ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XXIII, № 4, 1988 Математика

УДК 517.956

Г. Р. ОГАНЕСЯН

ВЕСОВАЯ ТЕОРЕМА О СРЕДНЕМ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА

§ 1. Формулировка результатов

В настоящей работе, пользуясь весовой постановкой задачи Дирихле, предложенной в [4], мы докажем весовой вариант теоремы о среднем для уравнения

$$\Delta u = q(r)\, u(x), \quad q(\rho - 0) = \infty, \tag{1.1}$$

в шаре $K = K_\rho = \{x \in R^n, \ |x| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2} < \rho\}$ радиуса ρ.

Пусть уравнение

$$\Psi''(r) = Q(r)\,\Psi(r), \quad Q(r) = q(r) + \frac{n^2 - 4n + 3}{4r^2} \tag{1.2}$$

является уравнением без сопряженных точек (например, $Q(r) > 0$, см. [2] или § 2). Обозначим через $\Psi_1(r)$ неглавное решение уравнения (1, 2).

Зададим весовое условие Дирихле

$$\lim_{r \to \rho - 0} \mu(r)\, u(x) = \Phi(\omega), \quad \omega = \frac{x}{|x|}, \tag{1.3}$$

где весовая функция μ определяется по формуле

$$\mu(r) = \varkappa \rho^{\frac{n-1}{2}} \Big/ \Psi_1(r), \quad \varkappa = \text{const}. \tag{1.4}$$

Весовые функции $\mu(r)$, $\mu_1(r)$ мы назовем эквивалентными, если

$$\lim_{r \to \rho} \frac{\mu(r)}{\mu_1(r)} = 1,$$

т. е, асимптотики $\mu(r)$ и $\mu_1(r)$ совпадают при $r \to \rho$.

Теорема 1. *Если $n \geqslant 3$ и $q(r)$ является вещественной, положительной, непрерывной на $[0, \rho[$ функцией, то для любого решения $u \in C^2(K)$ уравнения* (1.1) *имеет место формула*

$$u(0) = \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial K} \Phi(\omega)\, d\omega, \tag{1.5}$$

где $\omega_n = 2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)$ — площадь поверхности единичной сферы в R^n, $d\omega$ — элемент объема единичной сферы, постоянная $\varkappa$ зависит только от n, $q(r)$ и выбора функции $\Psi_1(r)$, а асимптотика $\mu(r)$ при $r \to \rho$ зависит только от n, ρ, $q(r)$.

Замечание 1.1. Условия теоремы 1 можно ослабить, потребовав, чтобы $\rho(r)$ была вещественной функцией класса $C(]0,\rho[)$, $rq(r)\in L_1[0,\varepsilon]$, $0<\varepsilon<\rho$ и такой, что уравнение (1.2) было бы уравнением без сопряженных точек на $[0,\rho]$.

Наложив на функцию $q(r)$ дополнительные ограничения

$$\int_0^\rho \sqrt{q(r)}\,dr=\infty, \tag{1.6}$$

$$q(r)\in C^2([0,\rho[),\quad \frac{5[Q'(r)]^2}{Q^{5/2}(r)}-\frac{4Q''(r)}{Q^{3/2}(r)}\in L_1([\varepsilon,\rho[),\ \varepsilon>0, \tag{1.7}$$

весовую функцию можно выписать в явном виде, пользуясь теорией асимптотического интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений ([2]).

Следствие 1. *В условиях теоремы 1 и* (1.6), (1.7) *для любого решения* $u\in C^2(K)$ *уравнения* (1.1) *справедлива формула* (1.5), *где функция* $\mu=\mu_1$ *из* (1.3) *задается формулой*

$$\mu_1(r)=\varkappa\rho^{\frac{n-1}{2}}\sqrt[4]{Q(r)}\exp\left\{-\int_0^r\frac{q(s)\,ds}{\sqrt{Q-q}+\sqrt{Q(s)}}\right\}. \tag{1.8}$$

Условия (1.6), (1.7) следствия 1 можно ослабить (см. пример 4 § 6), усложнив вид весовой функции (1.8).

Введем вспомогательные функции

$$\sigma(r)=Q'(r)\,Q^{-\frac{3}{2}}(r),$$

$$q_1(r)=Q(r)-\frac{\sigma'(r)}{4\sqrt{q(r)}}\left(1-\frac{\sigma(r)}{\sqrt{\sigma^2+16}}\right), \tag{1.9}$$

$$y(r)=Q^{-\frac{1}{4}}(r)\exp\int_\varepsilon^r\sqrt{Q\left(1+\frac{\sigma^2}{16}\right)}\,dr, \tag{1.9'}$$

$$y_1(r)=y(r)\int_\varepsilon^r\frac{ds}{y^2(s)},\quad r\in[\varepsilon,\rho[, \tag{1.10}$$

$$y_2(r)=y_1(r)\int_r^\rho\frac{ds}{y_1^2(s)},\quad r\in[\varepsilon,\rho[, \tag{1.11}$$

$$\mu_2(r)=\varkappa\rho^{\frac{n-1}{2}}\Big/\,y_1(r), \tag{1.12}$$

здесь значение $r=\varepsilon$ выбирается бо́льшим последнего нуля функции $y(r)$.

Следствие 2. *В условиях теоремы 1 и*

$$q_1(r)>0,\quad r\in\,]0,\rho[, \tag{1.13}$$

$$y_1(r)\,y_2(r)\,[Q(r)-q_1(r)]\in L_1[\varepsilon,\rho], \tag{1.14}$$

для любого решения $u \in C^2(K)$ *уравнения* (1.1) *имеет место формула* (1.5), *где функция* $\mu = \mu_2(r)$ *из* (1.3) *определяется по формуле* (1.12).

§ 2. Вспомогательные формулы и леммы

Переходя в формуле Грина

$$\int_{K_r} \Delta u\, dx = \int_{\partial K_r} \frac{\partial u}{\partial r} dS$$

к сферическим координатам ($dS = r^{n-1} d\omega$) имеем

$$\int_0^r r^{n-1}\, dr \int \Delta u(r, \omega)\, d\omega = r^{n-1} \int \frac{\partial u}{\partial r}(r, \omega)\, d\omega,$$

откуда, обозначив

$$\varphi(r) = \int u(r, \omega)\, d\omega, \tag{2.1}$$

получаем, в силу (1.1), уравнение

$$\int_0^r r^{n-1} q(r)\, \varphi(r)\, dr = r^{n-1} \frac{\partial \varphi}{\partial r},$$

дифференцируя которое по r получаем

$$\varphi''(r) + \frac{n-1}{r} \varphi'(r) = q(r)\, \varphi(r). \tag{2.2}$$

Из (2.2) заменой

$$\varphi(r) = r^{-\frac{n-1}{2}}\, \Psi(r) \tag{2.3}$$

получаем уравнение (1.2).

Приведем некоторые определения и утверждения из теории обыкновенных дифференциальных уравнений (см. [2], глава XI).

Если каждое решение ($\not\equiv 0$) однородного линейного уравнения второго порядка с вещественными коэффициентами, определенного на интервале J имеет на J не более конечного числа нулей, то уравнение называется неосциллирующим на J. В последнем случае уравнение называется уравнением без сопряженных точек на J, если каждое его решение ($\not\equiv 0$) имеет на J не более одного нуля. Если граничная точка $r = \rho$ интервала не принадлежит этому интервалу, то уравнение называется осциллирующим при $r = \rho$, когда некоторое (или каждое) вещественное решение ($\not\equiv 0$) имеет бесконечную последовательность нулей, сходящуюся к $r = \rho$. В противном случае уравнение называется неосциллирующим при $r = \rho$.

Из теоремы сравнения Штурма следует, что уравнение (1.2) при $Q > 0$ (что следует из условий $n \geqslant 3$, $q(r) > 0$, теоремы 1) является уравнением без сопряженных точек.

Если уравнение (1.2) является неосциллирующим при $r=\rho$, то оно имеет такое решение Ψ_2, определенное однозначно с точностью до постоянного множителя, для которого интеграл $\int\limits^{\rho}\frac{dr}{\Psi_2^2}$ расходится.

Решение, удовлетворяющее последнему условию, называется главным решением уравнения (1.2), а решение $\Psi_1(r)$, линейно независимое с $\Psi_2(r)$, называется неглавным решением уравнения (1.2) при $r=\rho$.

Отметим важное для нас свойство главного и неглавного решений:

$$\lim_{r\to\rho-0}\frac{\Psi_2(r)}{\Psi_1^2}=0. \tag{2.4}$$

Нам понадобится следующий результатХартмана—Уинтера.

Лемма 2.1. Пусть $q_0(r)$ — непрерывная, вещественная при $r\in[0,\rho[$ функция и уравнение

$$y''(r)=q_0(r)\,y(r) \tag{2.5}$$

является неосциллирующим при $r=\rho$. Пусть $y_2(r)$, $y_1(r)$ — главное и неглавное решения уравнения (2.5). Если $Q(r)$ — непрерывная, комплексная функция такая, что выполнено условие

$$y_1(r)\,y_2(r)\,[Q(r)-q_0(r)]\in L_1[\varepsilon,\rho],\ \varepsilon>0, \tag{2.6}$$

то уравнение (1.2) имеет пару решений $\Psi_2(r)$, $\Psi_1(r)$, удовлетворяющих при $r\to\rho-0$ соотношениям

$$\lim_{r\to\rho-0}\frac{\Psi_j(r)}{y_j(r)}=1,\ \ \frac{\Psi_j'}{\Psi_j}(r)=\frac{y_j'}{y_j}(r)+o\left(\frac{1}{|y_1y_2|}\right),\ j=1,2. \tag{2.7}$$

§ 3. Доказательство теоремы 1

Для выяснения поведения решений уравнения (1.2) при $r\to 0$ преобразованием

$$r=\frac{1}{t},\ \ \Psi(r)=\frac{z(t)}{t} \tag{3.1}$$

уравнение (1.2) с левой крайней особой точкой $r=+0$ сведем к уравнению

$$z''(t)=Q_1(t)\,z(t),\ t\in\left]\frac{1}{\rho},\infty\right[,\ Q_1(t)=t^{-4}\,Q\left(\frac{1}{t}\right), \tag{3.2}$$

с правой крайней особой точкой $t=\infty$.

Чтобы применить к (3.2) лемму 2.1 найдем главное и неглавное решения $\varkappa_2(t)$, $\varkappa_1(t)$ точно решаемого вспомогательного уравнения

$$\varkappa''(t)=\frac{n^2-4n+3}{4t^2}\,\varkappa(t),\ 0<\varepsilon+\frac{1}{\rho}<t<\infty. \tag{3.3}$$

Имеем при $n\geqslant 3$

$$\varkappa_1(t)=t^{\frac{n-1}{2}},\ \ \varkappa_2(t)=t^{\frac{3-n}{2}}. \tag{3.4}$$

Условие (2.6) леммы 2.1 принимает вид

$$\int\limits_{1+\frac{1}{\rho}}^{\infty} t\left|Q_1(t)-\frac{n^2-4n+3}{4t^2}\right|dt<\infty$$

или, в терминах переменной r:

$$\int\limits_{0}^{\rho-\varepsilon} rq(r)\,dr<\infty. \tag{3.5}$$

Последнее условие автоматически вытекает из условий теоремы 1, а также из условий замечания 1.1.

Таким образом, применяя лемму 2.1 (при $\rho=\infty$) к уравнениям (3.2), (3.3) получаем для главного и неглавного решений уравнения (3.2) асимптотику

$$z_1(t)=t^{\frac{n-1}{2}}[1+o(1)],\ z_2(t)=t^{\frac{3-n}{2}}[1+o(1)],\ t\to\infty,$$

из которой для линейно независимых решений (1.2) получаем асимптотику

$$\Psi_0(r)=r^{\frac{n-1}{2}}[1+o(1)],\ \Psi_3(r)=r^{\frac{3-n}{2}}[1+o(1)],\ r\to 0. \tag{3.6}$$

Из (2.3) и (3.6) получаем при $n\geqslant 3$

$$\varphi_0(r)=1+o(1),\ \varphi_1(r)=r^{2-n}[1+o(1)],\ r\to 0. \tag{3.7}$$

Так как нас интересуют решения ($u\in C^2(K)$), ограниченные при $r=0$, то неглавные решения $\varphi_1(r)$, $\Psi_3(r)$ мы отбрасываем.

Итак

$$\Psi_0(r)=r^{\frac{n-1}{2}}[1+o(1)],\ r\to 0. \tag{3.8}$$

Так как уравнение (1.2) является неосциллирующим при $r=\rho$, то существуют главное и неглавное решения уравнения (1.2) при $r=\rho$, которые мы обозначим через $\Psi_2(r)$, $\Psi_1(r)$.

Общее решение уравнения (1.2) класса $C^2([0,\rho[)$ можно записать в виде

$$\Psi(r)=\begin{cases} C_0\Psi_0(r), & 0\leqslant r<\delta,\\ C_1\Psi_1(r)+C_2\Psi_2(r), & \delta<r<\rho.\end{cases} \tag{3.9}$$

Так как нас интересуют лишь решения уравнения (1.2) класса $C^2([0,\rho[)$, то должны выполняться следующие условия склейки для $\Psi(r)$ и его производных при $r=\delta$:

$$\begin{aligned} C_0\Psi_0(\delta)&=C_1\Psi_1(\delta)+C_2\Psi_2(\delta),\\ C_0\Psi_0'(\delta)&=C_1\Psi_1'(\delta)+C_2\Psi_2'(\delta),\\ C_0\Psi_0''(\delta)&=C_1\Psi_1''(\delta)+C_2\Psi_2''(\delta).\end{aligned} \tag{3.10}$$

Функции $\Psi_{0,1,2}(r)$ являются решениями уравнения (1.2), поэтому (ввиду $Q(r)>0$) третье из соотношений (3.10) вытекает из первых двух. Из первых двух соотношений (3.10) находим

$$C_1=\frac{W(\Psi_0,\Psi_2)}{W(\Psi_1,\Psi_2)}C_0,\ C_2=\frac{W(\Psi_1,\Psi_0)}{W(\Psi_1,\Psi_2)}C_0, \tag{3.11}$$

где через $W(\Psi_1,\Psi_2)$ обозначен вронскиан $\Psi_1(r)\Psi_2'(r)-\Psi_1'(r)\Psi_2(r)$.

Вводя весовую функцию (1.4), где постоянная $\varkappa$ определяется по формуле

$$\varkappa=\frac{C_0}{C_1}=\left.\frac{W(\Psi_1,W_2)}{W(\Psi_0,W_2)}\right|_{r=\delta}, \tag{3.12}$$

имеем из (2.4) соотношения

$$\lim_{r\to\rho-0}\mu\Psi=\varkappa\rho^{\frac{n-1}{2}}C_1=C_0\rho^{\frac{n-1}{2}},$$

$$\lim_{r\to\rho-0}\mu\Psi=\lim_{r\to\rho-0}\mu\rho^{\frac{n-1}{2}}\int u\,d\omega=\rho^{\frac{n-1}{2}}\int\Phi(\omega)\,d\omega, \tag{3.13}$$

$$C_0=\lim_{r\to+0}\frac{\Psi}{\Psi_0}=\lim_{r\to+0}\varphi(r)=\lim_{r\to+0}\int u\,d\omega=\omega_n\cdot u(0),$$

из которых вытекает формула (1.5).

Покажем, что постоянная $\varkappa$ конечна и зависит только от функции $Q(r)$ и выбора $\Psi_1(r)$, а асимптотика $\mu(r)$ при $r\to\rho$ зависит только от $q(r)$, ρ, n.

Для доказательства конечности $\varkappa$ достаточно показать, что $W(\Psi_0,\Psi_2)\neq 0$. Если $W(\Psi_0,\Psi_2)=0$, то существует отличная от нуля постоянная C такая, что $\Psi_2(r)=C\Psi_0(r)$, а это, ввиду $\Psi_2(\rho)=\Psi_0(0)=0$, означает существование решения (1.2) с двумя сопряженными точками, вопреки условию $Q=\frac{\Psi''}{\Psi}>q(r)>0$ теоремы 1 (см. также замечание 1.1).

Ввиду формулы Лиувилля, вронскианы, фигурирующие в формуле (3.12), не зависят от $r=\delta$, поэтому постоянная $\varkappa$ также не зависит от δ.

В силу (1.4), (3.12) постоянная $\varkappa$ и функция μ зависят от $\Psi_{0,1,2}$, ρ, n.

Решение $\Psi_0(r)$ уравнения (1.2) определяется однозначно асимптотикой (3.8) и зависит только от $Q(r)$. Главное решение $\Psi_2(r)$ уравнения (1.2) определяется однозначно с точностью до постоянного множителя, от выбора которого, ввиду (3.12), постоянная $\varkappa$ не зависит. Итак, постоянная $\varkappa$ зависит только от $Q(r)$ и выбора $\Psi_1(r)$.

Изменение $\Psi_1(r)$ на слагаемое, кратное $\Psi_2(r)$, не влияет на $\varkappa$ и асимптотику $\mu(r)$ при $r\to\rho$. А выбор неглавного решения $\Psi_1(r)$ по модулю главного решения также однозначен с точностью до постоянного множителя, от которого $\mu(r)$ не зависит (см. (1.4), (3.12)).

Итак, асимптотика функции $\mu(r)$ при $r\to\rho$ зависит только от $q(r)$, ρ, n.

§ 4. Доказательство следствия 1

Выясним асимптотику решений уравнения (1.2) вблизи $r=\rho$ при дополнительных условиях (1.6), (1.7), которая позволит нам вычислить явно весовую функцию $\mu(r)$ с точностью до постоянного множителя $\varkappa$.

Рассмотрим вспомогательное, точно решаемое, уравнение

$$\sigma''(r)=\left[Q(r)+\frac{5Q'^2(r)}{16Q^2(r)}-\frac{Q''(r)}{4Q(r)}\right]\sigma(r). \qquad (4.1)$$

В силу (1.6) имеем

$$\int_{\varepsilon}^{\rho}\sqrt{Q(r)}\,dr=\infty, \qquad (4.2)$$

откуда следует, что главное и неглавное решения уравнения (4.1) имеют вид

$$Q^{-\frac{1}{4}}(r)\exp\left\{\pm\int_{r}^{\varepsilon}\sqrt{Q(s)}\,ds\right\},$$

или, в регуляризованном виде,

$$\sigma_{2,1}(r)=Q^{-\frac{1}{4}}(r)\exp\left\{\pm\int_{r}^{\varepsilon}\sqrt{Q-q}\,ds\pm\int_{0}^{r}\left(\sqrt{Q-q}-\sqrt{Q}\right)ds\right\}. \qquad (4.3)$$

В условии (1.7) к уравнениям (1.2), (4.1) применима лемма 2.1 с

$$q_0=Q(r)+\frac{5Q'^2}{16Q^2}-\frac{Q''}{4Q},$$ из которого следует, что

$$\lim_{r\to\rho-0}\frac{\Psi_1}{\sigma_1}(r)=\lim_{r\to\rho-0}\frac{\Psi_2}{\sigma_2}=1. \qquad (4.4)$$

Из (4.3), (4.4) следует, что если ввести весовую функцию μ_1 по формуле (1.8), то

$$\lim_{r\to\rho-0}\frac{\mu(r)}{\mu_1(r)}=1. \qquad (4.5)$$

Следствие 1 непосредственно вытекает из теоремы 1 и (4.5).

§ 5. Доказательство следствия 2

Рассмотрим вспомогательное, точно решаемое уравнение

$$y''(r)=q_1(r)\,y(r),\quad r\in\,]0,\rho[, \qquad (5.1)$$

где $q_1(r)$ определяется по формуле (1.9).

Так как на $[0,\rho[$ имеем $q(r)>0$ и $n\geqslant 3$, то $Q(r)>0$ и явное решение (1.9′) уравнения (5.1) не имеет нулей на $[\varepsilon,\rho[$, где ε — произволное положительное число. Поэтому в формулах (1.11), (1.10) главного и неглавного (при $r=\rho-0$) решений уравнения (5.1) ε можно выбрать произвольным положительным числом (см. [2], следствие 6.3 на с. 420).

В условиях (1.13), (1.14) следствия 2 к уравнениям (1.2), (5.1) применима лемма 2.1, из которой следует, что

$$\lim_{r\to\rho-0}\frac{\Psi_1(r)}{y_1(r)}=\lim_{r\to\rho-0}\frac{\Psi_2(r)}{y_2(r)}=1. \tag{5.2}$$

Из этих соотношений и теоремы 1 вытекает следствие 2.

§ 6. Примеры

Пример 1. Применим теорему 1 к частному случаю $q(r)\equiv 0$.

В этом случае фундаментальная система решений уравнения (1.2) имеет вид

$$\Psi_0=r^{\frac{n-1}{2}},\ \Psi_3=r^{\frac{3-n}{2}},\ n\geqslant 3,$$

откуда находим главное и неглавное решения

$$\Psi_2(r)=\Psi_3(r)-\rho^{2-n}\Psi_0(r),\ \Psi_1(r)=\Psi_0(r)-\frac{n-3}{n-2}\rho^{n-2}\Psi_3(r).$$

Непосредственным вычислением получаем

$$\varkappa=\frac{W(\Psi_1,\Psi_2)}{W(\Psi_0,\Psi_2)}=\frac{1}{n-2},\ \mu(r)=\frac{\rho^{\frac{n-1}{2}}}{(n-2)\Psi_1(r)},$$

$$\lim_{r\to\rho}\Psi_1(r)=\frac{1}{n-2}\rho^{\frac{n-1}{2}}.$$

Из этих формул получаем $\lim\limits_{r\to\rho}\mu=1$, поэтому из теоремы 1 при $q\equiv 0$ следует классическая теорема о среднем для гармонических функций.

Пример 2. Из теоремы 1 можно вывести известную (см. [1], [3]) теорему о среднем для уравнения (1.1) с $q=\mathrm{const}$, т. к. и в этом случае известна фундаментальная система решений уравнения (1.2), выражаемая через функции Бесселя.

Пример 3. Функция $q(r)=\dfrac{\alpha^2}{(\rho-r)^\gamma}$, $\gamma>2$, $\alpha>0$ удовлетворяет условиям следствия 1.

Пример 4. Функция $q(r)=\dfrac{\alpha(\alpha-1)}{(\rho-r)^2}$, $\alpha<0$ не удовлетворяет условию (1.7) следствия 1, но удовлетворяет условиям следствия 2, при дополнительных условиях на α и ρ (см. пример 6, условие (6.12)).

Приведем формулы для вычисления постоянной $\varkappa$ в двух частных случаях.

Пример 5. Пусть $q(r)=\dfrac{\alpha^2}{(\rho-r)^4}$, $0<\rho<\alpha$.

Реешенис уравнения

$$\Psi''(\ )=\left[\frac{\alpha^2}{(\rho-r)^4}+\frac{\beta(\beta-1)}{r^2}\right]\Psi(r),\ \beta=\frac{n-1}{2}, \tag{6.1}$$

ищем в виде

$$\Psi(r) = \Psi_0(r)\,v(r),\ \Psi(r) = r^{\beta}(\rho - r)\exp\left\{\frac{\alpha}{\rho - r}\right\}. \qquad (6.2)$$

В полученное после подстановки уравнение

$$v''(r) + \left[\frac{2\beta}{r} + \frac{1}{r-\rho} + \frac{\alpha}{(\rho - r)^2}\right]v'(r) + \frac{2(\alpha + r - \rho)}{r(\rho - r)^2}\,v(r) = 0 \qquad (6.3)$$

подставив ряд

$$v(r) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\left(\frac{r}{\rho}\right)^k,\ a_0 = 1, \qquad (6.4)$$

получим для чисел a_k рекуррентные соотношения

$$a_{k+1} = \frac{1}{Q_k}\left[2P_k a_k - Q_{k-1}a_{k-1}\right],\ k = 0, 1, \cdots, \qquad (6.5)$$

где

$$P_k = k^2 + \left(2\beta - \frac{\alpha}{\rho}\right)k + \beta\left(1 - \frac{\alpha}{\rho}\right),\ Q_k = (k+1)(k+2\beta).$$

Полагая (см. (1.4))

$$\mu(r) = \frac{\varkappa\rho^{\beta}}{\sigma_1(r)},\ \sigma_1(r) = (\rho - r)\exp\left\{\frac{\alpha}{\rho - r}\right\}, \qquad (6.6)$$

получим

$$C_0 = \lim_{r\to+0}\Psi r^{-\beta} = \rho\exp\left\{\frac{\alpha}{\rho}\right\},$$

$$C_1 = \lim_{r\to\rho}\frac{\Psi(r)}{\sigma_1(r)} = \rho^{\beta}\sum_{k=0}^{\infty}a_k,$$

откуда, в силу (3.12), получаем

$$\varkappa = \frac{C_0}{C_1} = \frac{\rho^{1-\beta}\exp\left\{\frac{\alpha}{\rho}\right\}}{\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k}. \qquad (6.7)$$

Докажем абсолютную сходимость ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k$ при

$$\rho < \alpha. \qquad (6.8)$$

Обозначив $\rho_k = \frac{a_{k-1}}{a_k}$, из (6.5) получаем

$$2P_k\rho_{k+1} = Q_k + Q_{k-1}\rho_k\rho_{k+1}, \qquad (6.9)$$

откуда $\lim\limits_{k\to\infty}\rho_k = 1$, поэтому признак сходимости Даламбера не проходит. Нетрудно проверить, что

$$\rho_k = 1 + i\sqrt{\frac{2\alpha}{\rho k}} + O\left(\frac{1}{k}\right),$$

$$k(|\rho_k|-1)=k\left[\sqrt{1+\frac{2\gamma}{k\rho}+O\left(\frac{1}{k^2}\right)}-1\right]\xrightarrow[k\to\infty]{}\frac{\alpha}{\rho}. \tag{6.10}$$

По признаку Раабе ряд $\sum^{\infty} a_k$ абсолютно сходится, если

$$\lim_{k\to\infty} k(\rho-1)>1,$$

т. е., ввиду (6.10), если выполнено условие (6.8).

Пример 6. Пусть $q(r)=\dfrac{\alpha(\alpha-1)}{(\rho-r)^2}$, $\alpha<0$.

Проверим условия следствия 2. Очевидно, $q(r)\in C^2([0,\ \rho[)$, $q(r)>0$. Обозначив $\beta=\beta_1=\dfrac{n-1}{2}$, $\beta_2=\dfrac{3-n}{2}$ получаем, вместо (1.2), уравнение

$$\Psi''(r)=Q_1(r)\Psi(r),\ Q_1=\frac{\alpha(\alpha-1)}{(\rho-r)^2}+\frac{\beta(\beta-1)}{r^2}. \tag{6.11}$$

При дополнительном условии

$$\rho<\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\alpha(\alpha-1)\left|-\frac{\beta(\beta-1)}{\beta(\beta-1)+\alpha(\alpha-1)}\right|^{3/4} \tag{6.12}$$

условие $q_1>0$ следствия 2 вытекает из оценок

$$\sigma'(r)\leqslant\gamma_0=\frac{6\,[\alpha(\alpha-1)+\beta(\beta-1)]^{5/2}}{\rho\,[\alpha\beta(\alpha-1)\beta(\beta-1)]^{3/2}},$$

$$q_1(r)>\frac{\alpha(\alpha-1)+\beta(\beta-1)}{\rho^2}-\frac{\rho\gamma_0}{4\sqrt{\alpha(\alpha-1)}}.$$

В качестве главного и неглавного решений уравнения (6.11) выберем, вместо (1.11), (1.10), более простые выражения

$$y_{2,1}(r)=Q^{-\frac{1}{4}}(r)\exp\left\{\pm\int_r^a\sqrt{Q_1\left(1+\frac{\sigma^2}{16}\right)}dr\right\}.$$

Условие (1.14) выполнено, если

$$\frac{\sigma'}{\sqrt{qQ_1}}\left[1-\frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2+16}}\right]\in L_1[0,\ \rho]\ \text{или}\ \frac{1}{q(r)}\in \text{'0] '7}\rho],$$

что выполняется автоматически.

Итак, при $n\geqslant3$ для уравнения (1.1) с $q=\dfrac{\alpha(\alpha-1)}{(\rho-r)^2}$, $\alpha<0$ в условии (6.12) справедливо следствие 2.

Для вычисления постоянной $\varkappa$ в этом частном случае решение уравнения (6.11) ищем в виде

$$\Psi(r)=\Psi_0(r)v(r),\ \Psi_0(r)=r^\beta(\rho-r)^\alpha,\ \alpha<0,\ \beta>0. \tag{6.13}$$

Для функции $v(r)$ получаем уравнение

$$r(r-\rho)v''(r)+2\,[\beta(r-\rho)+\alpha r]\,v'(r)+2\alpha\beta v(r)=0,$$

решение которого ищем в виде ряда

$$v(r)=\sum_{k=0}^{\infty} b_k\left(\frac{r}{\rho}\right)^k,\quad b_0=1. \tag{6.14}$$

Для чисел b_k получаем рекуррентные соотношения

$$b_{k+1}=\frac{k^2+(2\alpha+2\beta-1)k+2\alpha\beta}{(k+1)(k+2\beta)}\,b_k,\quad k=0,1,\cdots. \tag{6.15}$$

Неглавное решение уравнения (6.11) имеет вид

$$y_1(r)=(\rho-r)^{\alpha}r^{\beta}, \tag{6.16}$$

поэтому

$$\mu(r)=\frac{\varkappa\rho^{\beta}}{y_1(r)}=\varkappa(\rho-r)^{\alpha},$$

$$C_0=\lim_{r\to 0}\Psi r^{-\beta}=\rho^{\alpha},\quad C_2=\lim_{r\to\rho}\frac{\Psi}{y_1}=v(\rho)=\sum_{k=0}^{\infty} b_k,$$

откуда находим постоянную

$$\varkappa=\frac{C_0}{C_2}=\frac{\rho^{\alpha}}{\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k}. \tag{6.17}$$

Так как

$$\lim_{k\to\infty} k\left(\frac{b_k}{b_{k+1}}-1\right)=2-2\alpha,$$

то, по признаку Раабе, ряд $\sum\limits^{\infty} d_k$ абсолютно сходится при $\alpha<\frac{1}{2}$ и, тем более, при $\alpha<0$.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 19. XII. 1985

Գ. Ռ. ՀՈՎՀԱՆՆԻՍՅԱՆ. Կշռային միջին արժեքի թեորեմ սինգուլյար գրգռումով Լապլասի հավասարման համար (ամփոփում)

Վերնագրում նշված հավասարման համար ապացուցվում է թեորեմ կշռային միջին արժեքի վերաբերյալ։ Բերվում են օրինակներ, որտեղ կշռային ֆունկցիան գրվում է բացահայտ տեսքով։

G. R. OGANESIAN. *Weighted mean value theorem for the singular Laplace equation* (summary)

A mean value theorem for the equation $\Delta u=q(r)u(x)$, $q(\rho-0)=\infty$ in the n-dimensional ball of radius ρ is proved.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Э. Ч. Титчмарш*. Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка, т. 2, М., ИЛ, 1961.
2. *Ф. Хартман*. Обыкновенные дифференциальные уравнения, М., Мир, 1970.
3. *И. А. Шишмарев*. Введение в теорию эллиптических уравнений, М., МГУ, 1979.
4. *Г. Р. Оганесян*. О весовых задачах задачах Коши и Дирихле для некоторых сингулярных на границе уравнений в частных производных, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», XXIII, № 1, 1988, 3—21.