ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XXIII, № 4, 1988 Математика

УДК 517.55

Е. С. МКРТЧЯН

ОПИСАНИЕ ОБЛАСТЕЙ ОДНОРОДНОЙ СУММИРУЕМОСТИ СТЕПЕННОГО РЯДА В C^n

Вопросы аналитического продолжения многомерных степенных рядов исследованы сравнительно мало. Постановка задачи здесь аналогична одномерному случаю. Сначала задается элемент аналитической функции в C^n с помощью степенного ряда

$$f(z_1,\cdots, z_n)=\sum_{\|k\|=0}^{\infty} a_{k_1,\cdots,k_n}(z_1-a_1)^{k_1}\cdots(z_n-a_n)^{k_n}, \tag{*}$$

сходящийся в поликруге

$$U^n(a, r)=\{z\in C^n;\ |z_p-a_p|<r_p,\ p=1, 2,\cdots, n\},$$

где $k_j\geqslant 0$ целые числа $j=1, 2,\cdots, n$, а $\|k\|=k_1+\cdots+k_n$.

Далее, ставится целью выразить все свойства определяемой элементом (*) аналитической функции в терминах коэффициентов этого элемента. Использование для решения указанной задачи метода непосредственного аналитического продолжения, как и в одномерном случае, приводит к непреодолимым трудностям. Поэтому возникает необходимость поиска других подходов. Один из них основан на применении к ряду (*) методов матричного суммирования за пределами поликруга его сходимости, если заранее известно, что это продолжение возможно.

В работе [1] был рассмотрен частный класс таких методов суммирования, фактически суммирующих не ряд (*), а сгруппированный ряд

$$f(z_1,\cdots, z_n) = \sum_{m=0}^{\infty} P_m(z_1,\cdots, z_n), \tag{**}$$

где

$$P_m(z_1,\cdots, z_n)=\sum_{\|k\|=m} a_{k_1,\cdots,k_n}(z_1-a_1)^{k_1}\cdots(z_n-a_n)^{k_n},$$

т. е. $P_m(z_1, ..., z_n)$ — однородные полиномы относительно переменных $w_p = z_p - a_p$, $p = 1, 2, ..., n$. Там же получено достаточное условие на область для эффективного* суммирования элемента (**).

В настоящей работе дается условие уже необходимо-достаточного характера на область для эффективного суммирования сгруппированного элемента (**). Этот результат, в частности, содержит утверждения работ [1] и [2] и распространяет на ногомерный случай теорему Н. У. Аракеляна (см. § 1).

* Всюду в дальнейшем мы под эффективностью суммирования подразумеваем восстановление голоморфной функции с помощью формул и предельных переходов.

§ 1. Определения

Рассмотрим зависящую от параметра $\delta \in I$ последовательность комплексных чисел

$$C = \{C_m(\delta)\}_{m=0}^{\infty}. \tag{1.1}$$

В случае $I = N = \{1, 2, 3, \ldots\}$ принято называть C бесконечной матрицей (см. [3]). Нам будет удобно сохранить это название и в общем случае, когда I — некоторое бесконечное множество чисел с предельной точкой δ_0 (см. [4]).

Пусть область $\Omega \subset \mathbf{C}^n$ и $H(\Omega)$ — множество всех функций, голоморфных в Ω. Для функции $f \in H(\Omega)$ рассмотрим разложение (*) в окрестности некоторой точки a, полагая, для простоты, $a = 0$.

Тогда каждая матрица C вида (1.1) порождает зависящее от параметра δ преобразование рядов (*) (в самом деле, рядов (**)), определяемое формулой

$$(C_\delta * f)(z) = \sum_{\|k\|=0}^{\infty} C_{\|k\|}(\delta)\, a_{k_1, \ldots, k_n} z_1^{k_1} \cdots z_n^{k_n}. \tag{1.2}$$

Для обеспечения локальной сходимости ряда (1.2) в Ω потребуем, чтобы $C_m(\delta)$ удовлетворяла следующему условию:

$$\overline{\lim_{m\to\infty}} \sqrt[m]{|C_m(\delta)|} \leqslant \frac{R_1}{R_2}, \; \delta \in I, \tag{1.3}$$

где R_1 и R_2 — радиусы n-мерных шаров B_{R_1} и B_{R_2} соответственно (с центрами в точке o), причем $B_{R_1} \Subset \Omega \Subset B_{R_2}$. Если область Ω неограниченная, то считаем, что правая часть неравенства (1.3) равна нулю.

Определение 1.1 (см. [4]). а) Бесконечную матрицу C, удовлетворяющую условию (1.3), называют эффективной для $H(\Omega)$, если для каждого элемента из $H(\Omega)$ выполнено условие

$$\lim_{\delta\to\delta_0} (C_\delta * f)(z) = f(z), \; z \in \Omega, \tag{1.4}$$

причем сходимость локально равномерная в Ω.

б) Множество всех эффективных для $H(\Omega)$ матриц обозначим через $\mathfrak{M}(\Omega)$.

в) Область Ω назовем областью эффективной однородной суммируемости для $H(\Omega)$, если $\mathfrak{M}(\Omega) \neq \varnothing$. В случае $n = 1$ слово „однородной" опускаем.

Для формулировки и доказательства основных результатов работы предпошлем необходимые определения и обозначения.

Определение 1.2. а) Для $\alpha \in \mathbf{R}^1$ и $t \in [0, +\infty)$ положим

$$z_\alpha(t) = t^{1+i\alpha} = t \exp(i\alpha \log t)$$

и рассмотрим логарифмическую α-спираль $L_\alpha = z_\alpha([0, +\infty))$, а также ее части $L_\alpha^- = z_\alpha([0, 1])$, $L_\alpha^+ = z_\alpha([1, +\infty))$.

б) Для $A \subset \mathbf{C}^n$ и $B \subset \mathbf{C}^1$ обозначим

$$AB=\{w\in\mathbf{C}^n;\ w=\zeta z,\ \zeta\in A,\ z\in B\},$$

полагая $AB=\zeta B$ в случае $A=\{\zeta\}$, $\zeta\in\mathbf{C}^n$.

Определение 1.3. Область $\Omega\subset\mathbf{C}^n$, $0\in\Omega$ назовем α-(спиралью) звездной или α-звездной областью (относительно точки 0), если $\Omega\cdot L_\alpha^-=\Omega$. Равносильное условие — $\Omega^c\cdot L_\alpha^+=\Omega^c$. Здесь и далее мы полагаем $E^c=\mathbf{C}^n\setminus E$ для $E\subset\mathbf{C}^n$.

Приведем формулировку результата Н. У. Аракеляна (см. [4]).

Теорема А. *Для того, чтобы область $\Omega\subset\mathbf{C}^1$, $0\in\Omega$, была областью эффективной суммируемости для $H(\Omega)$, необходимо и достаточно, чтобы Ω являлась α-звездной относительно точки нуль для некоторого фиксированного $\alpha\in\mathbf{R}^1$.*

Основным результатом настоящей работы является следующая

Теорема 1.1. *Для того, чтобы область $\Omega\subset\mathbf{C}^n$, $0\in\Omega$ была областью эффективной однородной суммируемости для $H(\Omega)$, необходимо и достаточно, чтобы оболочка голоморфности Ω являлась α-звездной относительно точки нуль для некоторого фиксированного $\alpha\in\mathbf{R}^1$.*

Замечание 1.1. В случае $n=1$ понятие эффективной однородной суммируемости совпадает с понятием эффективной суммируемости, а теорема 1.1 совпадает с теоремой А.

Замечание 1.2. Достаточное условие из работы [1] получается из теоремы 1.1 в случае $\alpha=0$, т. е. при обычной звездности Миттаг-Леффлера.

§ 2. Доказательство основного результата

Пусть $E\subset\mathbf{C}^1$, $E^c\neq\varnothing$ и $0\in E$. В работе [4] рассмотрено множество

$$E_*=\bigcup_{\zeta\in E^c}(\zeta^{-1}E). \tag{2.1}$$

Там же замечено, что если E — область, то E_* — также область.

Для каждого $j\in J$, где J — некоторое конечное или бесконечное множество индексов, рассмотрим области $E^j\subset\mathbf{C}^1$, $(E^j)^c\neq 0$, $0\in E^j$ и соответствующие им по формуле (2.1) области E^j_*.

Лемма 2.1. а) *Если матрица С эффективна для всех $H(E^j_*)$, $j\in J$, то она эффективна и для $H(E^*)$, где*

$$E^*=\bigcup_{j\in J}E^j_*. \tag{2.2}$$

б) *Если область E^* из (2.2) является α-звездой, то все области E^j_* и E^j также являются α-звездными.*

Доказательство утверждения а) очевидно. Докажем утверждение б).

Так как $1\in(E_*)^c$, то по определению 1.3

$$L_\alpha^+\subset(E_*)^c=\bigcap_{j\in J}(E^j_*)^c.$$

откуда следует, что $L_1^+ \subset (E_*^j)^c$ для всех $j \in J$. Отсюда, с учетом того, что $(E_*^j)^c$ — моноид (см. лемму 2.1 из [4]) и $1 \in L_1^+$, получаем, что $(E_*^j)^c \cdot L_*^+ = (E_*^j)^c$. Лемма доказана.

Пусть $\Omega \subset \mathbf{C}^n$ — область и $\Omega_w = \Omega \cap W$, где $W = \{wt \in \mathbf{C}^n;\ w$ фиксирована $w \in \mathbf{C}^n \setminus \{0\},\ t \in \mathbf{C}^1\}$.

Лемма 2.2. *Если область Ω является областью голоморфности и областью эффективной однородной суммируемости, то для любого $w \in \mathbf{C}^n \setminus \{o\}$ множество Ω_w связно.*

Доказательство. Не нарушая общности можно считать, что, аналитическая прямая W задается уравнением $z_2 = z_3 = \cdots = z_n = 0$.

Предположим обратное, т. е. Ω_w для некоторого w не связно. Тогда Ω_w можно представить в виде $\Omega_w = \Omega_w^0 \cup B$, где Ω_w^0 — область, содержащая нуль, $B = \Omega_w \setminus \Omega_w^0 \neq \varnothing$. Далее рассмотрим функцию $g(z_1)$ равную нулю на Ω_w^0 и единице на B. Из теоремы Картана следует, что $g(z_1)$ можно аналитически продолжить во всю область Ω. Продолженную функцию обозначим через $G(z)$. Таким образом

$$G \in H(\Omega) \text{ и } G(z)|_{z \in \Omega_w} = g(z_1).$$

По условию леммы существует бесконечная матрица $C \in \mathfrak{M}(\Omega)$ такая, что для любого $z \in \Omega$

$$(C_\delta * G)(z) \to G(z), \text{ когда } \delta \to \delta_0. \tag{2.3}$$

Очевидно на области Ω_w вместо (2.3) имеем

$$o = (C_\delta * G)(z)|_{z \in \Omega_w} \to G(z)|_{z \in \Omega_w} = g(z_1) \text{ при } \delta \to \delta_0.$$

Получаем противоречие. Таким образом, Λ_w связана.

Перейдем к доказательству теоремы 1.1 сначала в случае, когда Ω — область голоморфности.

Необходимость. Пусть $C \in \mathfrak{M}(\Omega) \neq \Phi$. Тогда из определения 1.1 следует, что для всех $f \in H(\Omega)$ и $\xi \in \Omega_w$ локально равномерно выполняется условие

$$\lim_{\delta \to \delta_0} (C_\delta * f)(\xi) = f(\xi),\ w \in J = \mathbf{C}^n \setminus \{o\}.$$

Перейдем к областям $(\Omega_w)_*$. Применяя для них, а также для области $\Omega^* = \bigcup_{w \in J} (\Omega_w)_*$ теорему A, получим, в частности, что существует такое $\alpha \in \mathbf{R}^1$, что все области $\Omega^*, (\Omega_w)_*$ и Ω_w α-звездны (лемма 2.1). Необходимость доказана.

Вместо доказательства достаточности мы докажем теорему, из которой, в частности, следует и достаточность условия теоремы 1.1.

Пусть $t \in \mathbf{C}^1$ и бесконечная матрица C, такая, что для всех $t \in \mathbf{C}^1 \setminus L_*^+$ локально равномерно выполняется условие

$$\lim_{\delta \to \delta_0} C_\delta(t) = \frac{1}{1-t}, \tag{2.4}$$

где

$$C_\delta(t) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m(\delta) t^m.$$

Теорема 2.1. *Если бесконечная матрица C удовлетворяет условию (2.4), то она эффективна для любой α-звездной области $\Omega \subset \mathbf{C}^n$.*

Доказательство. Пусть функция $f(z)$ голоморфна в Ω. Представим ее в начале координат рядом (*) и составим сумму (1.2).

Рассмотрим следы функций $f(z)$ и $(C_\delta f) * (z)$ на Ω_w. Обозначим их через $f^*(t) = f(wt)$ и

$$(C_\delta * f^*)(t) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m(\delta)\, b_m(w)\, t^m,$$

где

$$b_m(w) = \sum_{\|k\|=m} a_{k_1,\dots,k_n} w_1^{k_1}, \cdots, w_n^{k_n}.$$

Из леммы 2.3 работы [4] следует, что при условии (2.4) бесконечная матрица C эффективна для каждой области Ω_w. Следовательно

$$(C_\delta * f^*)(t) \to f^*(t) \text{ при } \delta \to \delta_0. \tag{2.5}$$

Это равносильно тому, что для любого $z \in \Omega$

$$(C_\delta * f)(z) \to f(z) \text{ при } \delta \to \delta_0. \tag{2.6}$$

Докажем, что предел в (2.6) достигается локально равномерно. Для этого возьмем произвольную точку $z_0 \in \Omega$ и шары $B_i(z_0)$ с центрами в точке z_0, $i = 1, 2, 3$, такие, что

$$B_1(z_0) \Subset B_2(z_0) \Subset B_3(z_0) \Subset \Omega.$$

Из α-звездности области Ω следует, что

$$L_\alpha^- \cdot B_i(z_0) \Subset \Omega \text{ при } i = 1, 2, 3.$$

Так как $o \in \Omega$, то к областям $L_\alpha^- \cdot B_i(z_0)$ можно добавить такие шары $B_i(0)$, что полученные области U_i, $i = 2, 3$ удовлетворят следующему включению

$$U_2 \Subset U_3 \Subset \Omega.$$

Пусть $B_1(w) = B_1(z_0) \cap W$, $U_i(w) = U_i \cap W$, $i = 2, 3$ и обозначим через

$$E = \{w \in \mathbf{C}^n;\ |w| = 1 \text{ и таких, что } \overline{B_1(w)} \neq \varnothing\}.$$

Для каждого сечения W рассмотрим функцию $t \cdot \xi^{-1}$, где $t \in \overline{B_1(w)}$, а точка $\xi \in \partial U_3(w)$. Из построения областей U_i, $i = 2, 3$ следует, что $\partial U_3(w) \subset (U_2(w))^c$. Тогда из определения (2.1) имеем, что $t \cdot \xi^{-1} \in$ $\in (U_2(w))_*$, причем образ D_w этого отображения есть компактное множество из области $\mathbf{C}^1 \setminus L_\alpha^+$. Из непрерывности границы U_3 и отображения $t \cdot \xi^{-1}$ следует, что для некоторой окрестности w из E также справедливо включение $D_w \Subset \mathbf{C}^1 \setminus L_\alpha^+$, причем существует компакт G из $\mathbf{C}^1 \setminus L_\alpha^+$ такой, что $D_w \subset G$ для всех w из упомянутой окрестности.

По условию предел (2.4) выполняется равномерно на компакте G. Из компактности E следует, что G можно выбрать таким, что $D_w \subset G$ для всех $w \in E$.

Разложив функцию $f(z)$ в степенной ряд в $B_3(o)$ с помощью подстановки получим

$$(C_i * f^*)(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial B_3(0) \cap W} f^*(\xi) C_i\left(\frac{t}{\xi}\right) \frac{d\xi}{\xi}, \; t \in \overline{B_1(w)}.$$

Отсюда, с учетом формулы Коши для контура $\partial U_3(w)$, имеем, что при $t \in \overline{B_1(w)}$

$$(C_i * f^*)(t) - f^*(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial U_3(w)} f(\xi) \left[C_i\left(\frac{t}{\xi}\right) - \left(1 - \frac{t}{\xi}\right)^{-1} \right] \frac{d\xi}{\xi}. \tag{2.7}$$

Отметим, что здесь $t \cdot \xi^{-1} \in G$ для всех $t \in \overline{B_1(w)}$, $\xi \in \partial U_3(w)$ и $w \in E$. Однако из условия (2.4) следует, что правая часть (2.7) равномерно на $B_1(w)$, $w \in E$ стремится к нулю, что и требовалось доказать.

Чтобы закончить доказательство теоремы 1.1 заметим, что из условия (1.4) на область Ω следует, что Ω является областью Рунге первого рода (см. [5], стр. 66—67). Следовательно, из теоремы 3.1 (см. [5], стр. 67) вытекает, что Ω имеет однолистную оболочку голоморфности.

Теорема 1.1 полностью доказана.

Приведем примеры таких матриц C, для которых выполняется условие (2.4). Как и в одномерном случае (см. [4]) ими являются следующие матрицы

$$C = \{m^{-\delta(1+i\alpha)m}\}_{m=1}^{\infty}, \quad C = \left\{\frac{1}{\Gamma(1+\delta(1+i\alpha)m)}\right\}_{m=0}^{\infty}, \quad \delta > 0,$$

где $\Gamma(x)$ — гамма-функция Эйлера.

Первая из них обобщает метод суммирования Линделёфа, а вторая — Миттаг-Леффлера (см. [1]) для α—спиральных звезд в C^n.

Пользуясь случаем выражаю свою благодарность Н. У. Аракеляну за критические замечания.

Армянский сельскохозяйственный
институт

Поступила 17. X. 1985 и 4. V. 1988

Ե. Ս. ՄԿՐՏՉՅԱՆ. Հոլոմորֆ ֆունկցիաների վերականգնման մասին C^n-ում մատրիցային շարքերի գումարման օգնությամբ (*ամփոփում*)

Բազմաչափ մատրիցային շարքերի համար աշխատանքում տրվում է Բորելի, Միտտագ-Լեֆֆլերի և Լինդելյոֆի գումարման մեթոդի մի ընդհանրացում, որի միջոցով դիտարկվում է տիրույթում հոլոմորֆ ֆունկցիաների վերականգնումը այսպես կոչված գումարման տիրույթներում։ Ապացուցվում է, որ C^n-ում ընդհանրացված Միտտագ-Լեֆֆլերի-Լինդելյոֆի տիրույթի աստղաձևությունը համարժեք է այդ տիրույթը գումարման տիրույթ լինելուն։ Այս արդյունքը ընդհանրացնում է Ն. Հ. Առաքելյանի թեորեմը $n>1$ դեպքի համար։

E. S. MKRTCHIAN. *On recapturing holomorph functions by summing the power series in C^n* (summary)

A summation method for power series is given generalizing the method due to Borel, Mittag—Leffler anb Lindelöf. We consider the problem of recapturing a holomorph function by summation of his analytic element inside the disk of couvergence. Domain where holomorph function is recaptured by this generalized summing method are called summation domains. We prove, that Mittag—Leffler—Lindelof generalized star condition in C^n and summation domain condition are equivalent. This result is a generalization of a theorem of N. H. Arakelian for the case $n > 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Е. С. Мкртчян*. О восстановлении голоморфных функций по ее значениям на некоторых множествах единственности, ДАН АрмССР, XII, № 4, 1976, 199—202.
2. *Л. А. Айзенберг, В. М. Трутнев*. Об одном методе суммирования Бореля n-кратных степенных рядов, Сиб. мат. ж., 12, № 6, 1971, 1398—1404.
3. *Р. Кук*. Бескоечные матрицы и пространства последовательностей, М., Физматгиз, 1960.
4. *Н. У. Аракелян*. Об эффективном аналитическом продолжении степенных рядов. Мат. сб., 124:1, 1984, 24—45.
5. *Б. А. Фукс*. Специальные главы теории аналитических функций многих комплексных переменных, М., 1963.