ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XXIII, № 3, 1988 Математика

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.53

Г. М. АЙРАПЕТЯН

О ГРАНИЧНЫХ ЗНАЧЕНИЯХ ФУНКЦИЙ, ПОРОЖДЕННЫХ НЕПОЛНЫМИ СИСТЕМАМИ РАЦИОНАЛЬНЫХ ДРОБЕЙ С ФИКСИРОВАННЫМИ ПОЛЮСАМИ

1. Пусть $Z=\{z_k\}_1^\infty$ $(0\leqslant|z_k|<1)$ — произвольная последовательность комплексных чисел, удовлетворяющая условию Бляшке

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1-|z_k|)<\infty, \tag{1}$$

а $B(z)$ — функция Бляшке с нулями $z_k (k=1, 2,\cdots)$

$$B(z)=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{z_k-z}{1-\bar{z}_k z}\frac{|z_k|}{z_k}.$$

Пусть, далее, $H^p\,(0<p\leqslant\infty)$ — класс Харди с нормой

$$\|f\|_p=\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(e^{i\theta})|^p\,d\theta\right)^{1/p}$$

при $0<p<\infty$ и $\|f\|_\infty=\sup\limits_{|z|<1}|f(z)|$, при $p=\infty$.

Следуя работе [1] М. М. Джрбашяна обозначим через $\lambda_p\{Z\}$ $(0<$ $<p\leqslant\infty)$ класс функций, определенных вне точек единичной окружности $|z|=1$ и удовлетворяющих условиям:

1) $f(z)\in H^p$, при $|z|<1$.

2) $f(z)=\dfrac{1}{z}B(z)\bar{f}\left(\dfrac{1}{z}\right)$, при $|z|>1$ и $\bar{f}(z)\in H^p$.

3) Угловые граничные значения функции $f(z)$ изнутри и извне окружности $|z|=1$ почти всюду совпадают.

Следующие утверждения относительно классов $\lambda_p\{Z\}$ доказаны в работах [2], [3], [4].

1°. При $1\leqslant p<\infty$ $\lambda_p\{Z\}$ совпадает с замыканием линейной оболочки системы

$$r_k(z)=\frac{1-|z_k|^2}{1-\bar{z}_k z}\,(k=1, 2,\cdots)$$

по метрике H^p.

2°. Если $f(z)\in\lambda_p\{Z\}$ и $f(z_k)=0$ $(k=1, 2,\cdots)$, то $f(z)\equiv0$.

3^0 Класс $\lambda_p\{Z\}$ $(1 \leqslant p < \infty)$ совпадает с подклассом функций H^p, удовлетворяющих условию

$$\int\limits_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta)}{B(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta - z} \equiv 0, \quad |z| < 1. \tag{2}$$

Для дальнейших исследований классов $\lambda_p\{Z\}$ М. М. Джрбашяном, на семинаре по теории функций комплексного переменного, была поставлена задача об исследовании граничных свойств функций класса $\lambda_p\{Z\}$ в зависимости от расположения точек z_k $(k = 1, 2, \ldots)$ в единичном круге.

В настоящей работе доказаны следующие утверждения.

А. Если последовательность $Z = \{z_k\}_1^\infty$ удовлетворяет равномерному условию Фростмана

$$\sup_{0 < \theta < 2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - |z_k|^2}{|1 - \bar{z}_k e^{i\theta}|} < \infty, \tag{3}$$

то любая функция из класса $\lambda_\infty\{Z\}$ имеет радиальные предельные значения во всех точках единичной окружности.

В. Если последовательность $Z = \{z_k\}_1^\infty$ удовлетворяет условию (3), а также условию Ньюмана

$$\sup\left\{\frac{1 - |z_{k+1}|}{1 - |z_k|};\ k = 1, 2, \cdots\right\} = q < 1, \tag{4}$$

то ряд Фурье любой функции $f(z) \in \lambda_\infty\{Z\}$ сходится в каждой точке единичной окружности.

Относительно утверждения В отметим, что аналогичный результат для произведения Бляшке был установлен в работе [5].

Пусть $f(z) \in \lambda_p\{Z\}$ и $\tilde{f}(z)$ — ассоциированная с нею функция согласно определению класса $\lambda_p\{Z\}$. Из утверждения 3^0 непосредственно следует

Лемма 1. *Если $f(z) \in \lambda_p\{Z\}$, то $\bar{f}(z) \in \lambda_p\{\bar{Z}\}$, где $\bar{Z} = \{\bar{z}_k\}_1^\infty$.*

2. Будем говорить, что последовательность $Z = \{z_k\}_1^\infty$ удовлетворяет условию Ньюмана-Карлесона, если

$$\inf_k \prod_{j \neq k} \left|\frac{z_j - z_k}{1 - \bar{z}_j z_k}\right| = \delta > 0. \tag{5}$$

Имеет место

Лемма 2. *Пусть последовательность $\{z_k\}_1^\infty$ удовлетворяет равномерному условию Фростмана (3). Тогда ее можно разложить на конечное число попарно непересекающихся последовательностей, каждая из которых удовлетворяет условию Ньюмана-Карлесона.*

Доказательство. Для любого множества E из единичного круга $\mu(E) = \Sigma(1 - |z_k|)$, $z_k \in E$.

Так как для любой функции $f(z) \in H'$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f(z_k)|(1 - |z_k|) \leqslant \int\limits_{|\zeta|=1} |f(\zeta)| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - |z_k|}{|1 - \bar{z}_k\zeta|} |d\zeta| \leqslant C\|f\|_1,$$

то $\mu(E)$ есть карлесонова мера (см., например, [6]).

Хорошо известно (см. [7], стр. 312), что точечная карлесонова мера либо удовлетворяет условию (5), либо состоит из конечного числа попарно непересекающихся последовательностей, каждая из которых удовлетворяет условию (5).

Пусть теперь последовательность $\{z_k\}_1^\infty$ разложена на подпоследовательности согласно лемме 2. Обозначим эти последовательности через $Z_1, Z_2, \dots, Z_m$. Дополнения этих последовательностей до полной последовательности Z обозначим через $\bar{Z}_k$ $(k = 1, 2, \dots, m)$.

Лемма 3. *Пусть $f(z) \in \lambda_\infty \{Z\}$. Тогда*

$$f(z) = f_1(z) + B_1(z)\,(f_2(z) + B_2(z)\,(f_3(z) + \cdots + B_m(z) f_m(z)))\cdots),$$

где $B_k(z)$ $(k = 1, 2, \cdots, m)$ — функция Бляшке для последовательности Z_k, а $f_k(z) \in \lambda_\infty \{Z_k\}$ $(k = 1, 2, \cdots, m)$.

Доказательство. Положим

$$f_1(z) = f(z) - B_1(z) \int\limits_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta)}{B_1(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta - z}. \tag{6}$$

Так как последовательность $\{z_k\}_1^\infty$ удовлетворяет условию (3), то (см. [8], [5])

$$\tilde{f}_1(z) = \int\limits_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta)}{B_1(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta - z} \in H^\infty.$$

Поэтому $f_1(z) \in H^\infty$ и

$$\int\limits_{|\zeta|=1} \frac{f_1(\zeta)}{B_1(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta - z} \equiv 0, \text{ при } |z| < 1.$$

Следовательно, $f_1(z) \in \lambda_\infty \{Z_1\}$.

Из (6) также имеем

$$\int\limits_{|\zeta|=1} \frac{\tilde{f}_1(\zeta)}{\tilde{B}_1(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \int\limits_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta) - f_1(\zeta)}{B(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta - z} \equiv 0,$$

где $\tilde{B}_1(z)$ — произведение Бляшке с нулями из последовательности $\bar{Z}_1$. Поэтому $\tilde{f}_1(z) \in \lambda_\infty \{\bar{Z}_1\}$. Повторяя эти рассуждения для функции $\tilde{f}_1(z)$ относительно остальных последовательностей $\bar{Z}_k$ $(k > 2)$, получаем доказательство леммы.

3. Как известно, если последовательность $\{z_k\}_1^\infty$ удовлетворяет условию (1), то последовательность $\{r_k(z)\}_1^\infty$ обладает биортогональной системой. В работе [9] построен аналитический аппарат для определения биортогональных систем $\Delta_k(z)$ $(k=1, 2, \dots)$, когда кратности чисел z_k являются произвольными числами. В частном случае, когда кратности чисел z_k равны единице, имеем

$$\Omega_k(z) = \frac{B(z)\,(1 - |z_k|^2)^{-1}}{(z - z_k)\,B'(z_k)}, \quad k = 1, 2, \cdots.$$

Лемма 4. *Пусть последовательность* $Z=\{z_k\}_1^\infty$ *удовлетворяет условиям* (3) *и* (5), *тогда любая функция* $f(z)\in\lambda_\infty\{Z\}$ *имеет радиальное предельное значение в каждой точке единичной окружности.*

Доказательство. Так как последовательность $Z=\{z_k\}_1^\infty$ удовлетворяет условию (5), то функцию $f(z)$ можно представить в виде (см. [7])

$$f(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\bar{f}(z_k)}{\Delta_k}\cdot\frac{1-|z_k|^2}{1-\bar{z}_k z},$$

где

$$\Delta_k=\prod_{j\neq k}\frac{z_j-z_k}{1-\bar{z}_j z_k}\frac{|z_j|}{z_j},\quad |\Delta_k|>\delta>0,\ (k=1,\ 2,\cdots). \tag{7}$$

На радиусе $z=re^{i\theta_0}$ $(0<r<1)$ имеем

$$f(re^{i\theta_0})=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\bar{f}(\bar{z}_k)(1-|z_k|^2)}{\Delta_k(1-\bar{z}_k re^{i\theta_0})}. \tag{8}$$

Но справедлива оценка

$$\frac{1-|z_k|^2}{|1-\bar{z}_k re^{i\theta_0}|}\leqslant 2\frac{1-|z_k|^2}{|(1-\bar{z}_k e^{i\theta_0})|}.$$

Поэтому функциональный ряд (8) мажорируется сходящимся числовым рядом. Следовательно, функция $f(z)$ в точке $e^{i\theta_0}$ имеет радиальное предельное значение.

Теорема 1. *Пусть* $f(z)\in\lambda_\infty\{Z\}$ *и* $Z=\{z_k\}_1^\infty$ *удовлетворяет условию* (4). *Тогда в каждой точке единичной окружности функция* $f(z)$ *имеет радиальное предельное значение.*

Доказательство. Так как последовательность $\{z_k\}_1^\infty$ удовлетворяет условию (3), то по теореме Фростмана [10] функции $B_k(z)$ $(k=1, 2, \ldots, m)$ имеют радиальные предельные значения в каждой точке единичной окружности. Поэтому доказательство теоремы следует из лемм 2 и 3.

4. Пусть теперь последовательность $Z=\{z_k\}_1^\infty$ удовлетворяет условию (4). Докажем лемму.

Лемма 5. *Если* $f(z)\in\lambda_\infty\{Z\}$, *то для коэффициентов Фурье* $\hat{f}(n)$ *функции* $f(z)$ *будем иметь*

$$\hat{f}(n)=O\left(\frac{1}{n}\right)\ (n=1, 2,\cdots). \tag{9}$$

Доказательство. Из (4) следует, что последовательность $\{z_k\}_1^\infty$ удовлетворяет также условию (5) (см. [11]), следовательно, $f(z)$ можно представить в виде

$$f(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\tilde{f}(\bar{z}_k)}{\Delta_k}\cdot\frac{1-|z_k|^2}{1-\bar{z}_k z}, \tag{10}$$

где числа Δ_k определяются из (7).

Дифференцируя равенство (9), будем иметь

$$f^{(n)}(z) = n! \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\overline{f(\overline{z}_k)}}{\Delta_k} \cdot \frac{(1-|z_k|^2)\,\overline{z}_k^n}{(1-\overline{z}_k z)^{n+1}}$$

и поэтому, учитывая лемму 11 из [12], получим

$$|\tilde{f}(n)| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\overline{f(\overline{z}_k)}}{\Delta_k} (1-|z_k|^2)\,\overline{z}_2^n \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M}{\delta} \sum_{k=1}^{\infty} (1-|z_k|^2)\,|z_k|^n = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Теорема 2. *Пусть* $f(z) \in \lambda_\infty \{Z\}$ *и последовательность* $\{z_k\}_1^\infty$ *удовлетворяет условиям* (3) *и* (4). *Тогда ряд Фурье функции* $f(z)$ *сходится в каждой точке единичной окружности.*

Доказательство. Так как по теореме 1 функция $f(z)$ имеет радиальное предельное значение в каждой точке единичной окружности, то утверждение теоремы следует из леммы 5 и из теоремы Литтльвуда [13].

Ереванский политехнический
институт им. К. Маркса

Поступила 9. IV. 1987

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. М. Джрбашян*. Разложение по системам рациональных функций с фиксированными полюсами, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., 2, № 1, 1967, 3—51.
2. *Г. Ц. Тумаркин*. Разложение аналитических функций в ряд по рациональным дробям с заданным множеством полюсов, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., 4, № 1, 1969, 9—31.
3. *Г. М. Айрапетян*. О базисе рациональных функций в подпространствах классов H^p $(1<p<\infty)$, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., VIII, № 6, 1973, 439—450.
4. *А. Б. Александров*. Инвариантные подпространства оператора обратного сдвига в пространстве H^p $(p \in (0,1))$, ЛОМИ, 92, 1979.
5. *S. V. Hruščov, S. A. Vinogradov*. Inner functions and multiplers of Couchy type integrals, LOMI, preprints, E—I—80, Leningrad, 1980.
6. *P. L. Duren*. Theory of H^p spaces, NY—London, 1970.
7. *Дж. Гарнет*. Ограниченные аналитические функции, М., 1984.
8. *Г. М. Айрапетян*. Об интерполяции в подклассах H^1 и H^∞ и некоторые вопросы, связанные с интегралом Коши, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., XIII, 5—6, 1978, 448—459.
9. *М. М. Джрбашян*. Биортогональные системы рациональных функций и представление ядра Коши, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., VIII, № 5, 1973, 384—409.
10. *Э. Коллингвуд, А. Ловатер*. Теория предельных множеств, М., 1971.
11. *К. Гофман*. Банаховы пространства аналитических функций, М., 1963.
12. *С. А. Виноградов, В. П. Хавин*. Свободная интерполяция в H^p и в некоторых других классах функций, 1, ЛОМИ, 56, 1976, 12—58.
13. *А. Зигмунд*. Тригонометричекие ряды, М., 1965.