ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XXIII, № 4, 1988 Математика

УДК 517.95

Б. Г. АРАРКЦЯН, Р. Р. ШАХБАГЯН

ОЦЕНКИ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ ВТОРОГО ПОРЯДКА

§ 1. Постановка задачи. Формулировка основных результатов

Пусть Ω—n-мирный открытый куб с границей Γ, точки которого будем обозначать через $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

$$Lu=-\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)+a(x)u$$

— симметрический, равномерно эллиптический оператор, т. е.

$$a_{ij}(x)=a_{ji}(x),\ a(x)\geqslant\gamma_1>0$$

и для любого вектора $\xi=(\xi_1, \xi_2,\cdots, \xi_n)$

$$\gamma_3\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2\leqslant\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\xi_i\xi_j\leqslant\gamma_2\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2,$$

где γ_1, γ_2 и γ_3 — некоторые положительные постоянные.

Рассмотрим задачу определения собственных значений первой краевой задачи для оператора L в области Ω

$$Lu=\lambda p(x)u,\qquad u|_\Gamma=0. \tag{1}$$

На коэффициенты оператора L и $p(x)$ накладываются ограничения

$$a_{ij}(x)\in C^1(\overline{\Omega}),\ a(x)\in C(\overline{\Omega}),$$

$$p(x)\geqslant p_0>0,\ p(x)\in C^1(\overline{\Omega}),$$

при которых известно (см., напр., [1]), что оператор L имеет счетное число положительных собственных значений:

$$0<\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_n<\cdots.$$

Целью настоящей работы является получение оценок собственных значений оператора L через собственные значения оператора, коэффициенты которого являются кусочно-постоянными в Ω функциями.

Перейдем к точным формулировкам.

Пусть $\{\Omega_j\}$, $j=1, 2,\cdots, q$ — равномерное разбиение куба Ω на кубы Ω_j со стороной h такое, что $\overline{\Omega}=\bigcup_{j=1}^{q}\Omega_j$, $\Omega_i\cap\Omega_j=\varnothing$. Для любой функции $f(x)\in C(\Omega)$ определим в Ω ступенчатые функции $f^+(x)$, $f^-(x)$ и $f^\frown(x)$ следующим образом: для $x\in\Omega_j$

$$f^{+}(x)=\sup f(x),\ f^{-}(x)=\inf f(x),\ f^{\frown}(x)=f(x^{(c)}),$$

$x^{(c)}$ — серединная точка Ω_j.

Через (1^{+}), (1^{-}) и ($1^{\frown}$) обозначим краевые задачи, получаемые из задачи (1) путем замены коэффициентов $(a_{ij}(x),\ a(x),\ p(x))$ оператора L на $(a_{ij}^{+}(x),\ a^{+}(x),\ p^{-}(x))$, $(a_{ij}^{-}(x),\ a^{-}(x),\ p^{+}(x))$, $(a_{ij}^{\frown}(x),\ a^{\frown}(x),\ p^{\frown}(x))$, соответственно. Пусть, далее, $\lambda_k^{\pm}$, $u_k^{\pm}$, $\lambda_k^{\frown}$, u_k обозначают k-ые собственные значения и соответствующие им обобщенные собственные функции задач ($1^{\pm}$) и ($1^{\frown}$) (см., напр., [5]).

Основным результатом настоящей работы являются следующие теоремы.

Теорема 1. *Если $a_{ij}(x),\ a(x)\in C^2(\overline{\Omega})$, $p(x)\in C^1(\overline{\Omega})$, то существуют постоянные $C(k)>0$ и $h_0>0$ такие, что при $h<h_0$*

$$|\lambda_k-\lambda_k^{\frown}|\leqslant C(k)\,h^2.$$

Теорема 2. *Если $a_{ij}(x),\ a(x)\in C^2(\overline{\Omega})$, $p(x)\in C^1(\overline{\Omega})$, то существуют постоянные $C(k)>0$ и $h_0>0$ такие, что при $h<h_0$*

$$\left|\lambda_k-\frac{1}{2}(\lambda_k^{+}+\lambda_k^{-})\right|\leqslant C(k)\,h^2. \tag{2}$$

Получению оценок вида (2) для оператора Штурма-Лиувилля (задача (1), $n=1$), с установлением различных скоростей сходимости, посвящены многочисленные работы, из которых отметим лишь работы [2]—[4], где можно найти и дальнейшие ссылки.

В [2] получена оценка (2) для оператора Штурма-Лиувилля первого порядка по h, которая в дальнейшем улучшена в [3], где получена квадратичная скорость сходимости. В [4] при более жестких ограничениях на гладкость коэффициентов оператора, получены оценки более высоких порядков по h.

В настоящей работе оценка вида (2) получена для симметрических эллиптических операторов второго порядка в кубе.

Случай, когда Ω—произвольная ограниченная область с кусочно-гладкой границей, сводится к рассматриваемому с использованием известных приемов продолжения функций на более широкую область с сохранением гладкости. Отметим также, что аналогичный результат имеет место и в случае неравномерного разбиени куба Ω на параллелепипеды Ω_j, при этом роль h играет длина наибольшей стороны параллелепипеда Ω_j.

Доказательствам основных теорем, которым посвящен § 3, предпосылаются три леммы, приведенные в § 2.

§ 2. Вспомогательные утверждения

Предварительно введем некоторые обозначения. Для любой точки $x=(x_1,\ x_2,\cdots,\ x_n)$ и для любого мультииндекса $\alpha=(\alpha_1,\ \alpha_2,\cdots,\ \alpha_n)$ с целыми неотрицательными компонентами определим как обычно

$$x^{\alpha}=x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots\ x_n^{\alpha_n},\ D^{\alpha}=D_1^{\alpha_1}D_2^{\alpha_2}\cdots\ D_n^{\alpha_n},$$

где $D_i^{\alpha_i} = \dfrac{\partial^{\alpha_i}}{\partial x_i^{\alpha_i}}$, $|\alpha| = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i$.

Пусть далее

$$\|f\| = \sup_{\Omega} |f(x)|$$

— обычная норма в $C(\Omega)$.

Лемма 1. *Если*

1. $f(x) \in C^1(\overline{\Omega})$,

то
$$\|f - f^{\frown}\| \leqslant \frac{nh}{2} \max_{|\alpha|=1} \|D^{\alpha} f\|,$$

2. $f(x) \in C^2(\overline{\Omega})$,

то
$$\left\| f^{\frown} - \frac{1}{2}(f^{+} + f^{-}) \right\| \leqslant \frac{n^2 h^2}{8} \max_{|\alpha|=2} \|D^{\alpha} f\|.$$

Для доказательства обозначим через $f_k(x)$ сужение $f(x)$ на Ω_k. По формуле Тейлора в точке $x^{(c)} \in \Omega_k$

$$f_k(x) = f_k(x^{(c)}) + \sum_{|\alpha|=1} (x - x^{(c)})^{\alpha} D^{\alpha} f_k(\xi_{\alpha}(x^{(c)})),$$

где $\xi_{\alpha}(x^{(c)})$ — некоторая точка Ω_k. Отсюда

$$|f_k(x) - f^{\frown}(x)| \leqslant \sum_{|\alpha|=1} |(x - x^{(c)})^{\alpha}| \, |D^{\alpha} f_k(\xi_{\alpha}(x^{(c)}))| <$$

$$\leqslant \frac{h}{2} \sum_{|\alpha|=1} \sup_{\Omega_k} |D^{\alpha} f_k(x)| < \frac{nh}{2} \|D^{\alpha} f(x)\|,$$

что и доказывает первое неравенство. Аналогично доказывается оценка

$$\|f - f^{\pm}\| \leqslant nh \max_{|\alpha|=1} \|D^{\alpha} f(x)\|. \tag{3}$$

Перейдем к доказательству второго утверждения. Не ограничивая общности можно предположить, что в Ω_k имеет место следующая система неравенств:

$$\begin{aligned} &D_i f_k(x^{(c)}) \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \cdots, l, \\ &D_i f_k(x^{(c)}) < 0, \quad i = l + 1, \cdots, n. \end{aligned} \tag{4}$$

По формуле Тейлора в точке $x^{(c)}$

$$f_k(x) = f_k(x^{(c)}) + \sum_{|\alpha|=1} (x - x^{(c)})^{\alpha} D^{\alpha} f_k(x^{(c)}) +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{|\alpha|=2} (x - x^{(c)})^{\alpha} D^{\alpha} f_k(\xi_{\alpha}(x^{(c)})). \tag{5}$$

Обозначим через

$$x^{(k)} = (x_1^{(k_1)}, x_2^{(k_2)}, \cdots, x_n^{(k_n)})$$

вершину куба Ω_k, наименее удаленную от начала координат. Тогда координаты всех вершин Ω_k будут иметь вид

$$x^{(k+r)} = (x_1^{(k_1+r)}, x_2^{(k_2+r)}, \cdots, x_n^{(k_n+r)})$$

при всевозможных подстановках вместо r значений 0 или 1. Далее очевидно

$$f_k(x_1^{(k_1)}, x_2^{(k_2)}, \cdots, x_l^{(k_l)}, x_{l+1}^{(k_l+1)}, \cdots, x_n^{k_n+1}) - f_k^- > 0, \tag{6}$$

$$f_k(x_1^{(k_1+1)}, x_2^{(k_2+1)}, \cdots, x_l^{(k_l+1)}, x_{l+1}^{(k_l+1)}, \cdots, x_n^{(k_n)}) - f_k^+ < 0. \tag{7}$$

Подставляя в (6) значения

$$f_k(x_1^{(k_1)}, \cdots, x_l^{k_l}, x_{l+1}^{(k_l+1)}, \cdots, x_n^{k_n+1}),\ f_k^-,$$

вычисленные по формулам (5), получим

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\sum_{|\alpha|=2}(x^{(k+\delta)} - x^{(c)})^\alpha D^\alpha f_k(\xi_\alpha(x^{(c)}))- \\ &-\frac{1}{2}\sum_{|\alpha|=2}(x^{(m)} - x^{(c)})^\alpha D^\alpha f_k(\eta_\alpha(x^{(c)})) \geqslant \\ &\geqslant \sum_{|\alpha|=1}(x^{(m)} - x^{(k+\delta)})^\alpha D^\alpha f_k(x^{(c)}), \end{aligned} \tag{8}$$

где

$$\delta = \begin{cases} 0, & i = 1, \cdots, l \\ 1, & i = l+1, \cdots, n, \end{cases}$$

а $x^{(m)} \in \overline{\Omega}_k$ и $f_k(x^{(m)}) = f_k^-$ в Ω_k.

С другой стороны, в силу выбора вершины $(x_1^{(k_1)}, \cdots, x_l^{(k_l)}$ $x_{l+1}^{k_l+1+1}, \cdots, x_n^{k_n+1})$ и условий (4), имеем

$$\sum_{|\alpha|=1}(x^{(m)} - x^{(k+\delta)})^\alpha D^\alpha f_k(x^{(c)}) \geqslant 0. \tag{9}$$

Аналогично, подставляя в (7) значения

$$f_k(x_1^{(k_1+1)}, \cdots, x_l^{(k_l+1)}, x_{l+1}^{(k_l+1)}, \cdots, x_n^{(k_n)}),\ f_k^+,$$

вычисленные по формуле (4), получим

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\sum_{|\alpha|=2}(x^{(k+\varepsilon)} - x^{(c)})^\alpha D^\alpha f_k(\mu_\alpha(x^{(c)})) - \\ &-\frac{1}{2}\sum_{|\alpha|=2}(x^{(M)} - x^{(c)})^\alpha D^\alpha f_k(\nu_k(x^{(c)})) \leqslant \\ &\leqslant \sum_{|\alpha|=1}(x^{(M)} - x^{(k+\varepsilon)})^\alpha D^\alpha f_k(x^{(c)}), \end{aligned} \tag{10}$$

где

$$\varepsilon = 1 - \delta,\ x^{(M)} \in \overline{\Omega}_k \text{ и } f_k(x^{(M)}) = f^+$$

в Ω_k. Как и выше из выбора вершины

$$(x_1^{(k_1+1)}, \cdots, x_l^{(k_l+1)}, x_{l+1}^{k_l+1)}, \cdots, x_n^{k_n})$$

и условия (4) имеем

$$\sum_{|\alpha|=1} (x^{(M)} - x^{(k+\delta)})^\alpha D^\alpha f_k (x^{(c)}) \leqslant 0. \tag{11}$$

Используя (5), вычисленную соответственно в точках $x^{(M)}$ и $x^{(m)}$ и очевидное соотношение $2x^{(c)} = x^{(k+\delta)} + x^{(k+\delta)}$, имеем

$$f_k^+ + f_k^- - 2\hat{f}_k = \sum_{|\alpha|=1} (x^{(M)} - x^{(k+\delta)})^\alpha D^\alpha f_k (x^{(c)}) +$$
$$+ \frac{1}{2} \sum_{|\alpha|=2} (x^{(M)} - x^{(c)})^\alpha D^\alpha f_k (\mu_\alpha (x^{(c)})) +$$
$$+ \sum_{|\alpha|=1} (x^{(m)} - x^{k+\delta})^\alpha D^\alpha f_k (x^{(c)}) +$$
$$+ \frac{1}{2} \sum_{|\alpha|=2} (x^{(m)} - x^{(c)})^\alpha D^\alpha (f_k (\eta_\alpha (x^{(c)})), \tag{12}$$

откуда, с использованием соотношений (8) и (11), получим верхнюю оценку

$$f_k^+ + f_k^- - 2\hat{f}_k \leqslant \frac{1}{2} \sum_{|\alpha|=2} (x^{(k+\delta)} - x^{(c)})^\alpha D^\alpha f_k (\zeta_\alpha (x^{(c)})) +$$
$$+ \frac{1}{2} \sum_{|\alpha|=2} (x^{(M)} - x^{(c)})^\alpha D^\alpha f_k (\mu_\alpha (x^{(c)})) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2} \sum_{|\alpha|=2} |(x^{(k+\delta)} - x^{(c)})^\alpha| \, |D^\alpha f_k (\zeta_\alpha (x^{(c)}))| +$$
$$+ \frac{1}{2} \sum_{|\alpha|=2} |(x^{(M)} - x^{(c)})^\alpha| \, |D^\alpha f_k (\mu_\alpha (x^{(c)}))| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{n^2 h^2}{4} \max_{|\alpha|=2} \|D^\alpha f\|.$$

Аналогично из (12) при помощи неравенств (9) и (10) получается оценка снизу

$$f_k^+ + f_k^- - 2\hat{f}_k > \frac{1}{2} \sum_{|\alpha|=2} |(x^{(m)} - x^{(c)})^\alpha| \, |D^\alpha f_k (\nu_\alpha (x^{c}))| +$$
$$+ \frac{1}{2} \sum_{|\alpha|=2} |(x^{(k+\delta)} - x^{(c)})^\alpha| \, |D^\alpha f_k (\eta_\alpha (x^{(c)}))| \geqslant$$
$$\geqslant - \frac{n^2 h^2}{4} \max_{|\alpha|=2} \|D^\alpha f\|.$$

Из последних двух соотношений и следует второе утверждение леммы.

В дальнейшем нам понадобятся следующие функционалы:

$$N(v) = \int_\Omega \Big(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) D_i v D_j v + a(x) v^2 \Big) d\Omega, \tag{13}$$

$$M(v) = \int_{\Omega} p(x)\, v^2\, d\Omega, \tag{14}$$

$$R(v) = \frac{N(v)}{M(v)}. \tag{15}$$

Обозначим через

$$N^{\pm}(v),\ N^{\frown}(v),\ M^{\pm}(v),\ M^{\frown}(v),\ R^{\pm}(v),\ R^{\frown}(v)$$

функционалы, построенные по формулам (12)—(14) для краевых задач $(1^{\pm})$, (1^{-}) и $(1^{\frown})$, соответственно.

Отметим, что если u_k — k-ая собственная функция оператора L, а λ_k— соответствующее ей собственное значение, то, как известно, [1]

$$\lambda_k = R(u_k) = \frac{N(u_k)}{M(u_k)}. \tag{16}$$

Лемма 2. *Если $a_{ij}(x)$, $a(x)$ и $p(x) \in C^1(\overline{\Omega})$, то существуют постоянные $C(k) > 0$ и $h_0 > 0$ такие, что при $h < h_0$*

$$|\lambda_k - \lambda_k^{\pm}| \leqslant C(k)\, h, \tag{17}$$

$$|\lambda_k - \lambda_k^{\frown}| \leqslant C(k)\, h. \tag{18}$$

Доказательство. Пусть $v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, где $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ — замыкание множества бесконечно дифференцируемых финитных в Ω функций в норме

$$\|v\|_1^2 = \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^{n} (D_i v)^2 + v^2 \right) d\Omega.$$

В силу оценки (3)

$$|M(v) - M^{\pm}(v)| \leqslant \int_{\Omega} \frac{|p(x) - p^{\pm}(x)|}{p(x)}\, p(x)\, v^2\, d\Omega \leqslant$$

$$\leqslant \left\| \frac{p(x) - p^{\pm}(x)}{p(x)} \right\| M(v) \leqslant \frac{c_1 h}{p_0} M(v)$$

и

$$|N(v) - N^{\pm}(v)| \leqslant \int_{\Omega} \Big[\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}(x) - a_{ij}^{\pm}(x)|\, |D_i v|\, |D_j v| +$$

$$+ |a(x) - a^{\pm}(x)|\, v^2 \Big]\, d\Omega \leqslant c_2 h\, \|v\|_1^2.$$

С другой стороны, в силу условия эллиптичности

$$N(v) \geqslant c_3 \|v\|_1^2, \tag{19}$$

т. е.

$$|N(v) - N^{\pm}(v)| \leqslant \frac{c_2}{c_3} h N(v),$$

отсюда следует

$$N^{+}(v) \geqslant (1 - \delta_1 h)\, N(v),$$

где $\delta_1 = \frac{c_2}{c_3}$. Таким образом, $R^{\pm}(v) > 0$ при $h < \frac{1}{\delta_1}$.

Далее из очевидного равенства

$$R(v) - R^{\pm}(v) = R^{\pm}_{(v)} \frac{M^{\pm}(v) - M(v)}{M(v)} + R(v) \frac{N(v) - N^{\pm}(v)}{N(v)}$$

следует, что существует положительная постоянная $\delta_2 = \delta_2(c_1, c_2, c_3, p_0)$ такая, что

$$\frac{1-\delta_2 h}{1+\delta_1 h} R^{\pm}(v) \leqslant R(v) \leqslant \frac{1+\delta_2 h}{1-\delta_1 h} R^{\pm}(v), \tag{20}$$

откуда в силу определения функционалов $R(v)$ и $R^{\pm}(v)$, минимаксных свойств собственных значений (см. [1], или [5])

$$\frac{1-\delta_2 h}{1+\delta_1 h} \lambda_k^{\pm} \leqslant \lambda_k < \frac{1+\delta_2 h}{1-\delta_1 h} \lambda_k^{\pm}.$$

Оценка (18) доказывается аналогично.

Лемма 3. *Если $a_{ij}(x)$, $a(x)$ и $p(x) \in C^1\overline{\Omega}$, то существуют постоянные $c(k) > 0$ и $h_0 > 0$ такие, что при $h < h_0$*

$$|R^{\pm}(u_k) - \lambda_k^{\pm}| \leqslant C(k) h^2, \tag{21}$$

$$|R^{-}(u_k) - \lambda_k^{\wedge}| \leqslant C(k) h^2. \tag{22}$$

Доказательство. Имеем

$$L(u_k - u_k^{\pm}) = \lambda^{\pm} p^{\mp}(x)(u_k - u_k^{\pm}) + \lambda_k (p(x) - p^{\mp}(x)) u_k +$$
$$+ p^{\mp}(\lambda_k - \lambda_k^{\pm}) u_k - (L - L^{\pm}) u_k^{\pm}. \tag{23}$$

С другой стороны (для нормированных u_k и $u_k^{\mp}$, k фиксировано)

$$\gamma_3 \|u_k - u_k^{\pm}\|_1 \leqslant (L(u_k - u_k^{\pm}), u_k - u_k^{\pm}),$$

где $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в $L_2(\Omega)$. Откуда с использованием (23), получим

$$\gamma_3 \|u_k - u_k^{\pm}\|_1 \leqslant \lambda_k^{\pm} \int_{\Omega} p^{\mp}(x) |u_k - u_k^{\pm}|^2 d\Omega +$$

$$+ \lambda_k \int_{\Omega} |p(x) - p^{\pm}(x)| |u_k - u_k^{\pm}| d\Omega +$$

$$+ |\lambda_k - \lambda_k^{\pm}| \int_{\Omega} p^{\mp}(x) |u_k| |u_k - u_k^{\pm}| d\Omega +$$

$$+ \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} |a_{ij}(x) - a_{ij}^{\pm}(x)| |D_i u_k| |D_j(u_k - u_k^{\pm})| d\Omega.$$

Используя неравенство Юнга, лемму 1 и (17), получим

$$\gamma_3 \|u_k - u_k^{\pm}\|_1^2 \leqslant c_4 h^2 + \varepsilon c_5 \|u_k - u_k^{\pm}\|_1^2,$$

где $\varepsilon > 0$ произвольно. Выбирая $\varepsilon > 0$ из условия $\gamma_3 - \varepsilon c_5 > 0$, получим

$$\|u_k - u_k^{\pm}\| \leqslant c_6(k)\, h.$$

Отсюда следует, что

$$|N^{\pm}(u_k - u_k^{\pm})| \leqslant c_7(k)\, h, \tag{24}$$

$$|M^{\pm}(u_k - u_k^{\pm})| \leqslant c_8(k)\, h. \tag{25}$$

С другой стороны, используя соотношения (13)—(16), нетрудно проверить, что

$$N^{\pm}(u_k) - \lambda_k^{\pm} M^{\pm}(u_k) = N^{\pm}(u_k - u_k^{\pm}) + \lambda_k^{\pm} M^{\pm}(u_k - u_k^{\pm})$$

и окончательно

$$|R^{\pm}(u_k) - \lambda_k^{\pm}| = \left| \frac{N^{\pm}(u_k) - \lambda_k^{\pm} M^{\pm}(u_k)}{M^{\pm}(u_k)} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{|N^{\pm}(u_k - u_k^{\pm})| + |\lambda_k^{\pm}|\,|M^{\pm}(u_k - u_k^{\pm})|}{M^{\pm}(u_k)} \leqslant C(k)\, h^2.$$

Аналогичным образом доказывается оценка (22).

§ 3. Доказательство основных теорем

Теорема 1. *Если $a_{ij}(x)$, $a(x) \in C^2(\overline{\Omega})$, $p(x) \in C^1(\overline{\Omega})$, то существуют постоянные $C(k) > 0$, $h_0 > 0$ такие, что при $h < h_0$*

$$|\lambda_k - \lambda_k^{\sim}| \leqslant C(k)\, h^2. \tag{26}$$

Для доказательства воспользуемся соотношением (16), полагая собственные функции задач (1) и (1$^{\sim}$) нормированными. Очевидно

$$|\lambda_k - \lambda_k^{\sim}| \leqslant |N_k^{\sim}(u_k) - N^{\sim}(u_k^{\sim})| + |N(u_k) - N^{\sim}(u_k)|. \tag{27}$$

Первое слагаемое в правой части (27) в точности совпадает с левой частью (22), следовательно достаточно оценить второе слагаемое в (27). Для этого оценим предварительно интеграл вида

$$\int_{\Omega} (f(x) - f^{\sim}(x))\, w(x)\, d\Omega,$$

где

$$f(x) \in C^2(\overline{\Omega}), w(x) \in C^1(\overline{\Omega}).$$

Используя формулу Тейлора для функций $w_l(x)$, получим

$$\int_{\Omega_l} (f_l(x) - f_l^{\sim}(x))\, w_l(x)\, d\Omega_l = \int_{\Omega_l} (f_l(x) - f_l^{\sim}(x))\, w_l(x^{(c)})\, d\Omega_l +$$

$$+ \int_{\Omega_l} (f_l(x) - f^{\sim}(x)) \sum_{|\alpha|=1} (x - x^{(c)})^{\alpha} D^{\alpha} w_l(\xi_{\alpha}(x^{(c)}))\, d\Omega_l.$$

Второй интеграл в силу первого утверждения леммы 1. очевидно не превосходит по абсолютной величине ch^{n+2}. Покажем, что аналогично оценивается и первое слагаемое. Имеем

$$\int_{\Omega_l}(f_l(x)-\hat{f_l}(x))\,w_l(x^{(c)})\,d\Omega_l=$$

$$=w_l(x^{(c)})\sum_{|\alpha|=1}D^{\alpha}f_l(x^{(c)})\int_{\Omega_l}(x-x^{(c)})^{\alpha}\,d\Omega_l+$$

$$+\int_{\Omega_l}w_l(x^{(c)})\sum_{|\alpha|=2}(x-x^{(c)})^{\alpha}D^{\alpha}f_l(\xi_{\alpha}(x^{(c)})\,d\Omega_l. \qquad (28)$$

Первый интеграл в правой части (28) равен нулю, а второй — по абсолютной величине оценивается через ch^{n+2}.

Таким образом

$$\left|\int_{\Omega_l}(f_l(x)-\hat{f_l}(x))\,w_l(x)\,d\Omega_l\right|\leqslant ch^{n+2}$$

и окончательно

$$\left|\int_{\Omega}(f(x)-\hat{f}(x))\,w(x)\,d\Omega\right|\leqslant ch^{2}. \qquad (29)$$

Далее по определению

$$|N(u_k)-\hat{N}(u_k)|=\left|\int_{\Omega}\left[\sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}(x)-\hat{a_{ij}}(x))\,D_iu_kD_ju_k+\right.\right.$$

$$\left.\left.+(a(x)-\hat{a}(x))\,u_k^2\right]d\Omega\right|\leqslant\left|\int_{\Omega}(a(x)-\hat{a}(x))\,u_k^2\,d\Omega\right|+$$

$$+\left|\int_{\Omega}\left[\sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}(x)-\hat{a}_{ij}(x)\,D_iu_kD_ju_k\right]d\Omega\right|. \qquad (30)$$

Применяя поочередно неравенство вида (29) к каждому слагаемому в правой части (30), приходим к оценке

$$|N(u_k)-\hat{N}(u_k)|\leqslant c(k)\,h^2,$$

которая вместе с оценкой (22) и доказывает теорему.

Теорема 2. *Пусть $a_{ij}(x)$, $a(x)\in C^2(\overline{\Omega})$ и $p(x)\in C^1(\overline{\Omega})$. Тогда существуют постоянные $C(k)>0$ и $h_0>0$ такие, что при $h<h_0$*

$$\left|\lambda_k-\frac{1}{2}(\lambda_k^{+}+\lambda_k^{-})\right|\leqslant c(k)\,h^2.$$

Для простоты доказательства будем полагать, что собственные функции задач ($1^{\pm}$) нормированы. При фиксированном k имеем

$$\left|\lambda_k-\frac{1}{2}(\lambda_k^{+}+\lambda_k^{-})\right|\leqslant\left|\lambda_k-\hat{\lambda_k}\right|+$$

$$+|\lambda_k^{\wedge} - R^{\wedge}(u_k)| + \frac{1}{2}|R^+(u_k) - \lambda_k^+| +$$

$$+\frac{1}{2}|R^-(u_k) - \lambda_k^-| + \left|\left[R^{\wedge} - \frac{1}{2}(R^+ + R^-)\right](u_k)\right|. \qquad (31)$$

Из определения функционалов $R^{\pm}(u_k)$ и $R^{\wedge}(u_k)$, после очевидных преобразований, с использованием второго утверждения леммы 1, получим

$$\left|\left[R^{\wedge} - \frac{1}{2}(R^+ + R^-)\right](u_k)\right| \leqslant C(k)\left[\left\|a^{\wedge}(x) - \frac{1}{2}(a^+(x) + a^-(x))\right\| + \right.$$

$$\left. + \sum_{i,j=1}^{n}\left\|a_{ij}^{\wedge}(x) - \frac{1}{2}(a_{ij}^+(x) + a_{ij}^-(x))\right\|\right] \leqslant C(k)\, h^2.$$

Теперь доказательство теоремы следует из теоремы 1 и оценок (21), (22) леммы 3.

Ереванский государственный
университет,
Ереванский физический
институт

Поступила 13. III. 1980

Բ. Գ. ԱՐԱՐՔՑՅԱՆ, Ռ. Ռ. ՇԱՀԲԱԶՅԱՆ. Երկրորդ կարգի էլիպտական օպերատորների սեփական արժեքների գնահատականներ *(ամփոփում)*

Ապացուցված է թեորեմ, որը թույլ է տալիս գնահատել երկրորդ կարգի էլիպտական օպերատորների սեփական արժեքները, որոնք բավարարում են Դիրիխլեի խնդրի եզրային պայմաններին, այլ ավելի պարզ կառուցվածք ունեցող նմանատիպ օպերատորների սեփական արժեքների միջոցով։

B. G. ARARKCIAN, R. R. SHAKHBAGIAN. *Estimating the eigenvalues of second order elliptic operators* (summary)

The paper gives some estimates for the eigenvalues of the first boundary valus problem for the second order elliptical operators.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Р. Курант, Д. Гильберт.* Методы математической физики, тт. I, II, М., Гостехиздат, 1951.
2. *A. L. Andrew, F. R. de Hoog, P. J. Robb.* Leighton's bounds for Sturm—Lioville eigenvalues. Journ. of Math. Anal. and Appl., 83, 1981, 11—19.
3. *J. W. Paine, A. L. Andrew.* Bound and higher—order estimates for Sturm—Lioville eigenvalucs, Journal of Math. Anal. and Appl., 96, 1983, 338—394.
4. *S. Pruess.* Estimatin the eigenvalues of Sturm—Lioville problem by approximating the differential equations, SIAM Jour. Numer. Anal., 10, 1973, 65—68.
5. *О. А. Ладыженская, Н. Н. Уральцева.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа, М., «Наука», 1964.