

УДК 517.927.21

Н. Е. ТОВМАСЯН

КОРРЕКТНЫЕ ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ В ПОЛУ- ПРОСТРАНСТВЕ В КЛАССЕ ФУНКЦИЙ, РАСТУЩИХ НЕ БЫСТРЕЕ ПОЛИНОМА

Введение

Рассматривается система дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$Lu \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - A \left(i \frac{\partial}{\partial x} \right) u = 0; (t, x) \in R_+^{n+1}, \quad (1)$$

где $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$; $\frac{\partial}{\partial x} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right\}$, $A(x)$ — квадратная матрица порядка m , элементы которой — полиномы действительной переменной $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $u(x, t) = (u_1(x, t), \dots, u_m(x, t))$ — искомая вектор-функция, $i = \sqrt{-1}$, $R_+^{n+1} = \{(x, t), t \geq 0, x \in R^n\}$.

Определение 1. Мы считаем, что функция $u(x, t)$ принадлежит классу M , если она вместе с производной по t непрерывна в замкнутом полупространстве $t \geq 0$, $x \in R^n$ и удовлетворяет оценкам

$$\left| \frac{\partial^j u(x, t)}{\partial t^j} \right| \leq c_1 (1 + |x| + |t|)^{c_2}, (x, t) \in R_+^{n+1}, j = 0, 1, \quad (2)$$

где c_1 и c_2 — некоторые постоянные, зависящие от функции $u(x, t)$.

Определение 2. Будем говорить, что функция $f(x)$, заданная в R^n , принадлежит классу N , если она бесконечно дифференцируема и удовлетворяет оценкам

$$|D_x^k f(x)| \leq c_k (1 + |x|)^a, x \in R^n, \quad (3)$$

где c_k и a — некоторые постоянные, зависящие от $f(x)$ (a не зависит от k), $k = (k_1, k_2, \dots, k_n)$, $|k| = k_1 + k_2 + \dots + k_n$; $D_x^k f = \frac{\partial^{|k|} f}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_n^{k_n}}$.

Делая преобразование Фурье по переменной x в системе (1), получим

$$Lv = \frac{dv}{dt} - A(\sigma) v = 0, t > 0, \sigma \in R^n, \quad (4)$$

где $v = F(u(x, t))$. Здесь и в дальнейшем под $F(u(x, t))$ и $F^{-1}(u(x, t))$ понимается преобразование Фурье и обратное преобразование Фурье функции $u(x, t)$ (как обобщенной функции) по переменной x . Под решением уравнения (4) понимается функционал $v(t)$, зависящий от t

как от параметра, который при фиксированном t принадлежит классу $S'(R^n)$ и имеет вид $v(t) = F(u(x, t))$, где $u(x, t) \in M$. В уравнении (4) производная по t понимается в слабом смысле, а по x — в обобщенном смысле.

Пусть E — единичная m -мерная матрица, $\lambda_1(\sigma), \lambda_2(\sigma), \dots, \lambda_m(\sigma)$ — корни характеристического уравнения

$$\det(E\lambda - A(\sigma)) = 0. \quad (5)$$

Корень берется столько раз, какова его кратность. Обозначим $\rho(\sigma)$ — число корней уравнения (5) с $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$.

Определение 3. Точка $\sigma_0 \in R^n$ называется регулярной точкой для системы (1), если в некоторой окрестности этой точки функция $\rho(\sigma)$ постоянна, в противном случае точка называется нерегулярной.

В дальнейшем регулярность или нерегулярность точки σ подразумевается для системы (1). В данной работе предполагается, что все точки регулярные, кроме конечного числа точек $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_q$.

Отметим, что при $n = 1$ данное предположение всегда выполняется.

Пусть G_0 — пространство R^n без точек $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_q$. При $n \geq 2$ функция $\rho(\sigma)$ в области G_0 постоянна. Это число, называемое показателем регулярности уравнения (1), обозначим через ρ_0 .

Рассмотрим следующую задачу.

Задача А. Найти решение системы (1) в классе M , удовлетворяющее граничному условию

$$Q\left(i \frac{\partial}{\partial x}\right) u(x, 0) = f(x), \quad (6)$$

где $Q(x)$ — матрица размерности $\rho_0 \times m$, элементы которой — полиномы, $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x))$ — заданная вектор-функция из класса N .

Под решением задачи А понимается классическое решение. Делая преобразование Фурье по x в граничном условии (6), получим

$$Q(\sigma) v(\sigma, 0) = g(\sigma), \quad (7)$$

где $g(\sigma) = Ff$.

Определение 4. Будем говорить, что задача А в точке $\sigma_0 \in R^n$ удовлетворяет условию Лопатинского, если однородная задача (4), (7) при $\sigma = \sigma_0$ имеет только нулевое решение в классе обычных функций, растущих по t не быстрее полинома.

Отметим, что в нерегулярной точке условие Лопатинского заведомо нарушается.

В случае, когда все точки регулярные, кроме меры 0, задача А в классе обобщенных функций $u(x, t)$, для которых $Fu(x, t)$ есть обычная функция, растущая не быстрее полинома по x и по t , рассмотрена в работах [1]—[3]. В этом классе доказана единственность решения этой задачи и получены необходимые и достаточные условия на $g(\sigma) = Ff(x)$ для разрешимости неоднородной задачи.

В случае, когда условие Лопатинского выполняется всюду, задача А

рассмотрена в работах [4]—[5] и доказано существование и единственность решения этой задачи.

Задача А для однородного эллиптического уравнения высшего порядка с однородными граничными условиями в классе бесконечно дифференцируемых функций определенного роста рассмотрена в монографии [6]. При выполнении условия дополненности доказаны существование и единственность решения этой задачи.

В работах [7]—[8] показано, что если есть нерегулярные точки, то однородная задача А имеет бесконечное число линейно независимых решений, даже если во всех регулярных точках условие Лопатинского выполняется.

Как показывают вышеуказанные работы, при добавлении хотя бы одного условия вида (6) рассматриваемая задача становится некорректной.

Целью данной работы является указание дополнительных начальных условий, при которых задача А становится корректной. При этом предполагается, что во всех регулярных точках условие Лопатинского выполняется.

Теперь сформулируем основные результаты данной работы. Для этого введем некоторые обозначения.

Пусть $n \geq 2$ и $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_q$ — нерегулярные точки системы (1) ($\sigma_k \in R^n$)

$$P^+(\sigma) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma^+(\sigma)} (E\lambda - A(\sigma))^{-1} d\lambda; \quad P^-(\sigma) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma^-(\sigma)} (E\lambda - A(\sigma))^{-1} d\lambda, \quad (8)$$

где $\gamma^+(\sigma)$ ($\gamma^-(\sigma)$) — контур в комплексной плоскости, охватывающий корни характеристического уравнения (5) с $\operatorname{Re} \lambda > 0$ ($\operatorname{Re} \lambda < 0$).

В работе [9] показано, что матрицы $P^+(\sigma)$ и $P^-(\sigma)$ бесконечно дифференцируемы в регулярных точках, причем

$$\operatorname{rang} P^+(\sigma) = m - \rho(\sigma), \quad \operatorname{rang} P^-(\sigma) = \rho(\sigma).$$

Условие Лопатинского в регулярных точках эквивалентно условию [9]

$$\operatorname{rang} \begin{pmatrix} P^+(\sigma) \\ Q(\sigma) \end{pmatrix} = m, \quad \sigma \in G_0. \quad (9)$$

В дальнейшем условие (9) предполагается выполненным. Пусть $u_0(x, t)$ — частное решение задачи А, существование которого будет показано в § 2 данной работы. Дополнительные условия зададим в виде

$$B_j \left(i \frac{\partial}{\partial x} \right) (u(x, 0) - u_j(x, 0)) * \hat{\varphi}_j(x) = e^{-i\sigma_j x} p_j(x); \quad j = 1, 2, \dots, q, \quad (10)$$

где $B_j(\tau)$ — матрица размерности $(\rho(\sigma_j) - \rho_0) \times m$, элементы которой — полиномы, $p_j(x)$ — заданная вектор-функция размерности $\rho(\sigma_j) - \rho_0$, скомпонентами которой являются полиномы, $\varphi_j(x) \in C_0^\infty$, $\operatorname{supp} \varphi_j(x)$ находится в малой окрестности точки σ_j , и в некоторой окрестности

этой точки функция $\varphi_j(x)$ равна 1, $\hat{\varphi}(x) = F^{-1}(\varphi(\xi))$. Здесь и в дальнейшем $f * g$ — свертка функций f и g , т. е.

$$f(x) * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x - \xi) g(\xi) d\xi.$$

В работе доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. Для того, чтобы задача А с дополнительными условиями (10) имела единственное решение, необходимо и достаточно, чтобы

$$\text{rang} \begin{pmatrix} Q(\sigma_j) \\ B_j(\sigma_j) \\ P^+(\sigma_j) \end{pmatrix} = m, \quad j = 1, 2, \dots, q. \quad (11)$$

В высказывании «имеет единственное решение» понимается существование и единственность.

Пусть $\rho(\sigma_1) = \rho(\sigma_2) = \dots = \rho(\sigma_q) = r_0$. Рассмотрим дополнительные условия вида

$$B_0 \left(i \frac{\partial}{\partial x} \right) (u(x, 0) - v_0(x, 0)) = \sum_{j=1}^q \exp(-i\sigma_j x) p_j(x), \quad (12)$$

где $B_0(x)$ — матрица размерности $(r_0 - \rho_0) \times m$, элементы которой — полиномы, $p_j(x)$ — заданные вектор-функции размерности $r_0 - \rho_0$, компонентами которых являются полиномы. В этом случае имеет место следующая

Теорема 2. Для того, чтобы задача А с дополнительными условиями (12) имела единственное решение, необходимо и достаточно, чтобы

$$\text{rang} \begin{pmatrix} Q(\sigma_j) \\ B_0(\sigma_j) \\ P^+(\sigma_j) \end{pmatrix} = m, \quad j = 1, 2, \dots, q.$$

Работа состоит из двух параграфов. В § 1 приводятся некоторые вспомогательные предложения. В § 2 исследуется задача А с дополнительными условиями (10) или (12) и приводятся результаты для $n = 1$. Показана естественность дополнительных условий (10). § 3 — полученные результаты иллюстрируются для системы Карлемана-Векуа.

В работе указывается метод решения поставленной задачи и оценки производных решения.

§ 1. Некоторые вспомогательные предложения

Рассмотрим следующую задачу.

Задача В. Найти на полуоси $t > 0$ решение системы

$$\frac{dy}{dt} = A_0 y + f(t), \quad (13)$$

удовлетворяющее граничному условию

$$B_0 y(0) = a \quad (14)$$

в классе функций, растущих не быстрее полинома, где A_0 и B_0 — постоянные матрицы размерности $m \times m$ и $r \times m$ соответственно, $f(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_m(t))$ — непрерывная вектор-функция, растущая при $t \rightarrow +\infty$ не быстрее полинома, a — заданный постоянный r -мерный вектор, r — число корней характеристического уравнения

$$\det(E\lambda - A_0) = 0, \quad (15)$$

у которых $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$.

Пусть P^+ — матрица, определяемая формулой

$$P^+ = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^+} (E\lambda - A_0)^{-1} d\lambda,$$

где Γ^+ — контур в комплексной плоскости $\operatorname{Re} \lambda > 0$, охватывающий корни уравнения (15) с $\operatorname{Re} \lambda > 0$. Условие Лопатинского для задачи В совпадает с условием

$$\operatorname{rang} \begin{pmatrix} P^+ \\ B_0 \end{pmatrix} = m.$$

В работах [1] и [9] доказана следующая

Лемма 1. При выполнении условия Лопатинского задача В имеет решение и оно единственно.

Лемма 2. Если матрица B_0 имеет размерность $r_1 \times m$, где $r_1 < r$ и

$$\operatorname{rang} \begin{pmatrix} P^+ \\ B_0 \end{pmatrix} = m - r + r_1,$$

то однородная задача В имеет $r - r_1$ линейно независимых решений, а неоднородная задача всегда разрешима.

Действительно, в этом случае в условие (14) можно добавить новые условия так, что будет оправдливо утверждение леммы 1.

Обозначим через M_0 класс функций в R_+^2 вида

$$w(x, t) = \sum_{k=0}^{l_0} c_k(t) x^k, \quad (16)$$

где l_0 — произвольное целое число, $c_k(t)$ ($k=0, 1, \dots, l_0$) — m -мерные вектор-функции, первые производные которых непрерывны в области $t \geq 0$ и растут не быстрее полинома при $t \rightarrow +\infty$.

Задача С. В классе M_0 найти решение системы

$$\frac{\partial w}{\partial t} = A \left(i \frac{\partial}{\partial x} \right) w + \sum_{k=0}^l a_k(t) x^k, \quad (x, t) \in R_+^q, \quad (17)$$

удовлетворяющее граничному условию

$$C \left(i \frac{\partial}{\partial x} \right) w(x, 0) = \sum_{k=0}^{l_1} a_k x^k, \quad x \in R^1, \quad (18)$$

где $\alpha_k(t)$ — непрерывные вектор-функции размерности m на полуоси $t \geq 0$, растущие не быстрее полинома, $C(x)$ — матрица размерности $r \times m$, элементы которой — полиномы, r — число корней уравнения $\det(E\lambda - A(0)) = 0$ с $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$, α_k — постоянные векторы.

Лемма 3. Если

$$\operatorname{rang} \begin{pmatrix} C(0) \\ P^+(0) \end{pmatrix} = m,$$

то задача C в классе M_0 имеет, и притом единственное решение.

Доказательство. Подставляя $w(x, t)$ из (16) в (17) и (18) при $l_0 \geq \max(l, l_1)$, получим относительно $c_k(t)$ задачу вида В, которая удовлетворяет условию Лопатинского. Согласно лемме 1 она имеет единственное решение в классе функций, растущих не быстрее полинома.

Так как вектор-функции $c_k(t)$ удовлетворяют уравнению вида (13), то $c_k(t)$ также непрерывны и растут не быстрее полинома.

Лемма 4. Если $C(x)$ — матрица размерности $r_1 \times m$, где $r_1 < r$ и

$$\operatorname{rang} \begin{pmatrix} C(0) \\ P^+(0) \end{pmatrix} = m - r - r_1,$$

то однородная задача C имеет бесконечное число линейно независимых решений, а неоднородная задача всегда разрешима.

Лемма 4 доказывается аналогично лемме 3, при этом используется лемма 2.

Лемма 5. Для того, чтобы однородная задача A с дополнительными условиями (10) имела конечное число линейно независимых решений, необходимо, чтобы имело место условие (11).

В случае однородной задачи в условии (10) частное решение $u_0(x, t)$ можно взять равным нулю. При $n=1, q=1, x_1=0$ лемма 5 непосредственно следует из лемм 3 и 4. Общий случай доказывается аналогично. Лемма 5 говорит о том, что условие (11) необходимо для корректности задачи A с дополнительными условиями (10). В дальнейшем это условие предполагается выполненным.

В работе [5] доказаны следующие оценки для корней уравнения (5):

$$|\lambda_j(\sigma)| \leq c_0(1 + |\sigma|)^{n_0} (j=1, 2, \dots, m), \quad (19)$$

$$|\operatorname{Re} \lambda_j(\sigma)| \geq c_1 |\sigma - \sigma_1|^{n_1} \dots |\sigma - \sigma_q|^{n_q} (1 + |\sigma|)^{n_{q+1}}; j = \rho_0, \dots, m, \quad (20)$$

где $c_0, c_1, n_1, n_2, \dots, n_{q+1}$ — некоторые положительные постоянные.

Рассмотрим следующую систему уравнений в классе обычных функций:

$$\frac{dy}{dt} = A(\sigma) y + f(\sigma, t), \quad t \geq 0, \quad (21)$$

где $y(\sigma, t) = (y_1(\sigma, t), y_2(\sigma, t), \dots, y_m(\sigma, t))$ — искомое решение, $f(\sigma, t)$ — непрерывная функция по σ и t при $\sigma \in R^n, t \geq 0, \sigma \neq \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_q$, удовлетворяющая неравенству

$$|f(\sigma, t)| \leq c |\sigma - \sigma_1|^{-m_1} \dots |\sigma - \sigma_q|^{-m_q} (1 + |\sigma|)^{m_{q+1}} (1 + t)^{m_{q+2}}, \quad (22)$$

$c, m_1, m_2, \dots, m_{q+2}$ — некоторые положительные постоянные.

Лемма 6. Если $y(\sigma, t)$ является решением уравнения (21) при $\sigma \in R^n$ и $\sigma \neq \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_q$ и удовлетворяет оценкам

$$|y(\sigma, t)| \leq g(\sigma) (1 + t)^l, \quad \sigma \in R^n, \quad \sigma \neq \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_q, \quad (23)$$

$$|y(\sigma, 0)| \leq c_1 |\sigma - \sigma_1|^{-l_1} \dots |\sigma - \sigma_q|^{-l_q} (1 + |\sigma|)^{l_{q+1}}, \quad (24)$$

где $g(\sigma)$ — некоторая положительная функция, $c_1, l_1, l_2, \dots, l_{q+1}$ — положительные постоянные, то $y(\sigma, t)$ удовлетворяет оценке вида (22).

Лемма 6 доказана в работе [1].

Обозначим

$$\alpha(\sigma) = \begin{pmatrix} Q(\sigma) \\ P^+(\sigma) \end{pmatrix}, \quad \beta(\sigma) = \sum_{k=1}^l \beta_k(\sigma)^2,$$

где l — число миноров $\beta_k(\sigma)$ порядка m матрицы $\alpha(\sigma)$. Из условия (9) следует, что функция $\beta(\sigma)$ отлична от нуля и бесконечно дифференцируема всюду, кроме, быть может, точек $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_q$. Имеет место следующая

Лемма 7. Функция $\beta(\sigma)$ удовлетворяет оценке

$$|\beta(\sigma)| \geq c |\sigma - \sigma_1|^{n_1} \dots |\sigma - \sigma_q|^{n_q} (1 + |\sigma|)^{-n_{q+1}}, \quad (25)$$

где $c, n_1, n_2, \dots, n_{q+1}$ — некоторые положительные постоянные.

Доказательство. Вычисляя $P^+(\sigma)$ по теореме о вычетах, получим, что $P^+(\sigma)$ имеет вид

$$P^+(\sigma) = \frac{R(\sigma, \lambda_1(\sigma), \dots, \lambda_m(\sigma))}{\omega(\sigma)}, \quad \omega(\sigma) = \prod_{j=\rho_0+1}^m \prod_{k=1}^{\rho_0} (\lambda_k(\sigma) - \lambda_j(\sigma)),$$

где $R(\sigma, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ — квадратная матрица порядка m , элементы которой — полиномы относительно $\sigma, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$. Следовательно $\beta(\sigma)$ имеет вид

$$\beta(\sigma) = \frac{\beta_0(\sigma, \lambda_1(\sigma), \dots, \lambda_m(\sigma))}{\omega^{2m}(\sigma)}, \quad (26)$$

где $\beta_0(\sigma, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ — полиномы относительно $\sigma, \lambda_1, \dots, \lambda_m$. Ясно, что $\beta_0(\sigma, \lambda_1(\sigma), \dots, \lambda_m(\sigma)) \neq 0$ при $\sigma \in R^n$ и $\sigma \neq \sigma_1, \dots, \sigma_q$. В работе [5. (стр. 381, лемма 2.2) доказано, что функция $\beta_0(\sigma, \lambda_1(\sigma), \dots, \lambda_m(\sigma))$, обладающая вышеуказанными свойствами, удовлетворяет оценке (25). Из соотношений (19) и (26) следует, что $\beta(\sigma)$ также удовлетворяет оценке (25).

Лемма 8. Матрица $w(\sigma, t) = e^{A(\sigma)t} P^-(\sigma)$ бесконечно дифференцируема при $\sigma \in R^n, t \geq 0, \sigma \neq \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_q$ и вместе с производными удовлетворяет оценкам вида (22).

Доказательство. Вектор-функция $w(\sigma, t)$ является решением уравнения

$$\frac{dw}{dt} = A(\sigma)w, \quad t > 0 \quad (27)$$

и удовлетворяет начальному условию

$$w(\sigma, 0) = P^-(\sigma). \quad (28)$$

В работе [9] доказано, что

$$w(\sigma, t) \equiv \exp(A(\sigma)t) P^-(\sigma) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^-} e^{\lambda t} (E\lambda - A(\sigma))^{-1} d\lambda.$$

Вычисляя $w(\sigma, t)$ и $\frac{\partial^k w}{\partial \sigma^k}$ по теореме о вычетах, убедимся, что для них имеет место оценка (23). Используя оценки (19) и (20), получим, что для матриц $P^-(\sigma)$ и $P^+(\sigma)$ и их производных имеют место оценки (24). Согласно лемме 6, $w(\sigma, t)$ удовлетворяет оценке вида (22). Дифференцируя уравнение (27) и начальные условия (28) по σ , получим

$$\frac{\partial y(\sigma, t)}{\partial t} = A(\sigma) y(\sigma, t) + \frac{dA(\sigma)}{d\sigma} w(\sigma, t), \quad (29)$$

$$y(\sigma, 0) = \frac{dP^-(\sigma)}{d\sigma}.$$

где $y(\sigma, t) = \frac{dw}{d\sigma}$. Применяя лемму 5 для уравнения (29), получим оценку (27) для $\frac{\partial w}{\partial \sigma}$. Аналогичным образом можно показать справедливость леммы 8 для всех производных $\frac{\partial^k w}{\partial \sigma^k}$ ($k = 1, 2, \dots$).

Лемма 9. Если выполнено условие (9) и

$$\text{rang } Q(\sigma) = p_0, \quad \sigma \in G_0, \quad (30)$$

то задача A имеет решение.

Отметим, что условие (30) следует из условий (9) и (11).

Лемму докажем для случая, когда $n = 1$ и система (1) имеет одну нерегулярную точку $\sigma_1 = 0$. Общий случай доказывается аналогично. Вначале найдем решение задачи A , когда граничное условие (6) имеет вид

$$Q\left(i \frac{\partial}{\partial x}\right) u(x, 0) = D_x^{2k} f(x), \quad (31)$$

где $f(x)$ — правая часть условия (6), k — достаточно большое целое число, зависящее от $f(x)$. Делая преобразование Фурье по переменной x в уравнении (1) и граничном условии (31), получим

$$\frac{dv}{dt} = A(\sigma) v, \quad (32)$$

$$Q(\sigma) v(\sigma, 0) = \sigma^{2k} g(\sigma), \quad (33)$$

где $g(\sigma) = Ff$.

Рассмотрим в классе обычных функций систему алгебраических уравнений

$$\begin{cases} P^+(\sigma) \omega(\sigma) = 0, \\ Q(\sigma) \omega(\sigma) = b\sigma^k, \end{cases} \quad (34)$$

$$(35)$$

где $b = (b_1, b_2, \dots, b_{p_0})$ — заданный постоянный вектор, $\omega(\sigma) = (\omega_1(\sigma), \omega_2(\sigma), \dots, \omega_m(\sigma))$ — искомая вектор-функция.

Поскольку выполняется условие (9), то в области G_0 система (34) — (35) имеет единственное бесконечно дифференцируемое решение. Если доопределить это решение $\omega(0) = 0$, то, согласно лемме 7, при достаточно большом k оно будет иметь непрерывные производные до заданного порядка, растущие не быстрее полинома при $|\sigma| \rightarrow +\infty$.

Пусть $\omega^1(\sigma), \omega^2(\sigma), \dots, \omega^{p_0}(\sigma)$ — решение системы (34) — (35) при $b = (1, 0, \dots, 0); (0, 1, \dots, 0); (0, 0, \dots, 1)$.

Ясно, что частным решением уравнения (33) относительно $v(\sigma, 0)$ является

$$v(\sigma, 0) = \omega^1(\sigma) \sigma^k g_1(\sigma) + \omega^2(\sigma) \sigma^k g_2(\sigma) + \dots + \omega^{p_0}(\sigma) \sigma^k g_{p_0}(\sigma). \quad (36)$$

Решение уравнения (32) через начальные условия задается формулой

$$v(\sigma, t) = \exp(A(\sigma)t) v(\sigma, 0). \quad (37)$$

Подставляя (36) в (37) и имея в виду, что $P^+(\sigma) + P^-(\sigma) = E$ [9], а $\omega(\sigma)$ удовлетворяет уравнению (34), получим

$$v(\sigma, t) = \sum_{s=1}^{p_0} w_{ks}(\sigma, t) g_s,$$

где

$$w_{ks}(\sigma, t) = \exp(A(\sigma)t) \sigma^k P^-(\sigma) \omega^s(\sigma).$$

Из леммы 8 следует, что для любого l можно указать достаточно большое натуральное число k такое, что функции $w_{ks}(\sigma, t)$ непрерывно дифференцируемы в $R_+^{2,3}$ до порядка l и эти производные растут не быстрее полинома по σ и t при $|\sigma| \rightarrow +\infty, t \rightarrow +\infty$. Пусть $f(x)$ удовлетворяет условию (3). Обозначим через $z_{kl}(x, t)$ обратное преобразование Фурье функции $\frac{w_{kl}(\sigma, t)}{(1 + \sigma^2)^{\mu+k}}$, т. е.

$$z_{kl}(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{R^1} \frac{w_{kl}(\sigma, t)}{(1 + \sigma^2)^{\mu+k}} e^{-i\sigma x} d\sigma.$$

При достаточно больших μ и k функция $z_{kl}(x, t)$ и ее производная по t непрерывны и удовлетворяют оценке

$$\left| \frac{\partial^p z_{kl}}{\partial t^p} \right| \leq \frac{c(1+t)^{\alpha_0}}{(1+|x|)^{\alpha+2}}, \quad p=0, 1,$$

где α_0 и c — некоторые постоянные, α — постоянная из оценки (3).

Решение $v(\sigma, t)$ можно записать в виде

$$v(\sigma, t) = \sum_{l=1}^p F(z_{kl}(\sigma, t)) F(\psi_{\mu l}(x)),$$

$$\text{где } \psi_{\mu l}(x) = \left(E - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{\mu} f_l(x).$$

Ясно, что

$$u_0(x, t) = \sum_{l=1}^p z_{kl}(x, t) * \psi_{\mu l}(x) \quad (38)$$

является частным решением задачи (1), (31). Из формулы (38) следует, что $D_x^k u_0(x, t)$ удовлетворяет оценке

$$|D_x^k u_0(x, t)| \leq c_k (1 + |x|)^s (1 + t)^{\alpha}; \quad k = 0, 1, \dots, \quad (39)$$

где c_k — некоторые постоянные.

Так как $u_0(x, t)$ является решением системы (1), то оценка (39) имеет место для всех смешанных производных функции $u_0(x, t)$.

Теперь докажем лемму для общего случая. Пусть $u_1(x, t)$ — частное решение уравнения

$$D_x^{2k} u_1(x, t) = u_0(x, t). \quad (40)$$

Так как $u_0(x, t)$ удовлетворяет оценке (39), то $u_1(x, t)$ также удовлетворяет этой оценке с другим показателем σ . Подставляя $u_0(x, t)$ из (40) в уравнение (1) и граничное условие (31), получим

$$D_x^{2k} \left(\frac{\partial u_1}{\partial t} - A \left(i \frac{\partial}{\partial x} \right) u_1(x, t) \right) = 0,$$

$$D_x^{2k} Q \left(i \frac{\partial}{\partial x} \right) u_1(x, 0) = D_x^{2k} f(x).$$

Отсюда имеем

$$L(u_1) = \frac{\partial u_1}{\partial t} - A \left(i \frac{\partial}{\partial x} \right) u_1(x, t) = \sum_{j=0}^{2k-1} a_j(t) x^j; \quad (41)$$

$$Q \left(i \frac{\partial}{\partial x} \right) u_1(x, 0) = f(x) + \sum_{j=1}^{2k-1} b_j x^j, \quad (42)$$

где

$$a_j(t) = \frac{1}{j!} \frac{\partial^j (L u_1)}{\partial x^j} \Big|_{x=0},$$

b_j — постоянные p_0 -мерные векторы. Ясно, что $a_j(t)$ непрерывны и растут не быстрее полинома при $t \rightarrow +\infty$.

Чтобы найти частное решение задачи А делаем замену искомого решения

$$u(x, t) = u_1(x, t) + w(x, t).$$

Подставляя $u(x, t)$ в уравнение (1) и граничные условия (6) и имея в виду (41) и (42), относительно $w(x, t)$ получим задачу С, удовлетворяющую условиям леммы 4, которая имеет решение $w(x, t) \in M$. Утверждение леммы доказано.

§ 2. Исследование задачи А с дополнительными условиями

Доказательство теоремы 1. Необходимость условия (11) следует из леммы 5. Покажем достаточность этого условия для существования и единственности решения задачи А с дополнительными условиями (10). Делая замену в системе (1) и граничных условиях (6) и (10) $u(x, t) = u_0(x, t) + w(x, t)$, относительно $w(x, t)$ получим

$$\frac{\partial w}{\partial t} - A \left(i \frac{\partial}{\partial x} \right) w = 0, (x, t) \in R_+^{n+1}, \quad (43)$$

$$Q \left(i \frac{\partial}{\partial x} \right) w(x, 0) = 0, x \in R^n, \quad (44)$$

$$B_j \left(i \frac{\partial}{\partial x} \right) w(x, 0) * \hat{\varphi}_j(x) = e^{-i\sigma_j x} p_j(x); x \in R^n; j = 1, 2, \dots, q. \quad (45)$$

Теорему докажем для случая, когда $n = 1$, $q = 1$, $\sigma_1 = 0$. В этом случае $G_0 = R^1 \setminus \{0\}$. После преобразования Фурье по переменной x в (43) — (45) получим

$$\frac{d\omega}{dt} = A(\sigma) \omega, (\sigma, t) \in R_+^2, \quad (46)$$

$$Q(\sigma) \omega(\sigma, 0) = 0, \sigma \in R^1, \quad (47)$$

$$B(\sigma) \omega(\sigma, 0) \varphi(\sigma) = \gamma, \sigma \in R^1, \quad (48)$$

где $\omega = Fw(x, t)$, γ — функционал из S' , сосредоточенный в нуле.

В работах [7] и [9] показано: для того, чтобы функционал $\omega = F(w(x, t))$, где $w(x, t) \in M$, был решением системы (46), необходимо, чтобы начальные данные $\omega(\sigma, 0)$ удовлетворяли условию

$$P^+(\sigma) \omega(\sigma, 0) = 0 \text{ при } \sigma \in G_0. \quad (49)$$

Из соотношений (47) и (49) (имея в виду условие (9)) получим $\omega(\sigma, 0) = 0$ при $\sigma \in G_0$. Следовательно

$$\omega(\sigma, t) = 0, \text{ при } t \geq 0, \sigma \in G_0. \quad (50)$$

Отсюда, в частности, следует, что если $\omega(\sigma, t)$ является решением задачи (46) — (48) и $F^{-1}(\omega(\sigma, t)) \in M$, то $B(\sigma) \omega(\sigma, 0)$ вектор-функционал, сосредоточенный в точке $\sigma = 0$. Это означает, что $B \left(i \frac{\partial}{\partial x} \right) w(x, 0) *$

$\hat{\varphi}(x)$ является полиномом, т. е. в дополнительном условии (10) естественно задавать правую часть в виде

$$p_j(x) \exp(-i\sigma_j x).$$

Из (50) следует, что решение задачи (46), (47) имеет вид

$$\omega(\sigma, t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(t) \delta^{(k)}(\sigma), \quad (51)$$

где $c_k(t)$ и их первые производные растут не быстрее полинома, $\delta(\sigma)$ — дельта-функция Дирака.

Так как функционал $\omega(\sigma, 0)$ сосредоточен в точке $\sigma = 0$, то в условии (48) функцию $\varphi(\sigma)$ можно полагать единицей. Делая обратное преобразование Фурье в (46) — (48) и (51) ($\varphi(\sigma) = 1$), для определения $\omega(\sigma, t)$ получим задачу C , которая удовлетворяет условию леммы 3. Следовательно, задача A с дополнительными условиями (10) имеет решение и оно единственно.

Теорема 2 доказывается аналогично теореме 1.

Теорема 3. Если выполнено условие теоремы 1 и $f(x) \in N$, то решение задачи A с дополнительным условием (10) бесконечно дифференцируемо и удовлетворяет оценке

$$|D_t^l D_x^k u(x, t)| \leq c_k (1 + |x|)^{a_0} (1 + t)^{\beta_0}, \quad l = 0, 1, \dots, |k| = 0, 1, \dots,$$

где c_k, a_0, β_0 — некоторые постоянные, a_0 и β_0 не зависят от k и l .

Для производных $D_x^k u(x, t)$ эта оценка непосредственно следует из построенного решения. Так как $u(x, t)$ — решение системы (1), то все смешанные производные линейно выражаются через эти производные. Отсюда и следует утверждение теоремы 3.

Замечание 1. Если правая часть граничного условия (6) имеет вид такой же, как и правая часть условия (12), то в граничных условиях (10) и (12) можно полагать $u_0(x, t) = 0$.

Пусть $n = 1$ и все точки R^1 регулярны для системы (1), кроме точек $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_q$ и $\sigma_1 < \sigma_2 < \dots < \sigma_q$. Обозначим $\Omega_0, \Omega_1, \dots, \Omega_q$ — интервалы $(-\infty, \sigma_1), (\sigma_1, \sigma_2), \dots, (\sigma_q, +\infty)$, а $\overline{\Omega}_0, \overline{\Omega}_1, \dots, \overline{\Omega}_q$ — отрезки $(-\infty, \sigma_1], [\sigma_1, \sigma_2], \dots, [\sigma_q, +\infty)$, $\rho(\sigma)$ — число корней характеристического уравнения (5) с $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$. Функция $\rho(\sigma)$ в каждом интервале Ω_l ($l = 1, 2, \dots, q$) постоянна. Это число обозначим через μ_l .

Пусть $\mu = \max(\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_q)$, $G_l = \bigcup_{\mu_k \geq l} \overline{\Omega}_k$

$$(l = 1, 2, \dots, \mu), \quad \rho_k = \min(\mu_{k-1}, \mu_k), \quad r_k = \rho(\sigma_k) \quad (k = 1, 2, \dots, q).$$

Ясно, что $G_1 \supset G_2 \supset \dots \supset G_\mu$. В случае, когда $\mu_0 = \mu_1 = \dots = \mu_q$, то постановка задачи и результаты остаются те же, что и при $n \geq 2$. Теперь поставим корректную краевую задачу, когда среди чисел μ_l есть различные.

Так как система (1) при помощи преобразования Фурье всегда приводится к системе (4), то корректные краевые задачи рассмотрим для системы (4), а решение будем искать в классе обобщенных функций вида $v = F(u(x, t))$, где $u(x, t) \in M$.

Рассмотрим систему (4) с граничными условиями

$$\sum_{j=1}^m Q_{lj}(\sigma) v_j(\sigma, 0) = g_l, \quad \sigma \in G_l; \quad l = 1, 2, \dots, \mu, \quad (52)$$

где $Q_{lj}(\sigma)$ — полиномы, $f_k(x) \in N$, $g_l = F f_l(x)$.

Обозначим через $Q_l(\sigma)$ матрицу с элементами $Q_{lj}(\sigma)$ ($j = 1, 2, \dots, l$; $j = 1, 2, \dots, m$). Условие Лопатинского для задачи (4), (52) в интервале Ω_k ($k = 0, 1, \dots, q$) совпадает с условием

$$\text{rang} \begin{pmatrix} Q_{jk}(\sigma) \\ P^+(\sigma) \end{pmatrix} = m, \text{ при } \sigma \in \Omega_k; k=0, 1, \dots, q.$$

В дальнейшем это условие предполагается выполненным.

Можно показать, что если существует хотя бы одна нерегулярная точка, то однородная задача (4), (52) в рассматриваемом классе имеет бесконечное число линейно независимых решений, а неоднородная задача разрешима. Если нерегулярных точек нет, то задача (4), (52) имеет решение и оно единственно. Теперь укажем дополнительные условия, при которых задача (4), (52) становится корректной, если есть нерегулярные точки $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_q$. Дополнительные условия зададим в виде

$$R_j(\sigma) v(\sigma, 0) - v_0(\sigma, 0) = \gamma_j, \text{ при } |\sigma - \sigma_j| \leq \varepsilon, \quad (53)$$

где $j=1, 2, \dots, q$, $v_0(\sigma, t)$ — частное решение задачи (4), (52) в классе функций $v(\sigma, t)$, для которых $F^{-1} v(x, t) \in M$, $\gamma_j = (r_j - \rho_j)$ -мерный вектор, компоненты которого — функционалы из S' , сосредоточенные в точке σ_j , $R_j(\sigma)$ — матрица размерности $(r_j - \rho_j \times m)$ с бесконечно дифференцируемыми элементами.

Имеет место следующая

Теорема 4. Для того, чтобы задача (4), (52) с дополнительными условиями (53) имела единственное решение, необходимо и достаточно, чтобы

$$\text{rang} \begin{pmatrix} Q_{jk}(\sigma_k) \\ R_k(\sigma_k) \\ P^+(\sigma_k) \end{pmatrix} = m, k=0, 1, \dots, q.$$

Доказательство теоремы 4 и метод решения указанной задачи остаются такими же, как и при $n \geq 2$.

Замечание 2. В случае, когда правая часть граничного условия (6) является обобщенной функцией из S' , а решение ищется в классе функционалов $u(x, t)$, которые при любом фиксированном $t > 0$ принадлежат S' и имеют полиномиальный рост при $t \rightarrow +\infty$, то дополнительные условия, обеспечивающие корректность краевой задачи, задаются также в виде (10) и при такой постановке приведенные результаты сохраняются.

§ 3. Корректные граничные задачи для системы Карлемана—Векуа

Результат работы рассмотрим на примере следующей системы Карлемана—Векуа:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial v}{\partial x} + au + bv, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} + cu + dv, \quad (x, t) \in R_+^2, \quad (54)$$

где a, b, c, d — действительные постоянные, а решение $(u(x, t), v(x, t))$ ищется в классе функций, растущих вместе с производными до первого порядка не быстрее полинома.

Делая преобразование Фурье по переменной x в (54), получим

$$\frac{d\bar{u}}{dt} = i\sigma \bar{u} + a\bar{u} + b\bar{v}, \quad \frac{d\bar{v}}{dt} = -i\sigma \bar{u} + c\bar{u} + d\bar{v}, \quad (55)$$

где $\bar{u}(\sigma, t) = F(u(x, t))$, $\bar{v}(\sigma, t) = F(v(x, t))$,
(преобразование Фурье понимается как от обобщенной функции). Характеристическим уравнением, соответствующим системе (55), является уравнение

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda - \sigma^2 + i\sigma(b - c) + ad - bc = 0. \quad (56)$$

Если $|\sigma|$ — достаточно большое число, то один из корней характеристического уравнения (56) имеет $\operatorname{Re} \lambda_1 < 0$, а второй — $\operatorname{Re} \lambda_2 > 0$. Поэтому, чтобы граничное условие задавать на всей оси x , необходимо, чтобы число корней характеристического уравнения (56) с $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$ было равно 1 всюду, кроме конечного числа точек. А это возможно тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий:

$A_1)$ $bc - ad > 0$ или $bc - ad = 0$, $a + d > 0$. В этом случае все точки $\sigma \in R^1$ регулярные и число корней уравнения (56) с $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$ равно 1 для всех $\sigma \in R^1$.

$A_2)$ $bc - ad = 0$, $a + d = 0$ или $bc - ad < 0$, $a + d = 0$ и $b - c \neq 0$. Тогда система имеет одну нерегулярную точку $\sigma = 0$ и в этой точке число корней уравнения (56) с $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$ равно двум, а в остальных точках оно равно единице. В дальнейшем одно из этих условий предполагается выполненным. Рассмотрим систему (54) с граничным условием

$$\alpha u(x, 0) + \beta v(x, 0) = f(x), \quad (57)$$

где $f(x)$ — заданная функция из класса N , α и β — заданные действительные постоянные. При наших предположениях на коэффициенты системы задача (54), (57) удовлетворяет условию Лопатинского всюду, кроме, быть может, точки $\sigma = 0$.

При выполнении условия $A_1)$, условие Лопатинского в точке $\sigma = 0$ эквивалентно:

$$B_1) \text{ либо } b\alpha^2 - (d - a)\alpha\beta - c\beta^2 \neq 0, \quad (59)$$

$$\text{либо } a\alpha^2 + (b + c)\alpha\beta + d\beta^2 \leq 0. \quad (60)$$

Из теоремы 1 вытекает

Следствие 1. Если выполнены условия $A_1)$ и $B_1)$, то задача (54), (57) имеет единственное решение в классе M .

При выполнении условия $A_2)$ из леммы 9 следует, что неоднородная задача (54), (57) имеет решение в классе M . Пусть $(u_0(x, t), v_0(x, t))$ — частное решение этой задачи. Применяя теорему 1, получим

Следствие 2. Если выполнены условия $A_2)$, то задача (54), (57) с дополнительными условиями.

$$\gamma(u(x, 0) - u_0(x, 0)) + \delta(v(x, 0) - v_0(x, 0)) = p(x) \quad (61)$$

имеет единственное решение, где $P(x)$ — произвольный полином, γ и δ — действительные постоянные, удовлетворяющие условию $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$. Пусть граничное условие для системы (54) имеет вид

$$P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x, 0) + Q\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)v(x, 0) = f(x), \quad (62)$$

где $p(x)$ и $Q(x)$ — полиномы с действительными коэффициентами, $f(x) \in N$. Тогда при выполнении условий A_1 или A_2 условие Лопатинского для задачи (54), (62) выполняется всюду, кроме, быть может, конечного числа точек. Используя результаты работы [7], получим: если выполнено условие A_1 , то однородная задача (54), (62) имеет конечное число линейно независимых решений, а неоднородная задача всегда разрешима. В частности, из этих результатов следует, что если выполнено условие A_1 , но нарушено условие B_1 , то однородная задача (54), (57) имеет одно линейно независимое решение:

$$u(x, t) = c\beta \exp(\lambda t); \quad v(x, t) = -c\alpha \exp(\lambda t),$$

где c — произвольная постоянная, λ — корень уравнения (56) при $\sigma = 0$, $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$.

Ереванский политехнический
институт им. К. Маркса

Поступила 17. I. 1986

Ն. Ս. ԹՈՎՄԱՍԻԱՆԻ Կորեկտ խնդիրներ մասնակի ածանցյալներով դիֆերենցիալ հավասարումների սխեմների համար, բազմանդամային ան ունեցող ֆունկցիաների դասերում (ամփոփում)։

Ուսումնասիրված են ընդհանուր եզրային խնդիրներ, որոնք բավարարում են Լոպատինսկու պայմանին ամենուրեք, բացի վերջավոր թվով կետերից։ Այդ խնդիրները կիսաառանցքային են երբևէ բազմանդամային ան ունեցող ֆունկցիաների դասում ունեն անվերջ թվով լուծումներ։ Աշխատանքում բերված են լրացուցիչ եզրային պայմաններ, որոնք ապահովում են նշված խնդիրների լուծման գոյությունը և միակությունը այդ ֆունկցիաների դասերում։

N. E. TOVMASIAN. *Correct boundary problems in half-space for a system of partial differential equations in a class of functions with polynomial growth (summary)*

The boundary problems, satisfying Lopatinsky condition everywhere except for finite number of points are studied. Such problems in half-space in the class of functions with polynomial growth have infinite number of solutions. In the paper some additional boundary conditions are given, with which the problem has a unique solution in the same classes.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Е. Шилов. Математический анализ. Второй специальный курс, М., «Наука», 1965, с. 327.
2. Г. В. Дикополов, Г. Е. Шилов. О корректных краевых задачах для уравнений в частных производных в полупространстве, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 24, 1960, 369—380.
3. В. П. Паломодов. Линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами, М., «Наука», 1967.

4. Г.В. Дикополов. О краевых задачах для дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами в полупространстве, Мат. сб., 59 (101), № 2, 1962, 215—228.
5. А. Л. Павлов. Об общих краевых задачах для дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами в полупространстве, Мат. сб., 103 (145), № 3 (7), 1977, 367—391.
6. С. Азмон, А. Дузлис, А. Ниренберг. Оценки решений эллиптических уравнений вблизи границы, М., ИИЛ, 1962.
7. Н. Е. Товмасын. Общая граничная задача для системы дифференциальных уравнений в полуплоскости с нарушением условия Я. Б. Лопатинского, Дифф. уравн., 20, № 1, 1984, 132—141.
8. Т. М. Кошелева. Некоторые граничные задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений m -го порядка в классе обобщенных функций, Изв. вузов, математика, № 3 (250), 1983, 52—58.
9. Ю. А. Далекский, М. Г. Крейн. Устойчивость решения дифференциальных уравнений в банаховом пространстве, М., «Наука», 1970, 1—534.