ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱ։ ԱՐՑԱՆ ՇՐՋԱՆԱՌՈՒԹՅՈՒՆ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XXIII, № 3, 1988 Математика

УДК 517.51

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

В. А. СКВОРЦОВ

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ МНОГОМЕРНОГО РЯДА ХААРА

Основной целью данной статьи является доказательство следующего утверждения.

Теорема. *Пусть двойной ряд по системе Хаара*

$$\sum_{n,\, m=1}^{\infty} a_{n,\, m} \chi_{n,\, m}(x,\ y) \tag{1}$$

сходится (по прямоугольникам) всюду, кроме некоторого счетного множества E, к конечной функции $f(x,\ y)$, интегрируемой по Перрону на единичном квадрате, и пусть в точках $(x,\ y)$ множества E выполнено соотношение

$$\lim_{\substack{k\to\infty\\ l\to\infty}} \frac{a_{n_k, m_l}}{\chi_{n_k,\, m_l}(x, y)} = 0, \tag{2}$$

где n_k, m_l — все те номера, при которых замыкания носителей функций $\chi_{n_k,\, m_l}$ содержат рассматриваемую точку $(x,\ y)$. Тогда ряд (1) является рядом Фурье—Перрона функции $f(x,\ y)$.

В нашей работе [1] доказана аналогичная теорема для ряда (1), который всюду удовлетворяет другому условию (номера n_k, m_l — те же, что и в условии (2)):

$$\lim_{k+l\to\infty} \frac{a_{n_k,\, m_l}}{\chi_{n_k,\, m_l}(x,\ y)} = 0. \tag{3}$$

При этом в этой последней теореме исключительным множеством может быть любое U-множество и, значит, в частности, любое счетное множество.

Мы докажем теорему данной статьи сведением ее к упомянутой теореме работы [1]. Для этого достаточно доказать, что в условиях нашей теоремы всюду выполняется (3), для чего, в свою очередь, достаточно доказать следующую лемму.

Лемма 1. *Пусть ряд (1) сходится по прямоугольникам во всех точках некоторого креста $(a \times [0, 1]) \cup ([0, 1] \times b)$, $0 \leqslant a \leqslant 1$, $0 \leqslant b \leqslant 1$, кроме, быть может, точек некоторого счетного множества E, где однако выполняется соотношение (2). Тогда в точке $(a,\ b)$ выполняется (3).*

При доказательстве леммы мы воспользуемся методом работ [1] и [2].

Заметим, что из сходимости ряда (1) в некоторой точке следует выполнение в той же точке соотношения (2), так что можно считать, что (2) выполняется всюду. Отметим также, что если в (3) оба индекса n_k и m_l стремятся к ∞, то справедливость (3) следует из (2), записанного для точки (a, b).

Итак, остается доказать (3) в предположении, что одна из последовательностей $\{n_k\}$ и $\{m_l\}$ ограничена.

Пусть, например, ограничена последовательность $\{m_l\}$ и пусть в этих предположениях (3) не выполняется. Тогда найдется подпоследовательность $\{n_{k_l}\}$, $k_l \nearrow \infty$, такая, что для некоторого фиксированного номера m_l выполняются неравенства

$$\frac{a_{n_{k_l}, m_l}}{\chi_{n_{k_l}, m_l}(a, b)} > C > 0 \text{ при всех } k_l.$$

С учетом значения функций $\chi_{n, m}$ это означает, что

$$|a_{n_{k_l}, m_l} \chi_{n_{k_l}, m_l}(a, b)| > C \cdot 2^{k_l-1}\, 2^{l-1} \text{ при всех } k_l. \tag{4}$$

Двоичные интервалы $(i/2^n, i+1/2^n) \times (j/2^m, j+1/2^m) \equiv \Delta_n \times \Delta_m \equiv \Delta_{n, m}$ будем называть интервалами ранга (n, m). Пусть $\Delta_{k_l-1, l-1}$ — интервал, являющийся носителем функции $\chi_{n_{k_l}, m_l}$. Для Δ_{k_l-1} найдется интервал Δ_{k_l} ранга, на единицу большего такой, что $a \in \overline{\Delta}_{k_l}$. Разрежая при необходимости последовательность $\{k_l\}$ можно считать, что последовательность $\{\Delta_{k_l}\}$ вложена и $a = \bigcap\limits_{l=1}^{\infty} \overline{\Delta}_{k_l}$.

Ниже будем обозначать постоянное значение, принимаемое какой-либо функцией f на интервале Δ через $f(\Delta)$.

Рассмотрим многочлены по системе Хаара вида

$$\begin{gathered} P_j^l(x, y) = S_{n_{k_l}, 2^j}(x, y) - S_{n_{k_l-1}, 2^j}(x, y) = \\ = \sum_{s=1}^{2^j} a_{n_{k_l}, s} \chi_{n_{k_l}, s}(x, y) = \chi_{n_{k_l}}(x) \sum_{s=1}^{2^j} a_{n_{k_l}, s} \chi_s(y). \end{gathered} \tag{5}$$

Для одного из интервалов ранга (k_l, l), составляющих интервал $\Delta_{k_l, l-1}$, величины $P_{l-1}^l(\Delta_{k_l, l-1})$ и $a_{n_{k_l}, m_l} \chi_{n_{k_l}, m_l}(\Delta_{k_l, l})$ имеют один и тот же знак. Поэтому, учитывая (4), получим

$$|P_j^l(\Delta_{k_l, l})| = |P_{l-1}^l(\Delta_{k_l, l-1}) + a_{n_{k_l}, m_l} \chi_{n_{k_l}, m_l}(\Delta_{k_l, l})| > C 2^{l-1} 2^{k_l-1}. \tag{6}$$

Вновь при необходимости разрежая последовательность $\{k_l\}$, можно считать, что для всех l интервалы $\Delta_{k_l, l}$ имеют на ось y общую проекцию Δ_l.

Следующий этап построения выделим в самостоятельную лемму.

Лемма 2. *Пусть в принятых выше обозначениях для некоторой последовательности $\{\Delta_{k_l, j_0}\}$ вложенных интервалов $(k_l \nearrow \infty)$ с общей проекцией Δ_{j_0} на ось y, являющихся интервалами постоянства функций $\chi_{n_{k_l}, m_{j_0}}$, для сумм $P_{j_0}^l$, построенных из членов рас-*

сматриваемого ряда (1), *удовлетворяющего всем условиям теоремы, справедливо при некотором* $A > 0$ *неравенство*

$$|P^{l}_{j_i}(\Delta_{k_i, j_i})| > A\, 2^{k_i},\ i = 1, 2, \cdots. \qquad (7)$$

Тогда для любого B, $0 < B < A$, *найдется при некотором* $j_1 > j_0$ *два непересекающих интервала* Δ_{j_1} *и* $\tilde{\Delta}_{j_1}$, $\Delta_{j_1} \cup \tilde{\Delta}_{j_1} \subset \Delta_{j_0}$ *и подпоследовательность* $\{k_{l_p}\}$ *последовательности* $\{k_l\}$ *такая, что для интервалов* $\Delta_{k_{l_p}, j_1} = \Delta_{k_{l_p}} \times \Delta_{j_1}$ *и* $\tilde{\Delta}_{k_{l_p}, j_1} = \Delta_{k_{l_p}} \times \tilde{\Delta}_{j_1}$ *справедливы неравенства*

$$|P^{l_p}_{j_1}(\Delta_{k_{l_p}, j_1})| > B\, 2^{k_{l_p}},\ |P^{l_p}_{j_1}(\tilde{\Delta}_{k_{l_p}, j_1})| > B\, 2^{k_{l_p}}$$

при всех i_p, $i_1 < i_2 < \cdots < i_p < \cdots$.

Рассмотрим P^l_j при фиксированном i (см. (5)). Найдется последовательность вложенных интервалов $\{\Delta^+_{k_l, j}\}^\infty_{j=j_0}$ таких, что $\{|P^l_j(\Delta^+_{k_l, j})|\}$ монотонно не убывает. Проекции этих интервалов на ось y стягиваются к точке y_l. Выделив при необходимости подпоследовательность, можем считать, что существует $\lim\limits_{l\to\infty} y_l = y'$, причем y_l находятся по одну сторону от y'. Каждому $\Delta^+_{k_l, j}$ соответствует интервал $\Delta^-_{k_l, j}$ того же ранга, такой, что в сумме они образуют интервал ранга $(k_l, j-1)$.

Возьмем и зафиксируем произвольное $B < A$, $B > 0$. Пусть j_l такой номер, что

$$|P^l_j(\Delta^-_{k_l, j})| \leqslant B\, 2^{k_l} \text{ при } j_0 < j < j_l \text{ и } |P^l_{j_l}(\Delta^-_{k_l, j_l})| > B\, 2^{k_l}. \qquad (8)$$

Тогда из (5), (7) и первого из неравенств (8) следует, что

$$|a_{n_{k_l}, m_j} \chi_{n_{k_l}, m_j}(\Delta^+_{k_l, j})| > (A - B)\, 2^{k_l} \cdot 2^{j - j_0} \text{ при } j_0 < j \leq j_l. \qquad (9)$$

Допустим, что

$$\lim_{l\to\infty} j_l = \infty. \qquad (10)$$

Зафиксировав натуральное t, в силу условия, наложенного на подпоследовательность $\{y_l\}$, при некотором $i(t)$ для всех $i > i(t)$ выполнено соотношение

$$(a, y') \in \bar{\Delta}^+_{k_l, t}. \qquad (11)$$

В силу (10) найдется сколь угодно большой номер $i' > i(t)$, для которого $j_{i'} > t$. Значит, для него верно (9) при $j = t$. С учетом (11), (9) и возможной принадлежности точки (a, y') лишь границе интервала $\Delta^+_{k_l, t}$, получаем, что

$$|a_{n_{k_l}, m_t} \chi_{n_{k_l}, m_j}(a, y')| \geqslant \frac{(A - B)}{4}\, 2^{k_l} \cdot 2^{t - j_0}.$$

Так как здесь t, а затем и k_l можно взять сколь угодно большими, то отсюда видно, что в точке (a, y') нарушается (2). Тем самым (10) невозможно, т. е. последовательность $\{j_l\}$ ограничена.

Отсюда вытекает, что найдется подпоследовательность $\{j_{i_q}\}$ такая, что $j_{i_p}=\bar{j}$ $(i_1<i_2<\cdots<i_p<\cdots)$ и все интервалы $\Delta^+_{k_{i_p},\bar{j}}$ имеют общую проекцию $\Delta_{\bar{j}}$ на ось y. Тем самым, взяв $\bar{j}$ за j_1 в формулировке леммы, получаем, что последовательность интервалов $\{\Delta^+_{k_{i_p},\bar{j}}\}$ и $\{\Delta^-_{k_{i_p},\bar{j}}\}$ является искомой. Лемма 2 доказана.

Возвращаясь к доказательству леммы 1, рассмотрим последовательность $C2^{l-2}=C_0>C_1>\cdots>C_n>\cdots>C_0/2$. Применяя лемму 2 сначала при $A=C_0$, $B=C_1$ (см. (6)), затем к полученным последовательностям интервалов при $A=C_1$, $B=C_2$ и т. д., мы в результате многократного применения леммы 2 найдем двоично-иррациональную координату y' такую, что $(a, y')\bar{\in} E$, и в то же время в ней при некоторых сколь угодно больших i и j

$$P^l_j(a, y')\geqslant\frac{C_0}{4}2^{k_l}.$$

(Мы учли, что a может быть двоично-рациональной точкой). Но в силу (5) это противоречит сходимости ряда (1) в точке (a, y'). Лемма 1, а тем самым и теорема полностью доказаны.

Отметим, что результат переносится на кратные ряды Хаара любой размерности.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступила 20. II. 1987

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. А. Скворцов.* О множествах единственности для многомерных рядов Хаара, Мат. заметки, 14, № 6, 1973, 789—797.
2. *В. А. Скворцов.* О коэффициентах сходящихся кратных рядов Хаара и Уолша, Вестник МГУ, серия матем., № 6, 1973, 77—79.