкой неравенств:

$$\begin{gathered}\int_{\Upsilon_I}\rho_I^{\alpha}(\zeta)\cdot|g_I(\zeta)|\cdot T_I(\zeta)<A\cdot\int_{\Upsilon_I}\rho_I^{\alpha}(\zeta)\cdot T_I(\zeta)\int_{t_0}^{1}dt\left(\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{dZ_k(\zeta,t)}{dt}\right|\times\right.\\ \left.\times|\mu_{kl}(Z(\zeta,t))|\right)<A\cdot\sum_{k=1}^{n}\int_{\Upsilon_I}\rho_I^{\alpha}(\zeta)d\rho_I(\zeta)\bigwedge_{m>p}\frac{d\rho_m(\zeta)}{\rho_m(\zeta)}\bigwedge_{s=1}^{n}r_s(\zeta)d\varphi_s(\zeta)\times\\ \times\int_{t_0}^{1}dt|\mu_{kl}(Z(\zeta,t))|<A\cdot\sum_{k=1}^{n}\int_{0}^{\rho_0}u^{\alpha}du\int_{u}^{\rho_0}\frac{dv_1}{v_1}\cdots\int_{u}^{\rho_0}\frac{dv_{n-p}}{v_{n-p}}\times\\ \times\int_{\Upsilon_I\cap\{\rho_I=u,\ \rho_m=v_{m-p}\}}\bigwedge_{s=1}^{n}r_sd\varphi_s\int_{t_0}^{1}dt|\mu_{kl}(Z(\zeta,t))|<A\cdot\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=p+1}^{n}\int_{0}^{\rho_0}\frac{u^{\alpha+1}du}{u}\times\right.\\ \times\int_{u}^{\rho_0}\frac{dv_1}{v_1}\cdots\widehat{j}\cdots\int_{u}^{\rho_0}\frac{dv_{n-p}}{v_{n-p}}\int_{\Upsilon_I\cap\{\rho_I=\rho_j=u,\ \rho_m=v_{m-p}\}}\bigwedge_{s=1}^{n}r_s\,d\varphi_s\int_{t_0}^{1}dt|\mu_{kl}(Z(\zeta,t))|+\\ +\int_{0}^{\rho_0}u^{\alpha+1}du\int_{u}^{\rho_0}\frac{dv_1}{v_1}\cdots\int_{u}^{\rho_0}\frac{dv_{n-p}}{v_{n-p}}\frac{\partial}{\partial u}\left(\int_{\Upsilon_I\cap\{\rho_I=u,\ \rho_m=v_{m-p}\}}\bigwedge_{s=1}^{n}r_sd\varphi_s\times\right.\\ \left.\left.\times\int_{t_0}^{1}dt|\mu_{kl}(Z(\zeta,t))|\right)<A\cdot\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j\in I}\int_{\Upsilon_{I\cup j}}\rho_{I\cup j}^{\alpha}(\zeta)\cdot T_{I\cup j}(\zeta)\int_{t_0}^{1}dt|\mu_{kl}(Z(\zeta,t))|+\right.\right.\\ \left.+\int_{\Upsilon_I}\rho_I^{1+\alpha}(\zeta)|\mu_{kl}(\zeta)|\cdot T_I(\zeta)\right),\end{gathered} \tag{32}$$

где в предпоследнем неравенстве мы воспользовались интегрированием по частям по u, а в последнем таким неравенством:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\int_{\Upsilon_I\cap\{\rho_I=u,\ \rho_m=v_{m-p}\}}\bigwedge_{s=1}^{n}r_sd\varphi_s\int_{t_0}^{1}dt|\mu_{kl}(Z(\zeta,t))|\right)<$$

$$<A\cdot\int_{\Upsilon_I\cap\{\rho_I=u,\ \rho_m=v_{m-p}\}}\bigwedge_{s=1}^{n}r_sd\varphi_s\cdot|\mu_{kl}(\zeta)|.$$

Теперь из (32) получаем, что (28) доказывается индукцией по $p = |I|$ от n до 1 с использованием условий (4), (5) на каждом шаге индукции. Предположение индукции при $|I| = n$ доказывается с помощью выкладок, вполне аналогичных (32).

Оценка (29) доказывается аналогично (28) индукцией по $|K|$ от $n-|I|$ до 1 с использованием выкладок, аналогичных (32). При доказательстве шага индукции применяются неравенства (28) и (6). Предположение индукции при $|K| = n-|I|$ является следствием неравенства (28) при $|I| = n$.

При произвольном «неравновесном» выборе $\{a_i\}$ гомотопию Пуанкаре необходимо модифицировать следующим образом. Если $a_l = \max\limits_i \{a_i\}$, то определим

$$Z_l^a(\zeta, t) = t\cdot\zeta_l,$$

$$Z_m^a(\zeta, t) = \left(1 - \frac{a_m}{a_l} + t\left(|\zeta_m| - 1 + \frac{a_m}{a_l}\right)\right)\cdot\frac{\zeta_m}{|\zeta_m|}\ (m \neq l). \tag{33}$$

Легко видеть, что построенная гомотопия сохраняет многообразия $\Upsilon^a_{I,K}$ и $Z^a(\zeta, t) \in D^n$ при $t < 1$.

Пусть теперь $\alpha = 0$. В этом случае используются несколько гомотопий, которые строятся индуктивно по размерности полидиска n. В случае $n = 1$ искомой гомотопией является гомотопия Пуанкаре. В случае произвольного n рассмотрим покрытие полидиска D^n областями:

$$D^{(0)} = \{\zeta \in D^n : \rho_i(\zeta) < 1 - \delta/2\ (i = 1, \cdots, n)\},$$

$$D^{(l)} = \{\zeta \in D^n : \rho_l(\zeta) > 1 - \delta\},$$

где $\delta > 0$ выбрано из условия $\mu_{IJ}(\zeta) = 0$, если $\max\limits_k |\zeta_k| < \delta$. Приведем доказательство предложения 3 при $\alpha = 0$ для „равновесного" набора $\{a_i\} = \{1/n\}$.

Используя разбиение единицы, подчиненное покрытию $\{D^{(0)}, D^{(l)}\}$, получаем, что для доказательства предложения 3 достаточно построить формы $g^{(0)}, g^{(l)}$ на областях соответственно $D^{(0)}$, $D^{(l)}$, удовлетворяющие (30) и такие, что $d(g^{(0)} + \overline{g^{(0)}}) = \mu|_{D^{(0)}}$ и $d(g^{(l)} + \overline{g^{(l)}}) = \mu|_{D^{(l)}}$.

При построении искомых форм $g^{(l)}$ на $D^{(l)}$ мы можем предполагать, что условия предложения 3 выполнены на полидисках $D_0^{(l)} = \{\zeta \in D^n : \zeta_l = 0\}$ размерности $n-1$, так как этого можно добиться подходящей голоморфной заменой координат. Поэтому, используя предположение индукции, находим формы $g_0^{(l)}$ на $D_0^{(l)}$, удовлетворяющие условиям (30) на $D_0^{(l)}$. Теперь форма $g^{(l)}$ определяется из равенства

$$g^{(l)}(\zeta_1, \cdots, \zeta_n) = g_0^{(l)}(\zeta_1, \cdots, \underset{\widehat{l}}{0}, \cdots, \zeta_n) + \tilde{g}^l(\zeta_1, \cdots, \zeta_n),$$

где форма $\tilde{g}^{(l)}$ получается применением оператора гомотопии Пуанкаре по переменной ζ_l к потоку μ. Коэффициенты $\tilde{g}_J^{(l)}$ при $d\bar{\zeta}_J$ находятся по формулам

$$\tilde{g}_j^{(l)}(\zeta) = \int_0^1 dt \cdot \zeta_j \cdot \mu_{lj}(\zeta_1, \cdots, t\zeta_l, \cdots, \zeta_n).$$

Предполагая теперь без ограничения общности, что $M \cap D_0^{(l)}$ является аналитическим подмножеством в $D_0^{(l)}$ коразмерности 1 $(l = 1, \cdots, n)$ и учитывая условие (30) для $g_0^{(l)}$ на $D_0^{(l)}$, получаем выполнение (30) для $g_0^{(l)}$ на $D^{(l)}$. Оценка (30) для $\tilde{g}^{(l)}$ получается из условий (4), (5) для коэффициентов μ.

Для завершения доказательства предложения 3 в случае $\alpha = 0$ достаточно теперь построить форму $g^{(0)}$ на $D^{(0)}$, удовлетворяющую (30). Эта задача решается специальной гомотопией «к остову». А именно, определим отображение $\tilde{Z}(\zeta, t)$:

$$\varphi_k(\tilde{Z}(\zeta, t)) = \varphi_k(\zeta),$$

$$\rho_k(\tilde{Z}(\zeta, t)) = t \cdot \rho_k(\zeta) + n(1 - t)\rho_k(\zeta) \cdot \left(\sum_{m=1}^{n} \rho_m(\zeta)\right)^{-1}, \tag{34}$$

и гомотопию Z по формуле $Z(\zeta, t) = \tilde{Z}(\zeta, \tau(\zeta, t))$, где функция $\tau(\zeta, t) \in \in C^{\infty}(D^n \times [0, 1])$ выбирается следующим образом. Для произвольной точки ζ рассматриваем $T(\zeta) = \{t : \max\limits_{l} \rho_l(\tilde{Z}(\zeta, t)) \geqslant 1 - \delta/2\}$. Из (34) следует, что $T(\zeta)$ непусто для $\zeta \in D^n$. Определим $t'(\zeta) = \sup\{T(\zeta)\}$ и строим функцию $\tau(\zeta, t)$ так, чтобы $\tau(\zeta, t) = t$ при $t > t'(\zeta) + \delta/n$ и $\dfrac{d\tau(\zeta, t)}{dt} = 0$ при $t < t'(\zeta) - \delta/n$. Модификация $\tilde{Z}$ с помощью τ производится для того, чтобы гомотопия Z была определена корректно, т. е. чтобы $\rho_k(Z(\zeta, t)) \leqslant 1$.

Для доказательства оценки (30) для $g^{(0)}$ нам понадобятся такие оценки:

$$\frac{dZ_k(\zeta, t)}{dt} = O(1) \cdot \frac{\rho_k(Z(\zeta, t))}{\rho(Z(\zeta, t))}, \tag{35}$$

$$T_l^j(\zeta)\Big|_{\tau_l(z_j) \cap D^{(0)}} = O(1) \cdot T_l^j(Z(\zeta, t))\Big|_{\tau_l(z_j) \cap D^{(0)}}, \tag{36}$$

где $\rho(\zeta) = \sum\limits_{m=1}^{n} \rho_m(\zeta)$.

Оценка (35) является непосредственным следствием формул (34). Для доказательства (36) необходимо ввести сферические координаты $\theta_1, \cdots, \theta_{n-r-p}$ из условий

$$\rho_l(\zeta) = \frac{1}{p}\rho(\zeta) \cdot \sin^2\theta_1(\zeta), \quad \rho_n(\zeta) = \rho(\zeta) \cdot \cos^2\theta_1(\zeta) \cdots \cos^2\theta_{n-r-p}(\zeta),$$

где $p = |I|$, $r = |J|$ и для простоты обозначений $J = (1, \cdots, r)$, $I = = (r + 1, \cdots, r + p)$. Формулы (34) показывают, что $\theta_s(Z(\zeta, t)) = = \theta_s(\zeta)$ и $d_\zeta\rho(\zeta) = O(1)\, d\rho(Z(\zeta, t))$, а отсюда легко следует (36).

Используя теперь формулы (31), (34) и оценки (35), (36), получаем

$$\int\limits_{\gamma_I(z_J)\cap D^{(0)}} |g_I^{(0)}|\cdot T_I^J <$$

$$< A\cdot \int\limits_{\gamma_I(z_J)\cap D^{(0)}} T_I^J(\zeta)\cdot \int\limits_{t_0}^{1} dt \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{dZ_k(\zeta,\ t)}{dt} \right| \cdot |\mu_{kI}(Z(\zeta,\ t))| <$$

$$< A\cdot \int\limits_{t_0}^{1} dt \int\limits_{\gamma_I(z_J)\cap\{\rho(w)>n(1-t)\}} T_I^J(w)\cdot \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\rho_k(w)}{\rho(w)}\cdot|\mu_{kI}(w)|\right) < \tag{37}$$

$$< A\cdot \int\limits_{t_0}^{1} dt \int\limits_{t_0}^{t} \frac{ds}{n(1-s)} \int\limits_{\gamma_I(z_J)\cap\{\rho(w)=n\cdot(1-s)\}} T_I^J(w)\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}\rho_k(w)\cdot|\mu_{kI}(w)|\right) <$$

$$< A\cdot \int\limits_{\gamma_I(z_J)\cap D^{(0)}} T_I^J(w)\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}\rho_k(w)\cdot|\mu_{kI}(w)|\right) < A\cdot C(\mu),$$

где в предпоследнем неравенстве мы воспользовались интегрированием по частям, и в последнем условиями (4), (5).

§ 3. Решение $\bar\partial$-уравнения с оценкой и доказательство теорем

Следующее предложение посвящено решению с оценкой уравнения $\bar\partial h = g$ для $\bar\partial$-замкнутой формы типа $(0, 1)$ g, удовлетворяющей условиям (28), (29) или (30).

Предложение 4. *Пусть* $g^{0,1}$ $\bar\partial$*-замкнутая форма на полидиске* D^n, *удовлетворяющая условиям* (28), (29) *или условию* (30). *Тогда существует решение* h *уравнения*

$$\bar\partial h = g^{0,1} \tag{38}$$

такое, что:

при $\alpha > 0$

$$\int\limits_{\gamma_{1\ldots n}} \rho(\zeta)^{-1+\alpha}\cdot|\operatorname{Im} h(\zeta)|\, d\lambda(\zeta) < A\cdot C(\mu), \tag{39}$$

при $\alpha = 0$

$$\int\limits_{\sigma_{1\ldots n}} |h(\zeta)| \bigwedge_{k=1}^{n} d\varphi_k(\zeta) < A\cdot C(\mu). \tag{40}$$

Для доказательства предложения 4 нам понадобится специальная формула для решения уравнения (38). Введем необходимые обозначения: $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ — набор неотрицательных чисел,

$$G_m(\zeta, z) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\left(\frac{1-|\zeta_m|^2}{1-\bar{\zeta}_m\cdot z_m}\right)^{1+\alpha_m}\cdot P_{I,J}(\zeta, z) =$$

$$= (-1)^{n-p-r+\frac{1}{2}p\cdot(p-1)+1}\bigwedge_{l\in I} G_l(\zeta, z)\frac{d\zeta_l}{\zeta_l - z_l}\bigwedge_{l\in I, J}\bar{\partial}_\zeta\left(G_l(\zeta, z)\frac{d\zeta_l}{\zeta_l - z_l}\right),$$

где $p=|I|$, $r=|J|$.

Зафиксируем на $\gamma_{I,K}(z_J)$ в качестве положительной формы объема следующую форму:

$$\left(\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\right)^{n-p-q-r} dr_1\wedge dr_2\wedge d\varphi_{k_q}\wedge,\cdots,\wedge d\varphi_{k_1}\wedge d\varphi_{l_p}\wedge,\cdots,\wedge$$
$$\wedge d\varphi_{l_1}\wedge\omega(n-p-q-r),$$

где

$$r_1 = |\zeta_i|(i\in I),\ r_2=|\zeta_k|\ (k\in K),\ \omega(n-p-q-r) =$$
$$=\bigwedge_{l\in I, J, K}(d\xi_l\wedge d\zeta_l),\ p=|I|,\ r=|J|,\ q=|K|.$$

Предложение 5. *Пусть $g^{0,1}$ — $\bar{\partial}$-замкнутая форма на полидиске D^n. Тогда функция h на D^n, определяемая по формуле*

$$h(z) = \sum_{r=0}^{n-1}\sum_{\{|J|=r\}}\left(\sum_{\{I\cap J=\varnothing\}}\int_{\gamma_I(z_J)} g^{0,1}(\zeta)\wedge P_{I,J}(\zeta, z)\right), \tag{41}$$

удовлетворяет уравнению (38).

Предложение 5 является обобщением ряда формул, полученных в работах [5], [6] при участии Б. Берндтссона (B. Berndtsson). Доказательство предложения 5 здесь не приводится.

Доказательство предложения 4. Пусть вначале $\alpha = 0$. Будем доказывать оценку (40) для компонент решения, определенных следующим образом:

$$h_{I,J}(z) = \int_{\gamma_I(z_J)} g^{0,1}(\zeta)\wedge P_{I,J}(\zeta, z), \tag{42}$$

где $P_{I,J}$ построены по набору $\{\alpha_m = 0\ (m=1,\cdots, n)\}$.

Используя определение $P_{I,J}$, получаем

$$\int_{\sigma_{1\ldots n}}|h_{I,J}(z)|\bigwedge_{k=1}^{n} d\varphi_k(z) = \int_{\sigma_{1\ldots n}}\bigwedge_{k=1}^{n} d\varphi_k(z)\left|\int_{\gamma_I(z_J)} g^{0,1}(\zeta)\wedge P_{I,J}(\zeta, z)\right| =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi_1(z)\cdots\int_0^{2\pi} d\varphi_n(z)\left|\int_{\gamma_I(z_J)} g^{0,1}(\zeta)\bigwedge_{l\in I}\left(\frac{(1-|\zeta_l|^2\, d\zeta_l}{2\pi\sqrt{-1}(1-\bar{\zeta}_l z_l)\ (\zeta_l - z_l)}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\bigwedge_{l\in I, J}\left(\frac{d\zeta_l\wedge d\bar{\zeta}_l}{2\pi\sqrt{-1}\,(1-\bar{\zeta}_l z_l)^3}\right)\right| < A\cdot\int_0^{2\pi} d\varphi_{j_1}\cdots\int_0^{2\pi} d\varphi_{j_r}\times$$

$$\times\Big(\sum_{l\in I}\int\limits_{T_I(z_J)} |g_l(\zeta)|\cdot T_I^J(\zeta)\Big) < A\cdot C(\mu),$$

где в предпоследнем неравенстве мы воспользовались оценками

$$\Big|\int\limits_{|z|=1}\frac{dz}{|\zeta-z|\cdot|1-\bar\zeta z|}\Big| < A\cdot\frac{1}{1-|\zeta|^2},\quad \Big|\int\limits_{|z|=1}\frac{dz}{|1-\bar\zeta z|^2}\Big| < A\cdot\frac{1}{1-|\zeta|^2},$$

а в последнем условием (30).

Пусть теперь $\alpha > 0$. В этом случае мы воспользуемся формулой (41) для набора $\{\alpha_m = \alpha\ (m = 1, \ldots, n)\}$. Так же, как в (42) определим компоненты $h_{I,J}$. Для доказательства оценки (39) нам понадобится такая лемма.

Лемма 4. *Существует $A > 0$ такое, что при $|\zeta| < 1$ и $\alpha > 0$:*

$$\Big|\int\limits_{|z|=1}\frac{(1-|\zeta|^2)^{\alpha-1}}{|1-\bar\zeta z|^{\alpha+1}}\,dz\Big| < A\cdot\frac{1}{1-|\zeta|^2},\tag{43}$$

$$\Big|\int\limits_{|z|=1}\frac{(1-|\zeta|^2)^{\alpha+1}\,dz}{|1-\bar\zeta\cdot z|^{\alpha+1}|\zeta-z|}\Big| < A.\tag{44}$$

Если $|\zeta_1| = \cdots = |\zeta_p| < 1$, то

$$\prod_{l=1}^{p}(1-|\zeta_l|^2)^{1+\alpha}\cdot\Bigg|\int\limits_{|z_1|=\cdots=|z_p|}\frac{d\bar z_1\bigwedge\limits_{l=1}^{p}dz_l\cdot(1-|z_1|^2)^{\alpha-1}}{\prod\limits_{l=1}^{p}[|1-\bar\zeta_l z_l|^{\alpha+1}\cdot|\zeta_l-z_l|]}\Bigg| < A\cdot(1-|\zeta_1|^2)^{\alpha}.\tag{45}$$

Доказательство этой леммы мы опускаем.

Оценим теперь те компоненты $h_{I,J}$, у которых $J=\varnothing$. В этом случае имеем

$$\int\limits_{T_{1\ldots n}}\rho^{\alpha-1}(z)\,d\bar z_1\bigwedge_{s=1}^{n}dz_s\Big|\int\limits_{T_I}g^{0,1}(\zeta)\bigwedge_{l\in I}\Big(G_l(\zeta,z)\cdot\frac{d\zeta_l}{\zeta_l-z_l}\Big)\bigwedge_{s\in\bar I}\times$$

$$\times\Big(\bar\partial_\zeta G_s(\zeta,z)\wedge\frac{d\zeta_s}{\zeta_s-z_s}\Big)\Big| \leqslant A\cdot\int\limits_{T_I}|g^{0,1}(\zeta)|\bigwedge_{l\in I}d\zeta_l\bigwedge_{s\in \bar I}\tau_s(\zeta)\times$$

$$\times\Bigg(\prod_{l\in I}(1-|\zeta_l|^2)^{1+\alpha}\int\limits_{|z_{l_1}|=\cdots=|z_{l_p}|}\frac{d\bar z_1\bigwedge\limits_{l\in I}dz_l\cdot\rho_{l_1}^{\alpha-1}(z)}{\prod\limits_{l\in I}[|1-\bar\zeta_l z_l|^{\alpha+1}\cdot|\zeta_l-z_l|]}\Bigg)\times$$

$$\times\prod_{s\in\bar I}\Big(\int\limits_{|z_s|=1}\frac{dz_s\cdot(1-|\zeta_s|^2)^{\alpha-1}}{|1-\bar\zeta_s z_s|^{\alpha+1}}\Big) <$$

$$< A\cdot\sum_{l\in I}\int\limits_{T_I}\rho_I^{\alpha}(\zeta)\cdot|g_l(\zeta)|\cdot T_I(\zeta) < A\cdot C(\mu),$$

где в предпоследнем неравенстве мы воспользовались неравенствами (33) и (35), а в последнем условием (28).

Для оценки тех компонент, у которых $J \neq \varnothing$, применим индукцию по $|I|$ от 1 до $n-|J|$. Зафиксируем мультииндексы I и J, набор $z_{j_1}, \ldots, z_{j_r}$ такой, что $|z_{j_1}| = \cdots = |z_{j_r}| = \cdots = |z_{I_r}|$, и определим

$$D(z_J) = \{\zeta \in D^n : \zeta_{j_m} = z_{j_m}\}, \quad D^I(z_J) = \{\zeta \in D(z_J) : 1 \geqslant |\zeta_i| >$$

$$> |z_{j_1}| \ (i \in I)\}, \quad h_J^I(z) = \sum_{\substack{J' \supseteq J \\ \{I', J' \subset I \cup J\}}} \int\limits_{T_{I'}(z_{J'})} g^{0,1}(\zeta) \wedge p_{I', J'}(\zeta, z).$$

Тогда функция $\operatorname{Im} h_J^I(z)$ плюригармонична по $z_i \ (i \in I)$ в $D^I(z_J)$, так как $\bar\partial_I h_J^I(z)\big|_{D^I(z_J)} = 0$, где $\bar\partial_{\bar I}$ — $\bar\partial$-дифференциал по переменным $z_i \ (i \in I)$. Отсюда заключаем

$$\Bigg| \int\limits_{|z_I| = |z_{j_1}|} \bigwedge_{i \in I} dz_i \, |\operatorname{Im} h_{I,J}(z)| \Bigg| \leqslant \Bigg| \int\limits_{|z_i| = |z_{j_1}|} \bigwedge_{i \in I} dz_i \Bigg(|\operatorname{Im} h_J^I(z)| +$$

$$+ \sum_{\substack{|I'| < |I| \\ J' \supset J}} |\operatorname{Im} h_{I', J'}(z)| \Bigg) \Bigg| < \Bigg| \int\limits_{|z_i| = 1} \bigwedge_{i \in I} dz_i \, |\operatorname{Im} h_J^I(z)| \Bigg| +$$

$$+ \Bigg| \int\limits_{|z_I| = |z_{j_1}|} \bigwedge_{i \in I} dz_i \sum_{\substack{|I'| < |I| \\ J' \supset J}} |\operatorname{Im} h_{I', J'}(z)| \Bigg|. \tag{46}$$

Тогда имеем

$$\int\limits_{T_{1\ldots n}} \rho^{\alpha-1}(z) \, d\bar z_{j_1} \bigwedge_{s=1}^{n} dz_s \, |\operatorname{Im} h_{I,J}(z)| <$$

$$< \int\limits_{|z_{j_1}| = \cdots = |z_{j_r}|} \rho_{j_1}^{\alpha-1}(z) \, d\bar z_{j_1} \bigwedge_{m \notin I} dz_m \int\limits_{\left\{\substack{|z_i| = |z_{j_1}| \\ i \in I}\right\}} \bigwedge_{i \in I} dz_i \, |\operatorname{Im} h_J^I(z)| + A \cdot C(\mu) <$$

$$< \int\limits_{|z_{j_1}| = \cdots = |z_{j_r}|} \rho_{j_1}^{\alpha-1}(z) \, d\bar z_{j_1} \bigwedge_{m \notin I} dz_m \int\limits_{\left\{\substack{|z_i| = 1 \\ i \in I}\right\}} \bigwedge_{i \in I} dz_i \, |\operatorname{Im} h_J^I(z)| + A \cdot C(\mu) <$$

$$< \sum_{\substack{I' \subseteq I \\ J' \supseteq J}} \Bigg(\int\limits_{\left\{\substack{|z_j| = |z_{j_1}| \\ j \in J'}\right\}} \rho_{j_1}^{\alpha-1}(z) \, d\bar z_{j_1} \bigwedge_{j \in J'} dz_j \cdot \Bigg(\int\limits_{T_{I'}(z_{J'})} \Big(\sum_{i \in I'} |g_i| \, d\bar\zeta_i \Big) \bigwedge_{i \in I'} d\zeta_i \bigwedge_{s \notin I', J'} \zeta_s(\zeta) \times$$

$$\times \int\limits_{\left\{\substack{|z_i| = 1 \\ i \in I'}\right\}} \bigwedge_{i \in I'} \frac{(1 - |\zeta_i|^2) \, dz_i}{|1 - \bar\zeta_i z_i|^{1+\alpha} \, |\zeta_i - z_i|^{\varepsilon}} \times \int\limits_{\left\{\substack{|z_s| = 1 \\ s \notin I', J'}\right\}} \frac{(1 - |\zeta_s|^2)^{\alpha-1} \, dz_s}{|1 - \bar\zeta_s z_s|^{\alpha+1}} \Bigg) \Bigg) +$$

$$+ A \cdot C(\mu) < A \cdot C(\mu),$$

где в первом неравенстве мы воспользовались (46) и предположением индукции, во втором неравенстве использовано (46), а в последнем неравенства (43), (44) и условие (39) для $\gamma_{J',I'}$. При доказательстве базы индукции, т. е. оценки для $\operatorname{Im} h_{I,J}$ при $|I|=1$ достаточно воспользоваться гармоничностью $h_{I,J}$ в $D^{I}(z_J)$, что впервые было отмечено Ф. Шарпантье (Ph. Charpentier) в [7].

Замечание. Нами доказана необходимая оценка на многообразии $\gamma^a_{1\ldots n}$, где набор $\{a_i\}$ фиксирован. Однако, используя одномерное неравенство Йенсена, легко получаем требуемую оценку на произвольном многообразии $\gamma^a_{1\ldots n}$.

Доказательство достаточности в теореме 2.

Для доказательства достаточности в теореме 2 последовательно применяем предложения 2, 3 и 4 и получаем решение $u = 2\pi\,(\operatorname{Im} h)$ уравнения Пуанкаре — Лелона $\partial\bar\partial \frac{\sqrt{-1}}{\pi} u = \mu$, удовлетворяющее (39) или (40). Т. к. для призвольной голоморфной F, имеющей M множеством нулей, выполняется уравнение $\partial\bar\partial \frac{\sqrt{-1}}{\pi} \ln|F| = \mu$, то получаем, что существует голоморфная функция f на D^n такая, что $u = \ln|f|$. Это завершает доказательство теоремы 2 при $\alpha > 0$. При $\alpha = 0$ необходимо применить предложения 2, 3, и 4 к потоку μ на вложенных полидисках, а затем, используя диагональный канторовский процесс, построить последовательность голоморфных функций, сходящуюся равномерно на компактах к искомой голоморфной функции.

Доказательство теоремы 1. Для доказательства теоремы 1 достаточно для аналитического подмножества M в D^n чистой размерности $n-1$ построить голоморфную функцию f такую, что $M = \{\xi \in D^n : f(\xi) = 0\}$ и $\operatorname{ord} f = \operatorname{ord} M$.

Обозначим $\alpha = \operatorname{ord} M$. Тогда, используя теорему 3, получаем:

$$V_M^{\alpha+\varepsilon}(\delta) < A(\varepsilon)\cdot \frac{(\ln\delta)^{n-2}}{\delta^{1-\varepsilon/2}},$$

т. е. выполнение достаточных условий теоремы 2 для $\alpha+\varepsilon$.

Применяя теперь предложение 2, находим набор $\{a_i\}$ такой, что для $\forall\, \varepsilon > 0$ выполняются условия

$$\int\limits_{\gamma_I^a} \mu_{ll}\cdot\rho_l^{1+\alpha+\varepsilon}\cdot T_I < A(\varepsilon),$$

$$\int\limits_{\gamma_I^a} (\mu_{mm} + |\mu_{ml}|)\cdot\rho_l^{\alpha}\cdot\rho_m\cdot T_I < A(\varepsilon),$$

$$\int\limits_{\gamma_{I,K}^a} (\mu_{mm} + \mu_{kk} + |\mu_{mk}|)\cdot\rho_l^{\alpha}\cdot T_{I,K} < A(\varepsilon).$$

Теперь для построения искомой функции f порядка α достаточно воспользоваться гомотопией (33) для $\alpha > 0$ из предложения 3 и формулой (41) из предложения 5.

НПО Главмосавтотранс

Поступила 14. VII. 1986

Պ. Լ. ՊՈԼՅԱԿՈՎ. *Հոլոմորֆ ֆունկցիաների վերջավոր կարգի զրոները բազմաշրջանում (ամփոփում)*

Այս աշխատանքում ապացուցվում է ord $M = \min\{\operatorname{ord} f\}$ *հավասարությունը* D^n *բազմաշրջանում 1 կոդաչափականության անալիտիկ* M *ենթաբազմության, ինչպես նաև* f *հոլոմորֆ ֆունկցիաների համար, որոնց զրոները բազմությունը* M*-ն է։ Այդ հավասարությունը պատասխան է Վ. Շտոլլի կողմից դրված հարցին, ինչպես նաև մասնակի պատասխան Մ. Ջրբաշյանի* $N^\alpha(D^n)$ *Նևանլիննա-Ջրբաշյանի դասի հոլոմորֆ ֆունկցիաների զերոների նկարագրման խնդրում։*

P. L. POLYAKOV. *Zeros of finite order holomorphic functions within a polydisc* (summary)

In this work the equality ord $M = \min\{\operatorname{ord} f\}$ is proved for analytic subvariety M of codimensional 1 in a polydisc D^n and holomorphic functions f for which M is a zero set. This equality gives an answer to the question, posed by W. Stoll, and a partial answer to the problem of M. Dzrbasjan of description of zero sets of holomorphic functions of the class of Nevanlinna—Dzrbasjan $N^\alpha(D^n)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *W. Stoll.* Holomorphic functions of finite order in several complex variables, Conf. board of math. science, Regional conf. series in math., 21, Providence, Amer. Math. Soc.. 1974.
2. *Л. И. Ронкин.* Введение в теорию целых функций многих переменных, М., Наука, 1971.
3. *М. М. Джрбашян.* К проблеме представимости аналитических функций, Сообщения инст. матем. и механики АН АрмССР, вып. 2, 1948, 3—40.
4. *Ш. А. Даутов, Г. М. Хенкин.* Нули голоморфных функций конечного порядка и весовые оценки решений $\bar{\partial}$-уравнения, Матем. сб., 107, вып. 2, 1978, 165—174.
5. *G. M. Henkin, P. L. Polyakov.* Les zéros des fonctions holomorphes d'ordre fini dans le bidisque, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 298, Serie I. n. 1, 1984, 5—8.
6. *G. M. Henkin, P. L. Polyakov.* Prolongement des fonctions holomorphes bornées 'une sous—variete du polydisquh, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 298, Serie I, n. 10 1984, 221—224.
7. *Ph. Charpentier.* Caractérisation des zéros des fonctions de certaines classes de de type Nevanlinna dans le bidisque, Prepublication, Université de Paris—Sud, Orsay, 1983.
8. *Ph. Charpentier.* Sur les zéros des fonctions de type Nevanlinna dans le bidisque, Prepublication, Université de Paris—Sud, Orsay. 1983.
9. *M. Andersson.* Solution formulas for the $\partial\bar{\partial}$-equation and weighted Nevanlinna classes in the polydisc, Preprint, Chalmers University of Technology and University of Göteborg, Göteborg, 1984.
10. *P. Lelong.* Fonctions plurisousharmoniques et formes differentielles, positives, Paris, Gordon and Breach, 1968.
11. *P. Lelong.* Fonctionelles analytiques et fonctions entiéras, Montrèal, Les Presses de l'Univ. de Montréal, 1968.
12. *П. Л. Поляков.* Нуля голоморфных функций конечного порядка в полидиске. Мат. сб., 1986.