ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XXIII, № 4, 1988 Математика

УДК 517.5

А. Г. БАГДАСАРЯН

ОБ ИНТЕРПОЛЯЦИИ И О СЛЕДАХ ФУНКЦИЙ ИЗ НЕКОТОРЫХ АНИЗОТРОПНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВ

Сущность функционального подхода при изучении различных вопросов, возникающих в теории дифференциальных уравнений с частными производными заключается в том, что дифференциальное уравнение вместе с граничными условиями реализуется как оператор, действующий в специально подобранном пространстве. Появляется необходимость изучения свойств этого пространства, осуществления интерполяции и получения теорем вложения различных измерений и различных метрик. Первые результаты по проблеме следов функций из пространств С. Л. Соболева были получены С. Л. Соболевым [1] и дополнены затем В. И. Кондрашовым [2] и В. П. Ильиным [3]. Эти результаты формулировались в терминах пространств W и, как выяснилось, не могут иметь замкнутой формы в терминах этих пространств (во всяком случае при $p \neq 2$). Окончательные результаты были получены при $p = 2$ Ароншайном [4], В. М. Бабичем и Л. Н. Слободецким [5]. Гальярдо [6] охарактеризовал следы функций из пространства W_p^1 (R_n), $1 \leqslant p \leqslant \infty$, на $(n-1)$-мерном сечении R_n. О. В. Бесов [7, 8] решил эту задачу для анизотропных пространств С. Л. Соболева и сечения произвольной размерности m; $m < n-1$. Для пространств Никольского-Бесова $B^r_{p,q}$ прямые и обратные теоремы вложения различных измерений были доказаны С. М. Никольским [9, 10] при $q = \infty$ и О. В. Бесовым [7, 8] при $1 \leqslant q < \infty$. Обобщением предыдущих результатов занимались многие авторы. Отметим, прежде всего, работы П. И. Лизоркина [11], Л. Н. Слободецкого [12], С. В. Успенского [13]. Более подробное изложение истории вопроса и соответствующую библиографию можно найти в монографиях [14—17]. В работе [18] Л. Р. Волевича и Б. П. Панеяха описаны следы из достаточно общих гильбертовых пространств (содержащих в частности лиувиллевские гильбертовые пространства).

В настоящей заметке вводятся некоторые банаховые пространства функций, совпадающие при $p = 2$ с изученными в [18] пространствами. В отличие от случая гильбертовых пространств, когда следы функций из этих пространств описываются терминами пространств такого же типа (с иной весовой функцией), в нашем случае для достижения этой цели, как и в классическом случае, возникает необходимость введения более общих пространств типа Бесова. В частности при $n = 2$ следы функций из этих пространств совпадают со следами функций из обычных пространств Соболева.

Как самостоятельное направление исследований теория интерполяции в банаховых пространствах сложилась в 1958—1961 годах в работах Ж. Л. Лионса, Э. Гальярдо, А. П. Кальдерона, С. Г. Крейна и других. Существенную роль в ее развитии сыграли работы Я. Петре, который, в частности, в работе [19] получил результаты об интерполяции изотропных пространств Соболева и Бесова. Х. Трибелем в работе [20] были распространены эти результаты для обобщенно-однородных пространств. Здесь мы доказываем теорему об интерполяции некоторых пространств типа Соболева—Лиувилля. В изложении мы будем придерживаться схем, предложенных Трибелем в [17, 21], Бергом и Лефстрёмом в [22], при этом будем пользоваться методами и результатами как перечисленных, так и многих других авторов. В дальнейшем мы намерены применить полученные здесь результаты при доказательстве априорных оценок для одного класса дифференциальных операторов, являющегося подклассом регулярных операторов, введенных С. М. Никольским в [23].

1°. Будем пользоваться следующими обозначениями: R_n — n-мерное эвклидово пространство, Z_n^+ — множество мультииндексов, т. е. векторов $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ с целыми, неотрицательными компонентами. Если $\xi\in R_n$, $\alpha\in Z_n^+$, то положим: $|\alpha|=\sum_{i=1}^n\alpha_i$, $\xi^\alpha=\xi_1^{\alpha_1}\cdots\xi_n^{\alpha_n}$, $D^\alpha=D_1^{\alpha_1}\cdots D_n^{\alpha_n}$. Пусть $\mathbf{A}=\{\alpha^1,\cdots,\alpha^N\}$, $\alpha^j\in Z_n^+$ $(j=1,2,\cdots,N)$.

Определение 1. Характеристическим многогранником множества $\mathbf{A}$ назовем наименьший выпуклый многогранник $\mathbf{N}=\mathbf{N}(\mathbf{A})$ в R_n, содержащий все точки $\mathbf{A}$.

Определение 2. Непустой многограник $\mathbf{N}$ с вершинами из Z_n^+ назовем полным, если начало координат Z_n^+ является вершиной $\mathbf{N}$ и $\mathbf{N}$ имеет вершины на каждой оси координат Z_n^+, отличные от начала координат. Полный многогранник $\mathbf{N}$ назовем вполне правильным, если внешние нормали $(n-1)$-мерных некоординатных граней $\mathbf{N}$ имеют только положительные координаты. Пусть $\mathbf{N}$ — полный многогранник с вершинами $\alpha^0,\alpha^1,\cdots,\alpha^n,\beta^1,\cdots,\beta^N$, при этом вершина α^j находится на j-той координатной оси $(j=1,2,\cdots,n)$ и $\alpha^0=(0,\cdots,0)$. Сопоставим многограннику $\mathbf{N}$ функцию

$$\mu(\xi)=\left(\sum_{j=1}^n\xi^{2\alpha^j}+\sum_{i=1}^N\xi^{2\beta^i}\right)^{1/2} \tag{1}$$

и многогранник $\mathfrak{M}(\bar{s},\mathbf{N})$ с вершинами $(0,\cdots,0)$, $s\alpha^j$, $s\beta^i$ $(j=1,2,\cdots,n;\ i=1,2,\cdots,N)$.

Определение 3. Пусть $-\infty<s<\infty$, $1<p<\infty$, S' — пространство медленно растущих распределений.

Положим

$$H_p^s(\mu;R_n)=\left\{f;\ f\in S',\ \|f\|_{H_p^s}=\left\|F^{-1}\{(1+\mu^2)^{s/2}Ff\}\right\|_{L_p(R_n)}<\infty\right\}.$$

Определение 4. Пусть s — натуральное число и следовательно вершины многогранника $\mathfrak{M}$ принадлежат Z_n^+. Положим:

$$W_p^s(\mu;\ R_n) = \left\{ f;\ f \in S',\ \|f\|_{W_p^s}\left(\sum_{\alpha\in\mathfrak{M}} \|D^\alpha f\|^p_{L_p(R_n)}\right)^{1/p} < \infty \right\}.$$

При $|\alpha^j| = |\beta^i| = m$ $(j = 1, 2, \cdots, n;\ i = 1, 2, \cdots, N)$ определенные выше пространства H_p^s, W_p^s совпадают с обычными пространствами Лиувилля и Соболева, соответственно. Здесь, как и в классическом случае можно доказать, что при натуральном s $H_p^s(\mu;\ R_n) = W_p^s(\mu;\ R_n)$. Пусть M_p^q — пространство всех мультипликаторов Фурье типа (p,q), т. е. обобщенных функций ρ из S' таких, что $(F^{-1}\rho)_* g \in L_q$ для всех $g \in S$ и конечна следующая норма:

$$\|\rho\|_{M_p^q} = \sup_{\|g\|_{L_p}=1} \|(F^{-1}\rho) * g\|_{L_q(R_n)}.$$

Определение 5. Пусть функция $\mu(\xi)$ определена формулой (1). Через $\Phi(\mu;\ R_n)$ обозначим множество систем функций $\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty}$, обладающих следующими свойствами:

а) $\varphi_k \in S(R_n)$, $(F\varphi_k)(\xi) \geqslant 0$, $k = 0, 1, \cdots$,

б) $\operatorname{supp} F\varphi_k \subset \{\xi;\ \xi \in R_n,\ 2^{k-1} < \mu(\xi) < 2^{k+1}\}$,

$$\operatorname{supp} F\varphi_0 \subset \{\xi;\ \xi \in R_n,\ \mu(\xi) < 2\}, \tag{2}$$

в) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (F\varphi_k)(\xi) \geqslant c_1 > 0$, $\forall \xi \in R_n$,

г) существует $c_2 > 0$ такое, что

$$\|(F\varphi_k)\|_{M_p^p} < c_2,\ k = 1, 2, \cdots. \tag{3}$$

Приведем примеры таких систем функций.

Пример 1. Пусть $\omega(t)$ — несколько видоизмененное ядро Соболева, т. е. бесконечно дифференцируемая, неотрицательная функция одной переменной с носителем в $[0, 1]$ такая, что $\int\limits_0^1 \omega(t)\,dt = 1$. Положим далее для $k = 0, 1, 2, \cdots$

$$G_k(\xi) = \{t;\ t \in R_1,\ 2^k \leqslant \mu(\xi) + 2^{k-1} t \leqslant 2^{k+1}\}.$$

Покажем, что система $\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty}$, где

$$(F\varphi_k)(\xi) = \int\limits_{G_k(\xi)} \omega(t)\,dt,\ k = 1, 2, \cdots \tag{4}$$

и функция $\varphi_0(\xi)$ выбрана подходящим образом, удовлетворяет условиям а)— г). Свойство а) следует из (1) и (4). Докажем свойство б). Если точка ξ_0 такова, что $\mu(\xi_0) > 2^{k+1}$ или $\mu(\xi_0) < 2^{k-1}$, то $4 - 2^{-(k-1)}\mu(\xi_0) < 0$ или $2 - 2^{-(k-1)}\mu(\xi_0) > 1$. В обоих случаях по формуле (4) $(F\varphi_k)(\xi_0) = 0$. Для доказательства свойства в) убедимся, что для любого ξ_0;

$\mu(\xi_0) > 3/2$ существует номер k_0 такой, что $G_{k_0}(\xi_0) \supset \left[\frac{1}{2}; 1\right]$ т. е. одновременно $2-2^{-(k_0-1)}\mu(\xi_0) \leqslant \frac{1}{2}$ и $1 \leqslant 4-2^{-(k_0-1)}\mu(\xi_0)$. Поскольку $[3/2; \infty) = \bigcup_{k=1}^{\infty}[3\cdot 2^{k-2}; 3\cdot 2^{k-1}]$, то хотя бы для одного натурального k_0

$$3\cdot 2^{k_0-2} \leqslant \mu(\xi_0) \leqslant 3\cdot 2^{k_0-1}.$$

Теперь, если выбрана подходящая функция $\varphi_0(\xi)$, то свойство в) становится очевидным.

Для доказательства свойства г) применим теорему П. И. Лизоркина о мультипликаторах типа (p, p) (см. [24]). Представим произвольно взятый мультииндекс α в виде суммы ненулевых мультииндексов; $\alpha = \beta^1 + \cdots + \beta^M$ и обозначим через $\mathbf{A}(\alpha)$ множество всех таких представлений, т. е. множество всевозможных наборов мультииндексов $\{\beta^1, \cdots, \beta^M\}$ таких, что $\beta^1 + \cdots + \beta^M = \alpha$. При этом очевидно число M принимает значения $M=1, 2, \cdots, |\alpha|$. Тогда производные $D^\alpha F\varphi_k$ $(k = 1, 2, \cdots)$ представляются в вида

$$(D^\alpha F\varphi_k)(\xi) = \sum_{\mathbf{A}(\alpha)} C_k(\beta^1, \cdots, \beta^M; \omega, \omega', \cdots, \omega^{(|\alpha|)})\, D^{\beta^1}\mu(\xi), \cdots, D^{\beta^M}\mu(\xi), \tag{5}$$

где сумма распространяется по всевозможным наборам $\{\beta^1, \cdots, \beta^M\} \in \mathbf{A}(\alpha)$, а для коэффициентов C_k справедливо неравенство

$$|C_k(\beta^1, \cdots, \beta^M; \omega, \omega', \cdots, \omega^{(|\alpha|)})| \leqslant c_1 \cdot 2^{-Mk} \tag{6}$$

с некоторой постоянной $c_1 = c_1(\alpha) > 0$.

Теперь из представления (5) имеем

$$\xi^\alpha (D^\alpha F\varphi_k)(\xi) = \sum_{\mathbf{A}(\alpha)} C_k[\xi^{\beta^1} D^{\beta^1}\mu(\xi)], \cdots, [\xi^{\beta^M}\cdot D^{\beta^M}\mu(\xi)].$$

Так как $\mathbf{N}(\mu)$ является вполне правильным многогранником, то (см. [25]) существует постоянная $c_2 = c_2(\gamma)$ такая, что

$$|\xi^\gamma D^\gamma \mu(\xi)| \leqslant c_2\,\mu(\xi),\ \gamma \in Z_n^+,\ \xi \in R_n. \tag{7}$$

Пользуясь доказанным свойством б) и неравенствами (6), (7), из представления (5) получим для любого $\alpha \in Z_n^+$

$$|\xi^\alpha (D^\alpha F\varphi_k)(\xi)| \leqslant c,\ k = 1; 2, \cdots.$$

Пример 2. Пусть $\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty} \in \Phi(\mu; R_n)$. Положим

$$(F\psi_k)(\xi) = (F\varphi_k)(\xi)\left[\sum_{j=0}^{\infty}(F\varphi_j)(\xi)\right]^{-1},\ k=0, 1, 2, \cdots.$$

Получим систему $\{\psi_k\}_{k=0}^{\infty} \in \Phi(\mu; R_n)$, для которой справедливо тождество

$$\sum_{k=0}^{\infty}(F\psi_k)(\xi) \equiv 1. \tag{8}$$

Определение 6. Пусть $-\infty < s < \infty$, $1 < p < \infty$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$. Положим

$$B^s_{p,q}(\mu;\ R_n) = \left\{ f;\ f \in S',\ \|f\|_{B^s_{p,q}} = \left[\sum_{k=0}^{\infty} (2^{ks}\|f * \varphi_k\|_{L_p(R_n)})^q \right]^{1/q} < \infty \right\},$$

$$F^s_{p,q}(\mu;\ R_n) = \left\{ f;\ f \in S',\ \|f\|_{F^s_{p,q}} = \left[\int_{R_n} \left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{ksq} |f * \varphi_k|^q \right)^{p/q} dx \right]^{1/p} < \infty \right\},$$

$$B^s_{p,\infty}(\mu;\ R_n) = \left\{ f;\ f \in S',\ \|f\|_{B^s_{p,\infty}} = \sup_k 2^{ks} \|f * \varphi_k\|_{L_p(R_n)} < \infty \right\}.$$

При этом в определении $F^s_{p,q}$ будем считать, что $1 < q < \infty$. Пусть $f \in S'(R_n)$, положим $I^s f = F^{-1}\{(1+\mu^2)^{s/2} Ff\}$. Всюду в дальнейшем, если это не вызывает путаницы, через c мы обозначаем (вообще говоря) разные постоянные.

2°. Лемма. Пусть $f \in S'(R_n)$, для системы $\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty} \in \Phi(\mu;\ R_n)$ выполняется тождество (8), $f * \varphi_k \in L_k(R_n)$, $k = 1, 2, \cdots$. Тогда для любого p; $1 < p < \infty$, $\exists c > 0$ такое, что

$$\|I^s \varphi_k * f\|_{L_p(R_n)} \leqslant c\, 2^{ks} \|f * \varphi_k\|_{L_p(R_n)},\quad k = 0, 1, \cdots.$$

Доказательство. Будем считать, что $\varphi_k \equiv 0$ при $k < 0$. Из условий (2), (8) следует, что для всех k

$$f * \varphi_k = \sum_{r=-2}^{2} (\varphi_{k+r} * \varphi_k * f), \tag{9}$$

поэтому

$$2^{-ks} \|I^s \varphi_k * f\|_{L_p(R_n)} = (2\pi)^{n/2} \|F^{-1}\{(1+\mu^2)^{s/2} F\varphi_k \cdot Ff \cdot 2^{-sk}\}\|_{L_p(R_n)} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{r=-2}^{2} \|F^{-1}\{(1+\mu^2)^{s/2} F(\varphi_{k+r} * \varphi_k * f)\, 2^{-ks}\}\|_{L_p(R_n)} =$$

$$= (2\pi)^{n/2} \sum_{r=-2}^{2} \|F^{-1}\{2^{-ks}(1+\mu^2)^{s/2} F\varphi_{k+r} \cdot F(\varphi_k * f)\}\|_{L_p(R_n)} \leqslant$$

$$\leqslant c \|f * \varphi_k\|_{L_p(R_n)}.$$

Последнее неравенство следует из того, что функции

$$2^{-ks}(1+\mu^2)^{s/2} F\varphi_{k+r},\ r = -2, \cdots, 2;\ k = 0, 1, \cdots$$

является элементом пространства M^p_p, причем

$$\sup_{\|g\|_{L_p}=1} \|F^{-1}\{(1+\mu^2)^{s/2} F\varphi_{k+r} \cdot Fg\}\|_{L_p} \leqslant c,\ k = 0, 1, \cdots.$$

Проверка этого факта легко осуществляется с помощью теоремы П. И. Лизоркина, при этом свойства (2) и (3) обеспечивают выполнение условий этой теоремы. Лемма доказана.

Наша ближайшая цель — доказательство интерполяционной теоремы для пространств H^s_p $(\mu;\ R_n)$. Приведенная выше лемма будет играть основную роль в этом вопросе. Пусть A_0 и A_1 — два комплексных банаховых пространства, линейно и непрерывно вложенных в комплексное топологическое пространство $A : A_0 \subset A,\ A_1 \subset A$. Два таких пространства будем называть интерполяционной парой $\{A_0, A_1\}$. Для интерполяционной пары $\{A_0, A_1\}$ и всякого t, $0<t<\infty$ определим в A_0+A_1 функционал K следующим образом:

$$K(t,\ a;\ A_0,\ A_1) = \inf_{a=a_0+a_1} (\|a_0\|_{A_0} + t\|a_1\|_{A_1}).$$

Определение 7а. Пусть $\{A_0, A_1\}$ — интерполяционная пара, $0<\theta<1$. При $1\leqslant q<\infty$ положим

$$(A_0,\ A_1)_{\theta,q} = \left\{a;\ a\in A_0 + A_1,\ \|a\|_{(A_0,\ A_1)_{\theta,q}} = \right.$$

$$\left. = \left(\int_0^\infty [t^{-\theta} K(t,\ a)]^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q} < \infty\right\},$$

при $q=\infty$

$$(A_0,\ A_1)_{\theta,\infty} = \{a;\ a\in A_0 + A_1,\ \|a\|_{(A_0,\ A_1)_{\theta,\infty}} = \sup_t t^{-\theta} K(t,\ a) < \infty\}.$$

Дадим другое определение пространства $(A_0,\ A_1)_{\theta,q}$, эквивалентное определение 7а (см. [17]). Для интерполяционной пары $\{A_0,\ A_1\}$ и t $0<t<\infty$ введем функционал, определенный в $A_0 \cap A_1$:

$$J(t,\ a;\ A_0,\ A_1) = \max\{\|a\|_{A_0},\ t\|a\|_{A_1}\}.$$

Для сокращения записи положим

$$\|v\|_{L_p^*} = \left(\int_0^\infty |v(t)|^p \frac{dt}{t}\right)^{1/p}, \text{ при } 1\leqslant p<\infty,$$

$$\|v\|_{L_\infty^*} = \operatorname*{vrai\,max}_{0<t<\infty} |v(t)|, \text{ при } p=\infty.$$

Определение 7б. Пусть $\{A_0,\ A_1\}$ — интерполяционная пара, $0<\theta<1$, $1\leqslant q\leqslant\infty$. Через $(A_0,\ A_1)_{\theta,q}$, обозначим множество элементов a, $a\in A_0+A_1$ для которых существует непрерывная $A_0 \cap A_1$ — значная функция $u(t)$ с конечной нормой $\|t^{-\theta} J(t,\ u)\|_{L_p^*}$ такая, что $a = \int_0^\infty u(t)\frac{dt}{t}$. Введем в $(A_0,\ A_1)_{\theta,q}$ норму следующим образом:

$$\|a\|_{(A_0,\ A_1)_{\theta,q}} = \inf\|t^{-\theta} J(t,\ u)\|_{L_p^*},$$

где нижняя грань берется по всем представлениям элемента a описанного типа.

Теорема 1. *Пусть* $1<p<\infty$, $0<\theta<1$, $s_0 \neq s_1$, $1\leqslant q\leqslant\infty$, *тогда*

$$(H_p^{s_0}(\mu,\ R_n),\ H_p^{s_1}(\mu;\ R_n))_{\theta,q} = B_{p,q}^s(\mu;\ R_n),$$

где $s=(1-\theta)s_0+\theta s_1$.

Доказательство. Пусть $\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty} \in \Phi(\mu; R_n)$, $\sum_{k=0}^{\infty} (F\varphi_k)(\xi) \equiv 1$ и $f \in (H_p^{s_0}, H_p^{s_1})_{\theta, q}$. Представим функцию f в виде суммы $f = f_0 + f_1$, где $f_0 \in H_p^{s_0}$, $f_1 \in H_p^{s_1}$. В силу доказанной леммы имеем

$$\|f * \varphi_k\|_{L_p} \leqslant \| < \|f_0 * \varphi_k\|_{L_p} + \|f_1 * \varphi_k\|_{L_p} <$$
$$\leqslant c\,(2^{-s_0 k}\|I^{s_0} f_0\|_{L_p} + 2^{-s_1 k}\|I^{s_1} f_1\|_{L_p}).$$

Беря нижнюю грань по всем разложениям функции f, получим

$$\|f * \varphi_k\|_{L_p} \leqslant c\,2^{-s_0 k} K(2^{k(s_0-s_1)}, f;\ H_p^{s_0}, H_p^{s_1}).$$

Это неравенство вместе с леммой 3.1.3 из [22] приводит к оценке

$$\|f\|_{B^s_{p,q}} = \Big(\sum_{k=0}^{\infty} (2^{ks}\|f * \varphi_k\|_{L_p})^q\Big)^{1/q} \leqslant c\|f\|_{(H_p^{s_0},\ H_p^{s_1})_{\theta, q}}.$$

Докажем обратную оценку. Пусть $f \in B^s_{p,q}(\mu; R_n)$. На основании доказанной леммы имеем

$$2^{k(s-s_0)} J(2^{k(s_0-s_1)}, \varphi_k * f;\ H_p^{s_0}, H_p^{s_1}) \leqslant$$
$$\leqslant c\,2^{k(s-s_0)} \max(2^{ks_1}\cdot\|\varphi_k * f\|_{L_p},\ 2^{ks_0}\|\varphi_k * f\|_{L_p}) = c\,2^{ks}\|\varphi_k * f\|_{L_p}.$$

Из полученного неравенства и леммы 3.2.3 из [22] будет следовать нужная оценка, если мы докажем, что $f = \sum_{k=0}^{\infty} f * \varphi_k$, в $H_p^{s_0} + H_p^{s_1}$.

Пусть $s_0 < s_1$, тогда $H_p^{s_0} + H_p^{s_1} = H_p^{s_0}$ и

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|f * \varphi_k\|_{H_p^{s_0}} \leqslant c\|f\|_{B^s_{p,q}} < \infty.$$

Теперь уже условие $\sum_{k=0}^{\infty} (F\varphi_k)(\xi) \equiv 1$ обеспечивает нужную сходимость в $H_p^{s_0}$. Теорема доказана.

3°. Определим оператор следа соотношением

$$(Trf)(x') = f(x', 0),\quad x' = (x_1, \cdots, x_{n-1}),\quad f \in S(R_n).$$

Следы остальных функций определяем с помощью предельного перехода. В настоящем пункте мы опишем следы функций из определенных весовых классов (определение весовой функции см. в [18]). В качестве таких весов будем использовать в частности функции $(1+\mu^2)^{s/2}$, ν, где функции $\mu(\xi)$ и $\nu(\xi)$ определяются следующим образом:

$$\mu(\xi) = \Big(\sum_{j=1}^{n} \xi^{2\alpha_j} + \sum_{j=1}^{N} (\xi')^{2(\beta^j)^l}\Big)^{1/2}, \tag{10}$$

$$\nu(\xi) = (1+\mu^2(\xi'))^{\frac{s_1}{2}}\,(1+\mu^2(\xi))^{\frac{s_0-s_1}{2}}. \tag{11}$$

Расширим несколько определение 3.

Определение 8. Для $1 \leqslant p \leqslant \infty$ и весовой функции $\lambda(\xi)$ положим

$$H_{p,\lambda} R_n = \{f;\ f \in S', \|f\|_{H_{p,\lambda}} = \|F^{-1}\{\lambda(\xi) F f\}\|_{L_p(R_n)} < \infty\}.$$

Теорема 2. *Пусть s_0, s_1 — натуральные числа, причем $s_1 < s_0$. Тогда для p, $1 < p < \infty$*

$$\mathrm{Tr}:\ H_{p,\nu}(R_n) \to B_{p,p}^{s_0 - \frac{1}{pm}}(\mu(\xi'); R_{n-1}), \tag{12}$$

где $m = |\alpha^n|$.

Доказательство. По соображениям плотности (см. [18]) достаточно рассмотреть лишь функции из S.

Пусть R_n^+ — полупространство $x_n > 0$ и

$$W_{p,\nu}(R_n^+) = \left\{f;\ f \in S',\ \|f\|_{W_{p,\nu}(R_n^+)} = \Big(\sum_{\alpha \in B} \|D^\alpha f\|^p_{L_p(R_n^+)}\Big)^{1/p} < \infty\right\},$$

где $B = B(\nu)$ — многогранник, отвечающий функции $\nu(\xi)$, т. е. многогранник с вершинами $(0, \cdots, 0)$, $s_0\alpha^j$ $(j = 1, \cdots, n-1)$, $(s_0(\beta')^i, 0)$ $(i = 1, \cdots, N)$, $(s_1\alpha^j, s_1 m)$ $(j = 1, \cdots, n-1)$, $(s_1(\beta')^i, s_1 m)$ $(i = 1, \cdots, N)$, $(0, \cdots, s_1 m)$ из Z_n^+. Обозначим через R оператор сужения на R_n^+.

Так как $\mathrm{Tr} f = \mathrm{Tr} Rf$, то соотношение (12) будет установлено, если мы докажем, что

$$\mathrm{Tr}:\ W_{p,\nu}(R_n^+) \to B_{p,p}^{s_0 - \frac{1}{pm}}(\mu(\xi'); R_{n-1}).$$

Из теоремы 1 следует, что для любого s_1, $s_1 \neq s_0$

$$(H_p^{s_0}(\mu(\xi'); R_{n-1}), H_p^{s_1}(\mu(\xi'); R_{n-1}))_{\frac{1}{pm(s_0 - s_1)}, p} =$$

$$= B_{p,p}^{\left(1 - \frac{1}{pm(s_0 - s_1)}\right) s_0 + \frac{s_1}{pm(s_0 - s_1)}}(\mu(\xi'); R_{n-1}) = B_{p,p}^{s_0 - \frac{1}{pm}}(\mu(\xi'); R_{n-1}).$$

Пусть $f \in S$, положим $u(t) = f(x', t)$ при $t > 0$. Тогда $u(t) \to \mathrm{Tr} f$ в $H_p^{s_1}(\mu(\xi'); R_{n-1})$ при $t \to 0$. Теперь следствие 3.12.3 из [22] дает

$$\|\mathrm{Tr} f\|_{B_{p,p}^{s_0 - \frac{1}{pm}}} \leqslant c \max\left\{\|t^{1/p} u(t)\|_{L_p^*(H_p^{s_0})},\ \|t^{1/p} u^{(m(s_0 - s_1))}(t)\|_{L_p^*(H_p^{s_1})}\right\}.$$

Правая часть полученного неравенства эквивалентна норме пространства $W_{p,\nu}(R_n^+)$. Теорема доказана.

Пусть система функций $\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty} \in \Phi(\mu;\ R_n)$ такая, что имеет место неравенство

$$|\xi|^{|\alpha|} |(D^\alpha F\varphi_k)(\xi)| \leqslant c,\ k = 1, 2, \cdots,\ \alpha \in Z_n^+, \tag{13}$$

где $c = c(\alpha) > 0$. Условие (13) обеспечивает выполнение оценки (3) (см. [26]).

Теорема 3. *Пусть $\mu(\xi)$ — функция, определенная в (10), $1 < p < \infty$, $-\infty < s < \infty$. Тогда какова бы ни была функция $f(x') \in B_{p,p}^{s - \frac{1}{pm}}(\mu(\xi'); R_{n-1})$ существует функция $g(x) \in H_p^s(\mu; R_n)$ такая, что $\mathrm{Tr}\, g(x) = f(x')$.*

Доказательство. Обозначим преобразование Фурье на R_i ($i=1,\ n-1$) и его обращение соответственно через F_i и F_i^{-1}. Пусть $\{\varphi_k'\}_{k=0}^{\infty} \in \Phi(\mu(\xi');R_{n-1})$, $\psi_0(t) \in S(R_1)$, $\psi(t) \in S(R_1)$, при этом $\operatorname{supp} F_1\psi_0 \subset \subset (-1,\ 1)$ $\operatorname{supp} F_1\psi \subset (1,\ 2)$, $\psi_0(0) = \psi(0) = 1$.

Положим $(F_1\psi_k)(t) = \psi(2^{-\frac{k}{m}}t)$ при $k=1,\ 2,\cdots$, тогда

$$\psi_j(y)|_{y=0} = F_1^{-1}\{(F_1\psi)(2^{-\frac{j}{m}}t)\}(y)|_{y=0} = 2^{\frac{j}{m}}\psi(2^{\frac{j}{m}}y)|_{y=0} = 2^{\frac{j}{m}}. \tag{14}$$

Пусть $f \in B_{p,p}^{s}(\mu(\xi');R_{n-1})$, положим еще

$$g(x',\ x_n) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-\frac{k}{m}}\psi_k(x_n)(\varphi_k' * f)(x').$$

Тогда из (14) имеем $g(x',\ x_n) = f(x')$, т. е. $f(x')$ — след функции $g(x',\ x_n)$. Докажем сначала, что $g \in F_{p,2}^{s+\frac{1}{pm}}$. Пусть система $\{\varphi_k\} \in \Phi(\mu;\ R_n)$ такова, что для нее выполняется неравенство (13). Тогда из (2), (13) следует, что матрица $K_{ij} = \varphi_j$ при $j=0,\ 1,\ 2,\cdots$ и $K_{ij}=0$ удовлетворяет условиям теоремы 2.2.4 из [17]*. Применяя ее получаем

$$\|g\|_{F_{p,2}^{s+\frac{1}{pm}}} = \int_{R_n}\Big(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{2k\left(s+\frac{1}{pm}\right)}|g * \varphi_k|^2\Big)^{p/2}dx \leqslant$$

$$\leqslant c\int_{R_n}\Big(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{2k\left(s+\frac{1}{pm}-\frac{1}{m}\right)}|\psi_k\cdot(\varphi_k' * f)|^2\Big)^{p/2}dx =$$

$$= \int_{R_1}\Big\|\sum_{k=0}^{\infty}\Big|2^{-\frac{k}{m}}\psi_k(x_n)\,2^{k\left(s+\frac{1}{pm}\right)}(\varphi_k' * f)\Big|^2\Big\|_{L_{p/2}(R_{n-1})}^{p/2}dx_n \leqslant$$

$$\leqslant c\int_{R_1}\Big(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-\frac{2k}{m}}|\psi_k(x_n)|^2\cdot 2^{2k\left(s+\frac{1}{pm}\right)}\|\varphi_k' * f\|^2_{L_p(R_{n-1})}\Big)^{p/2}dx_n. \tag{15}$$

Представим последний интеграл в виде

$$\int_{R_1}\cdots dx_n = \int_{L}\cdots dx_n + \sum_{k=0}^{\infty}\int_{L_k}\cdots dx_n, \tag{16}$$

где $L = (-\infty;\ -1)\cup(1;\ \infty)$ и

$$L_k = (-2^{-\frac{k}{m}};\ 2^{\frac{-k-1}{m}})\cup(2^{\frac{-k-1}{m}};\ 2^{-\frac{k}{m}}).$$

---

* Недавно П. И. Лизоркин доказал теорему (см. признак В из [27]) о мультипликаторах Фурье для L_p-пространств со значениями в гильбертовых пространствах. Применяя при доказательстве теоремы 3 этот признак вместо теоремы 2.2.4 из [17], можно в качестве рассматриваемой здесь системы $\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty} \in \Phi(\mu;\ R_n)$ брать систему, приведенную в примере 2.

Согласно (14) имеем

$$2^{-\frac{k}{m}} |\psi_k(x_n)| \leqslant c\,(1 + |2^{\frac{k}{m}} x_n|)^{-\sigma}, \tag{17}$$

где σ — произвольное положительное число, $c = c(\sigma) > 0$. Если σ выбрано достаточно большим, то

$$\int\limits_L \cdots dx_n \leqslant c \int\limits_L \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k\left(s+\frac{1}{pm}\right)}}{2^{\frac{2k\sigma}{m}}} \|\varphi_k' * f\|^2_{L_p(R_{n-1})} \right)^{p/2} \frac{dx_n}{|x_n|^{\sigma p}} \leqslant$$

$$\leqslant c' \sum_{k=0}^{\infty} 2^{ksp} \|\varphi_k' * f\|_{L_p(R_{n-1})}. \tag{18}$$

Чтобы оценить соответствующие интегралы L_j, снова воспользуемся (17). Получим

$$\sum_{j=0}^{\infty} \int\limits_{L_j} \cdots dx_n \leqslant c \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-\frac{j}{m}} \left(\sum_{k=0}^{j} 2^{2k\left(s+\frac{1}{pm}\right)} \|\varphi_k' * f\|^2_{L_n(R_{n-1})} \right)^{p/2} +$$

$$+ c \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-\frac{j}{m}} \left(\sum_{k=j+1}^{\infty} 2^{2k\left(s+\frac{1}{pm}\right)} \cdot 2^{-2(k-j)\frac{\sigma}{m}} \|\varphi_k' * f\|^2_{L_n(R_{n-1})} \right)^{p/2} \equiv E_1 + E_2. \tag{19}$$

При $0 < \varepsilon < 1$ имеем

$$E_1 \leqslant c \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-\frac{j}{m}} \sum_{k=0}^{j} 2^{\frac{\varepsilon'}{m}(j-k)} \cdot 2^{kp\left(s+\frac{1}{pm}\right)} \|\varphi_k' * f\|^p_{L_p(R_{n-1})} =$$

$$= c \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-\frac{\varepsilon k}{m} + kp\left(s+\frac{1}{pm}\right)} \|\varphi_k' * f\|^p_{L_p(R_{n-1})} \cdot \sum_{j=k}^{\infty} 2^{-\frac{j}{m} + \frac{\varepsilon j}{m}} =$$

$$= c' \sum_{k=0}^{\infty} 2^{ksp} \|\varphi_k' * f\|^p_{L_n(R_{n-1})}. \tag{20}$$

Далее, если σ достаточно велико, то

$$E_2 \leqslant c \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-\frac{j}{m}} \sum_{k=j+1}^{\infty} 2^{kp\left(s+\frac{1}{pm}\right)} \cdot 2^{-(k-j)(\sigma-1)\frac{p}{m}} \|\varphi_k' * f\|^p_{L_n(R_{n-1})} \leqslant$$

$$\leqslant c \sum_{k=0}^{\infty} 2^{ksp} \|\varphi_k' * f\|^p_{L_n(R_{n-1})} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-(k-j)(\sigma-1)\frac{p}{m} + \frac{k-j}{m}} \leqslant$$

$$\leqslant c' \sum_{k=0}^{\infty} 2^{ksp} \|\varphi_k' * f\|^p_{L_p(R_{n-1})}. \tag{21}$$

Теперь (15), (16), (18)—(21) дают

$$\|g\|_{F^{s+\frac{1}{mp}}_{p,2}} \leqslant c \|f\|_{B^s_{p,p}}.$$

Для завершения доказательства нам остается показать вложение $F^{s}_{p,2}(\mu;\ R_n)\subset H^{s}_{p}(\mu;\ R_n)$, т. е. неравенство

$$\|g\|_{H^s_p} \leqslant c\,\|g\|_{F^s_{p,2}} \tag{22}$$

для всех $g\in F^{s}_{p,2}(\mu;\ R_n)$.

Пусть $g\in F^{s}_{p,2}(\mu;\ R_n)$, система $\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty}\in\Phi(\mu;\ R_n)$ такая, что выполняется неравенство (13).

Далее предположим, что для системы $\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty}$ верно тождество

$$(2\pi)^{n/2}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{2^{sj}}{(1+\mu^2(x))^{s/2}}(F\varphi_j)(\xi)\equiv 1$$

(см. пример 2). Далее выберем вторую систему $\{\psi_j\}_{j=0}^{\infty}\in\Phi(\mu;\ R_n)$ так, чтобы $(F\psi_j)(\xi)=1$ при $\xi\in\operatorname{supp}F\varphi_j$. Тогда для $f_j=2^{sj}g*\varphi_j$ при $j=0,1,2,\cdots$ и $f_j=0$ в остальных случаях, и для матрицы $K_{0,j}(x)=\psi_j(x)$ при $j=0,\ 1,\ 2,\cdots$ и $K_{ij}=0$ — в остальных случаях выполнены условия теоремы 2. 2. 4 из [17]. На основании этой теоремы имеем

$$\Big\|\sum_{j=0}^{\infty}2^{sj}g*\varphi_j*\psi_j\Big\|_{L_p(R_n)}\leqslant c\,\|f\|_{F^s_{p,2}}.$$

Далее

$$\sum_{j=0}^{\infty}(2^{sj}g*\varphi_j*\psi_j)=(2\pi)^{n/2}\sum_{j=0}^{\infty}2^{sj}F^{-1}(Ff\cdot F\varphi_j)=$$

$$=F^{-1}\Big\{\sum_{k=0}^{\infty}(2\pi)^{n/2}\frac{2^{sj}}{(1+\mu^2(x))^{s/2}}F\varphi_j\cdot(1+\mu^2(x))^{s/2}Fg\Big\}=$$

$$F^{-1}\{(1+\mu^2(x))^{s/2}Fg\}.$$

Отсюда немедленно следует (22). Теорема доказана.

Пусть теперь $\lambda(\xi)$ такая функция, что

$$H^{s_0}_{p}(\mu;\ R_n)\subset H_{p,\lambda}(R_n)\subset H_{p,\nu}(R_n), \tag{23}$$

где $\mu(\xi)$ и $\nu(\xi)$ определены формулами (10), (11), s_0, s — натуральные числа; $s_0>s_1$. Условие (23) эквивалентно условиям

$$\frac{(1+\mu^2)^{s_0/2}}{\lambda(\xi)}\in M^{p}_{p},\ \frac{\lambda(\xi)}{\nu(\lambda)}\in M^{p}_{p}$$

(см. [18]). В частности, $H_{p,\lambda}(R_n)$ может совпадать с $H^{s_0}_{p}(\mu;\ R_n)$ или с $H_{p,\nu}(R_n)$. Из теорем 2 и 3 и из условия (23) немедленно следует

Теорема 4. *Пусть величины $s_0, s_1, \mu, \nu, \lambda$, определены как выше и справедливо соотношение (23), тогда*

а) *при $1<p<\infty$ оператор следа действует следующим образом:*

$$\mathrm{Tr}:H_{p,\lambda}(R_n)\to B^{s_0-\frac{1}{pm}}_{p,p}(\mu(\xi');\ R_{n-1}).$$

б) *для любой функции* $f(x') \in B_{p,p}^{s_0-\frac{1}{p\mu}}(\mu(\xi'); R_{n-1})$ *существует функция* $g(x) \in H_{p,\lambda}(R_n)$ *такая, что* $g(x', 0) = f(x')$.

Ереванский государственный
университет

Постипула 15. XII. 1986
и 25. III. 1987

Ա. Գ. ԲԱՂԴԱՍԱՐՅԱՆ. Որոշ անիզոտրոպ ֆունկցիոնալ տարածությունների հետքերի և ինտերպոլյացիայի մասին *(ամփոփում)*

Հոդվածում դիտարկվում են $H_p^s(\mu; R_n)$ *անիզոտրոպ ֆունկցիոնալ տարածությունները և մտցվում են* $B^s_{p,q}(\mu; R_n)$ *Բեսովի տիպի տարածությունները։ Ապացուցվում է ինտերպոլյացիոն թեորեմ և թեորեմ* $H_p^s(\mu; R_n)$ *տարածության ֆունկցիաների հետքերի մասին։*

A. G. BAGDASASIAN. *On interpolation aud function traces some from anisotropic functional spaces* (summary)

In the article anisotropic functional $H_p^s(\mu; R_n)$ spaces are considered as well as spaces $B^s_{p,q}(\mu; R_n)$ of Besov type. Interpolation theorem and the theorem on function traces from $H_p^s(\mu; R_n)$ space are proved.

ЛИТЕРАТУРА

1. *С. Л. Соболев*. Об одной теореме функционального анализа, Мат. сб., 4, 46, 1938, 471—497.
2. *В. И. Кондрашов*. О некоторых свойствах функций пространства L_p, ДАН СССР, 48, 1945, 563—566.
3. *В. П. Ильин*. О теореме вложения для предельного показателя, ДАН СССР, 96, 1954, 905—908.
4. *N. Aronszajn*. Boundary values of functions with finite Dirichlet integral, Techni. Report 14, Univ. of Kansas, 1955, 77—94.
5. *В. М. Бабич, Л. Н. Слободецкий*. Об ограниченности интеграла Дирихле, ДАН СССР, 106, 4, 1956, 604—607.
6. *E. Gagliardo*. Caratterizazioni delle trace sulla froutiera relative ad alcune class di funzioni in u variabili, Rend. Semin. matem. un-ta di Podova, 27, 1967, 284—305.
7. *О. В. Бесов*. Исследование одного семейства функциональных пространств в связи с теоремами вложения и продолжения, Труды МИАН СССР, 60, 1961, 42—81.
8. *О. В. Бесов*. О некотором семействе функциональных пространств. Теоремы вложения и продолжения, ДАН СССР, 126, 6, 1959, 1163—1165.
9. *С. М. Никольский*. Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных, Труды МИАН СССР, 38, 1951, 244—278.
10. *С. М. Никольский*. Свойства некоторых классов функций многих переменных на дифференцируемых многообразиях, Мат. сб. 33, 75, 2, 1953, 261—326.
11. *П. И. Лизоркин*. Граничные свойства функций из весовых классов, ДАН СССР, 132, 1960, 514—517.
12. *Л. Н. Слободецкий*. Пространства С. Л. Соболева дробного порядка и их приложения к краевым задачам для дифференциального уравнения в частных производных, ДАН СССР, 118, 2, 1958, 243—246.

13. С. В. Успенский. Свойства классов W с дробной производной на дифференцируемых многообразиях. ДАН СССР, 132, 1, 1960, 60—62.
14. С. М. Никольский. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, М., «Наука», 1977.
15. О. В. Бесов, В. П. Ильин, С. М. Никольский. Интегральные представления функций и теоремы вложения, М., «Наука», 1975.
16. Ж.-Л. Лионс, Е. Мадженес. Неоднородные граничные задачи и их применения, М., «Мир», 1971.
17. Х. Трибель. Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы, М., «Мир», 1980.
18. Л. Р. Волевич, Б. П. Панеях. Некоторые пространства обобщенных функций и теоремы вложения, УМН, 20, № 1, 1965, 3—74.
19. J. Peetre. Thooghts on Besov spaces. Lecture noteh, Lund, 1966.
20. H. Triebel. Anisotropic function spaces. I: Hardys's inequaliti, decamposition Aualisis Math., 10, 1984, 53—77.
21. Х. Трибель. Теория функциональных пространств, М., «Мир», 1986.
22. Й. Берг, Й. Лёфстрём. Интерполяционные пространства. Введение, М., «Мир», 1980.
23. С. М. Никольский. Первая краевая задача для одного общего линейного уравнения, ДАН СССР, 146, № 4, 1962, 767—769.
24. П. И. Лизоркин. (L_p, L_q) мультипликаторы интегралов Фурье, ДАН СССР, 152, № 4, 1963, 808—811.
25. В. П. Михайлов. О поведении на бесконечности одного класса многочленов, Труды МИАН СССР, 91, 1967, 59—80.
26. С. Г. Михлин. О мультипликаторах интегралов Фурье, ДАН СССР, 109, 1966, 701—703.
27. П. И. Лизоркин. К теории мультипликаторов Фурье, Труды МИАН СССР, 173, 1986, 149—163.