ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XXIII, № 3, 1988 Математика

УДК 519.24

Ю. А. КУТОЯНЦ

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ИДЕНТИФИКАЦИИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С МАЛЫМ ШУМОМ

§ 1. Введение

Пусть $X_\varepsilon(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$ решение стохастического дифференциального уравнения

$$dX_\varepsilon(t) = b(X_\varepsilon(t))\,dt + \varepsilon dw(t), \quad X_\varepsilon(0) = x_0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{1.1}$$

где $w(\cdot)$ — винеровский процесс, $\varepsilon \in (0, 1]$, $b(\cdot)$ — коэффициент сноса [1]. Нас будут интересовать задачи, связанные с восстановлением функции $b(\cdot)$ по наблюдениям $X_\varepsilon(\cdot)$ при $\varepsilon \to 0$. К такой схеме приходят, например, в ситуации, когда на динамическую систему

$$\frac{dX_0(t)}{dt} = b(X_0(t)), \quad X_0(0) = x_0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T \tag{1.2}$$

действует «малый» белый гауссовский шум и правая часть этого уравнения наблюдателю не известна.

Всюду далее мы предполагаем, что функция $b(\cdot)$ удовлетворяет условию

$$L: |b(x) - b(y)| \leqslant L|x - y|, \quad |b(x)| \leqslant L(1 + |x|),$$

обеспечивающему существование и единственность сильного решения уравнения (1.1) и эквивалентность меры P_b^ε, наведенной наблюдениями $X_\varepsilon(\cdot)$ в измеримом пространстве $(C[0, T], B[0, T])$, мере $P^{(\varepsilon)}$, отвечающей в этом же пространстве процессу $x_0 + \varepsilon w(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$ [1].

В случае, когда функция $b(\cdot)$ известна с точностью до значения конечномерного параметра: $b(x) = b(\theta, x)$, $\theta \in \Theta \subset R^k$ задача идентификации сводилась к оцениванию этого параметра. Известно, что в условиях гладкости $b(\theta, x)$ по θ и x, оценка максимального правдоподобия $\hat\theta_\varepsilon$ и широкий класс байесовских оценок $\tilde\theta_\varepsilon$ состоятельны, асимптотически нормальны и асимптотически эффективны ([2], теоремы 3.4.3 и 3.4.8). В частности, ОМП

$$\mathrm{L}_\theta\{(\hat\theta_\varepsilon - \theta)\varepsilon^{-1}\} \Rightarrow N(0, \mathrm{I}(\theta)^{-1}), \tag{1.3}$$

где матрица

$$\mathrm{I}(\theta)_{ij} = \int_0^T \frac{\partial b(\theta, X_0(t))}{\partial\theta^{(i)}} \frac{\partial b(\theta, X_0(t))}{\partial\theta^{(j)}}\,dt. \tag{1.4}$$

В случае же, когда только известно, что $b(\cdot)$ удовлетворяет условию L, строятся непараметрические оценки $\hat{b}_\varepsilon(x)$ функции $b(x)$, доказывается ограниченность риска [3]

$$E_b(\hat{b}_\varepsilon(x) - b(x))^2 \varepsilon^{-4/5}$$

и неулучшаемость этой скорости сходимости.

В настоящей работе считаем, что процесс $X_\varepsilon(\cdot)$ удовлетворяет уравнению (1.1) и наблюдателю требуется подобрать функцию $S(\theta^*, x)$, „близкую" к $b(\cdot)$ из некоторой параметрической модели $\{S(\theta, x), \theta \in \Theta\}$, где $S(\cdot,\cdot)$ — известная функция, множество $\Theta = (\alpha, \beta)$, $|\alpha| + |\beta| < \infty$. Существует несколько ситуаций, приводящих к этой задаче.

А. Функция $b(\cdot)$ имеет достаточно громоздкий вид и требуется ее заменить некоторой более простой функцией из параметрического семейства, наиболее близкой к $b(\cdot)$ в $L_2[0, T]$-метрике; но минимизация функционала

$$\|b(\cdot) - S(\theta, \cdot)\|^2 = \int_0^T [b(X_0(t)) - S(\theta, X_0(t))]^2 \, dt$$

по θ затруднена из-за необходимости вычислять $b(\cdot)$.

Б. Наблюдатель предполагает, что процесс $X_\varepsilon(\cdot)$ удовлетворяет уравнению

$$dX_\varepsilon(t) = S(\theta, X_\varepsilon(t))\, dt + \varepsilon dw(t), \quad X_\varepsilon(0) = x_0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T \qquad (1.5)$$

(хотя на самом деле имеет место (1.1)) и решает задачу оценивания θ по наблюдениям $X_\varepsilon(\cdot)$.

В. Как и в А, но функция $b(\cdot)$ зависит от некоторого параметра: $b(x) = b(\mu, x)$, $\mu \in M$ и требуется в рамках некоторого параметрического семейства $\{S(\theta, x), \theta \in \Theta\}$ проследить связь $\theta = \theta(\mu)$ или $\mu = \mu(\theta)$.

Во всех ситуациях нас будут интересовать асимптотические свойства оценки максимального правдоподобия (ОМП) $\hat{\theta}_\varepsilon$ построенной по наблюдениям (1.1) в предположении, что имеют место наблюдения (1.5). Точнее обозначим $L_\varepsilon(\theta, X_\varepsilon)$ производную Радона-Никодима меры $P_\theta^{(\varepsilon)}$, наведенной процессом (1.5) по мере $P^{(\varepsilon)}$ [1]:

$$L_\varepsilon(\theta, X_\varepsilon) = \exp\left\{\varepsilon^{-2} \int_0^T S(\theta, X_\varepsilon(t))\, dX_\varepsilon(t) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2\varepsilon^2} \int_0^T S(\theta, X_\varepsilon(t))^2 \, dt\right\} \qquad (1.6)$$

и подставим в это выражение $X_\varepsilon(\cdot)$ из (1.1), тогда

$$\ln L_\varepsilon(\theta, X_\varepsilon) = \varepsilon^{-1} \int_0^T S(\theta, X_\varepsilon(t))\, dw(t) -$$

$$-\frac{1}{2\varepsilon^2}\int_0^T [S(\theta, X_\varepsilon(t)) - 2b(X_\varepsilon(t))] S(\theta, X_\varepsilon(t))\, dt.$$

ОМП $\hat{\theta}_\varepsilon$ определим с помощью соотношения

$$\hat{\theta}_\varepsilon = \arg\max L_\varepsilon(\theta, X_\varepsilon) \tag{1.7}$$

и изучим ее свойства при $\varepsilon \to 0$.

Ниже доказывается сходимость

$$\hat{\theta}_\varepsilon \to \theta^* = \arg\min \int_0^T [S(\theta, X_0(t)) - b(X_0(t))]^2\, dt$$

(лемма 3.1) и асимптотическая нормальность величины $(\hat{\theta}_\varepsilon - \theta^*)\varepsilon^{-1}$ (теорема 3.1).

В доказательствах используется следующее неравенство:

$$|X_\varepsilon(t) - X_0(t)| \leqslant \varepsilon e^{Lt} \sup_{0 \leqslant s \leqslant t} |w(s)|, \tag{1.8}$$

справедливое с вероятностью 1 при условии L (см., например, [2], лемма 3.4.4).

В работе [6] решалась аналогичная задача в случае, когда наблюдаемый процесс обладает эргодическими свойствами. Там установлена соответствующая состоятельность ОМП $\hat{\theta}_T$ и асимптотическая нормальность величины $T^{1/2}(\hat{\theta}_T - \theta)$ при $T \to \infty$.

§ 2. Вспомогательные результаты

Нам понадобятся вероятности больших уклонений максмума стохастического интеграла

$$\zeta_\varepsilon(\theta) = \int_0^T f(\theta, X_\varepsilon(t))\, dw(t),$$

зависящего от параметра $\theta \in [A, B]$. Разумеется, предполагается, что

$$P_b^{(\varepsilon)}\left\{\int_0^T f(\theta, X_\varepsilon(t))^2\, dt < \infty\right\} = 1.$$

Оценим сначала вероятность приращений процесса $\zeta_\varepsilon(\theta)$, $\theta \in [A, B]$. Обозначим $M^j_{x,0}$ класс функций $f(\theta, x)$, имеющих j производных по θ и x и удовлетворяющих неравенствам

$$\left|\frac{\partial^l f(\theta, x)}{\partial\theta^r\, \partial x^{l-r}}\right| \leqslant L_1(1 + |x|),\ \underset{0<r<l}{l = 0, 1, \cdots, j},\ 0 \leqslant r \leqslant l. \tag{2.1}$$

Если $f(\theta, x) = g(x)$, то будем писать $g(\cdot) \in M^j_x$.

Лемма 2.1. *Пусть* $f(\theta, x) \in M_0^1$, *тогда найдутся такие* $K^* > 0$ *и* $\gamma^* > 0$, *что*

$$P_b^{(\varepsilon)}\{\zeta_\varepsilon(\theta + h) - \zeta_\varepsilon(\theta) > N\} \leqslant K^* \exp\{-\gamma^* N h^{-1}\}. \qquad (2.2)$$

Доказательство. Ниже γ — некоторое положительное число, значение которого выберем позже и принято обозначение $\Delta f = h^{-1} \times \times [f(\theta + h, X_\varepsilon(t)) - f(\theta, X_\varepsilon(t))]$, $h > 0$. Кроме того, индексы у вероятности $P_b^{(\varepsilon)}$ и переменную t в подынтегральных выражениях будем опускать. Имеет

$$P_b^{(\varepsilon)}\{\zeta_\varepsilon(\theta + h) - \zeta_\varepsilon(\theta) > N\} = P\left\{\int_0^T \gamma \Delta f\, dw > N\gamma h^{-1}\right\} \leqslant$$

$$\leqslant P\left\{\int_0^T \gamma\Delta f dw - \frac{1}{2}\int_0^T (\gamma\Delta f)^2 dt > \frac{1}{2} N\gamma\, h^{-1}\right\} +$$

$$+ P\left\{\int_0^T (\gamma\Delta f)^2\, dt > N\gamma h^{-1}\right\} \leqslant \exp\left\{-\frac{1}{2} N\gamma h^{-1}\right\},$$

$$E \exp\left\{\int_0^T (\gamma\Delta f)\, dw - \frac{1}{2}\int_0^T (\gamma\Delta f)^2 dt\right\} +$$

$$+ \exp\left\{-N h^{-1}\right\} \cdot E \exp\left\{\gamma \int_0^T (\Delta f)^2\, dt\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \exp\left\{-\frac{1}{2} N\gamma\, h^{-1}\right\} + \exp\{-Nh^{-1}\} \times$$

$$\times E \exp\left\{\gamma \int_0^T L^2 (1 + |X_\varepsilon(t))|)^2\, dt\right\}. \qquad (2.3)$$

Выше мы воспользовались неравенством Чебышева, ограниченностью единицей математического ожидания мартингальной экспоненты [1] и условием (2.1).

Для $X_\varepsilon(t)$ имеем соотношения

$$|X_\varepsilon(t)| \leqslant x_0 + \int_0^T |b(X_\varepsilon(s))|\, ds + \varepsilon|w(t)| \leqslant$$

$$\leqslant x_0 + LT + L\int_0^t |X_\varepsilon(s)\, ds + \varepsilon\eta_T,$$

где $\eta_T = \sup\limits_{0<t<T} |w(t)|$. Откуда, согласно лемме 4.15 [1] получаем

$$\sup_{0\leqslant t<T} |X_\varepsilon(t)| \leqslant (x_0 + LT + \varepsilon\eta_T)\, e^{LT}.$$

Это позволяет для последнего математического ожидания в (2.3) провести следующие оценки:

$$E\exp\left\{2\gamma L^2T+2\gamma L^2\int_0^T|X_\varepsilon(t)|^2\,dt\right\}\leqslant$$

$$\leqslant\exp\{2\gamma L^2 T\}\cdot E\exp\{2\gamma L^2 T\sup_{0<t<T}|X_\varepsilon(t)|^2\}\leqslant$$

$$\leqslant\exp\{2\gamma L^2 T+4\gamma L^2 T(x_0+LT)^2e^{LT}\}\times$$

$$\times E\exp\{4\gamma L^2 Te^{2LT}\varepsilon^2\eta_T^2\}.$$

Для оценки последнего математического ожидания воспользуемся известными неравенствами:

$$Q(x)=P\{\sup_{0<t<T}|w(t)|>x\}\cdot<4P\{w(T)>x\},$$

$$P\{w(T)>x\}\leqslant\sqrt{\frac{T}{2\pi}}\,\frac{1}{x}\exp\left\{-\frac{x^2}{2T}\right\}.$$

Откуда, для любого $a<\dfrac{1}{2T}$ имеем

$$Ee^{a\eta_T^2}=\int_0^\infty e^{ax^2}\,dP\{\eta_T<x\}=-\int_0^\infty e^{ax^2}\,dQ(x)=$$

$$=1+2a\int_0^\infty e^{ax^2}x\,Q(x)\,dx<1+8a\sqrt{\frac{T}{2\pi}}\times$$

$$\times\int_0^\infty\exp\left\{-\left(\frac{1}{2T}-a\right)x^2\right\}dx=1+\frac{4aT}{\sqrt{1-2aT}}.$$

Параметр γ выберем из условия $a<(2T)^{-1}$ и с учетом $\varepsilon\in(0,1]$ положим $\gamma=(9T^2L^2)^{-1}\exp(-2LT)$, что приводит к оценке

$$E\exp(a\eta_T^2)\leqslant 1+\frac{16\varepsilon^2}{9\sqrt{1-\dfrac{8}{9}\varepsilon^2}}<1+5\frac{1}{3}.$$

Следовательно

$$P\{\zeta_\varepsilon(\theta+h)-\zeta_\varepsilon(\theta)>N\}\leqslant\exp\left(-\frac{1}{2}Nh^{-1}\gamma\right)+K\exp(-Nh^{-1}),\quad(2.4)$$

где

$$K=\exp\left\{\frac{2}{9T}e^{-2LT}+\frac{4}{9T}(x_0+LT)^2\right\}.$$

Положим теперь $\gamma^*=\min(\gamma,1)$ и из неравенства (2.4) получим (2.2) с $K^*=K+1$.

Далее нам понадобится следующая лемма М. В. Бурнашева [7].

Лемма 2.2. Пусть $\zeta(\theta)$, $\theta\in[A, B]$ — непрерывный случайный процесс, удовлетворяющий условию: существуют неотрицательная функция $g(h)$ и функция $q(C, h)$, $h\geqslant 0$ такие, что

$$P\{\zeta(\theta+h)-\zeta(\theta)>Cg(h)\}\leqslant q(C, h) \tag{2.5}$$

и

$$M=\sum_{n=1}^{\infty} q(2^{-n})<\infty, \tag{2.6}$$

$$H(C)=\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} q(C, 2^{-n})<\infty. \tag{2.7}$$

Тогда

$$P\{\sup_{A<\theta<B}[\zeta(\theta)-\zeta(A)]>N\}\leqslant H\left(\frac{A}{M(B-A)}\right)\cdot \tag{2.8}$$

С помощью этой леммы и леммы 2.1 оценим вероятность больших уклонений супремума процесса $\zeta_\varepsilon\ (\cdot)$.

Лемма 2.3. *В условиях леммы 2.1 справедливо неравенство*

$$P_b^{(\varepsilon)}\{\sup_{A<\theta<B}[\zeta_\varepsilon(\theta)-\zeta_\varepsilon(A)]>N\}\leqslant 8K^*\exp\left\{-\frac{\gamma^* N}{2(B-A)}\right\}\cdot \tag{2.9}$$

Доказательство. Пусть функция $g(\cdot)$ удовлетворяет условию (2.6). Примем обозначение

$$l_n=N2^{n-1}g(2^{-n})M^{-1}(B-A)^{-1}\gamma^*,$$

тогда согласно (2.8)

$$P\{\sup_{A<\theta<B}[\zeta_\varepsilon(\theta)-\zeta_\varepsilon(A)]>N\}\leqslant\frac{1}{2}K^*\sum_{n=1}^{\infty}2^n e^{-l_n}. \tag{2.10}$$

Рассмотрим задачу минимизации функционала

$$\Lambda(l)=\sum_{n=1}^{\infty}2^n e^{-l_n}\quad (l=(l_1, l_2,\cdots)) \tag{2.11}$$

при ограничении

$$\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}l_n=N^*\equiv\frac{\gamma^*}{2}N(B-A)^{-1}. \tag{2.12}$$

Методом множителей Лагранжа получаем $l_n^*=\lambda+2n\ln 2$, что при подстановке в (2.12) дает

$$\lambda+2\ln 2\sum_{n=1}^{\infty}n2^{-n}=N^*.$$

Вычисляя сумму, приходим к значению $\lambda=N^*-4\ln 2$. Следовательно, $l_n^*=N^*-4\ln 2+2n\ln 2$ и после подстановки в (2.11) получаем $\Lambda(l^*)=$ $=\exp(-N^*+4\ln 2)$, что, в свою очередь, в силу (2.10), приводит к требуемому неравенству (2.9).

§ 3. Разложение ОМП

Рассмотрим задачу оценки параметра θ по наблюдениям $X_\varepsilon(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$ с дифференциалом

$$dX_\varepsilon(t) = b(X_\varepsilon(t))\,dt + \varepsilon dw(t),\ X_\varepsilon(0) = x_0,\ 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{3.1}$$

Наблюдатель считает, что $X_\varepsilon(\cdot)$ удовлетворяет уравнению (1.5), строит отношение правдоподобия (1.6) и с помощью (1.7) находит ОМП $\hat{\theta}_\varepsilon$. Мы будем интересоваться свойствами ОМП при малых ε.

Введем обозначения: $\theta_u = \theta^* + u$,

$$F(u) = \int_0^T [S(\theta_u, X_0(t)) - S(\theta^*, X_0(t))] \times$$

$$\times [S(\theta_u, X_0(t)) + S(\theta^*, X_0(t)) - 2b(X_0(t))]\,dt =$$

$$= G(\theta_u) - \int_0^T [S(\theta^*, X_0(t)) - b(X_0(t))]^2\,dt,$$

$$G(\theta) = \int_0^T [S(X_0(t)) - b(X_0(t))]^2\,dt,$$

$$Z_\varepsilon(u) = \frac{dP^{(\varepsilon)}_{\theta^*+u}}{dP^{(\varepsilon)}_{\theta^*}}(X_\varepsilon),\ u \in (\alpha - \theta^*, \beta - \theta^*)$$

и докажем следующую лемму, которая „локализует" задачу.

Лемма 3.1. *Пусть функции $S(\theta, \cdot)$ и $b(\cdot)$ удовлетворяют условию L, функция $G(\theta)$ имеет единственный минимум, функция $S(\cdot, x)$ имеет две непрерывные производные по θ в окрестности точки θ^*, принадлежащие M_x^0 и $F''(0) > 0$. Тогда найдутся такие $\bar{\varepsilon}_0$, C, c, что при всех $\varepsilon < \bar{\varepsilon}_0$*

$$P_b^{(\varepsilon)}\{|\hat{\theta}_\varepsilon - \theta| > \nu\} \leqslant C \exp\{-c\,\varepsilon^{-(1-2\delta)}\}, \tag{3.2}$$

где $\nu = \varepsilon^\delta$, $\delta \in (0,\ 1/2)$.

Доказательство. Из определения (1.7) и «правила цепи» для мер имеем

$$\hat{\theta}_\varepsilon = \arg\max L_\varepsilon(\theta, X_\varepsilon) = \theta^* + \arg\max Z_\varepsilon(u).$$

Следовательно

$$P_b^{(\varepsilon)}\{|\hat{\theta}_\varepsilon - \theta^*| \geqslant \nu\} \leqslant P_b^{(\varepsilon)}\{\sup_{|u|>\nu} Z_\varepsilon(u) > 1\} =$$

$$= P\left\{\sup_{|u|>\nu}\left[\int_0^T [S(\theta_u, X_\varepsilon) - S(\theta^*, X_\varepsilon)]\,dw - \right.\right.$$

$$-\frac{1}{2\varepsilon}\int\limits_0^T[S(\theta_u, X_\varepsilon)-S(\theta^*, X_\varepsilon)]\cdot[S(\theta_u, X_\varepsilon)+$$

$$+S(\theta^*, X_\varepsilon)-2b(X_\varepsilon)]\,dt\Bigg|>0\Bigg\}. \qquad (3.3)$$

Последний интеграл в этом выражении обозначим $F(u, \varepsilon)$. Очевидно $F(u)=F(u, 0)$. Известно (см., например, [2]), что

$$|S(\theta_u, X_\varepsilon(t))-S(\theta_u, X_0(t))|\leqslant L|X_\varepsilon(t))-X_0(t)\leqslant$$
$$\leqslant L\varepsilon e^{LT}\sup_{0<t<T}|w(t)|$$

и

$$|S(\theta_u, X_\varepsilon(t))|\leqslant L(1+|X_\varepsilon(t)|)\leqslant$$
$$\leqslant L(1+\sup_{0<t<T}|X_0(t)|+\varepsilon e^{LT}\sup_{0<t<T}|w(t)|).$$

С помощью этих неравенств получаем соотношение

$$|F(u, \varepsilon)-F(u)|\leqslant B_1\varepsilon\eta_T+B_2\varepsilon^2\eta_T^2,$$

с некоторыми постоянными $B_1>0$ и $B_2>0$.

В сделанных предположениях

$$\lim_{u\to 0}u^{-2}F(u)=\int\limits_0^T[\dot S(\theta^*, X_0(t))^2+$$

$$+\ddot S(\theta^*, X_0(t))(S(\theta^*, X_0(t))-b(X_0(t)))]\,dt=F''(0)>0.$$

Кроме того, функция $F(u)=G(\theta_u)-\min G(\theta)>0$ при всех $u\neq 0$, в силу единственности минимума $G(\cdot)$. Следовательно, существует такое $\varkappa>0$, что при всех $u\in(\alpha-\theta^*, \beta-\theta^*)$ $F(u)\geqslant\varkappa u^2$. Введем множество $H_0=\{\omega:\sup\limits_{0<t<T}|w(t)|<\varepsilon^{-1/2}\}$ и постоянную $\varepsilon_0=\inf\Big\{\varepsilon: B_1\varepsilon^{1/2}+$

$$+B_2\varepsilon<\frac{1}{2}\nu^2\varkappa\varepsilon^{-1}\Big\}.$$

Тогда при всех $\varepsilon<\varepsilon_0$ на этом множестве

$$\inf_{|u|>\nu}\frac{1}{\varepsilon}F(u, \varepsilon)\geqslant\inf_{|u|>\nu}\frac{1}{\varepsilon}F(u)-\frac{1}{2}\nu^2\varkappa\varepsilon^{-1}>$$

$$\geqslant\varkappa\nu^2\varepsilon^{-1}-\frac{1}{2}\varkappa\nu^2\varepsilon^{-1}=\frac{1}{2}\varkappa\nu^2\varepsilon^{-1}.$$

Далее, обозначим $\Delta S=S(\theta_u, X_\varepsilon(t))-S(\theta^*, X_\varepsilon(t))$, тогда

$$P_b^{(\varepsilon)}\{|\hat\theta_\varepsilon-\theta^*|\geqslant\nu\}\leqslant P\Bigg\{\sup_{|u|>\nu}\Bigg[\int\limits_0^T\Delta S\,dw-$$

$$-\frac{1}{2\varepsilon}F(u, \varepsilon)\Bigg]>0,\ H_0\Bigg\}+P\{|\hat\theta_\varepsilon-\theta^*|\geqslant\nu,\ \overline{H}_0\}\leqslant$$

$$\leqslant P\left\{\sup_{|u|>\nu}\int_0^T \Delta S dw > \frac{1}{2}\nu^2\varepsilon^{-1}\varkappa,\ H_0\right\} + P\{\overline{H}_0\}.$$

Для дополнения H_0 имеем оценку

$$P\{\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|w(t)| > \varepsilon^{-1/2}\} < 2\exp\left\{-\frac{\varepsilon^{-1}}{2T}\right\}. \tag{3.4}$$

Ниже мы воспользуемся леммами 2.1 и 2.3. Сначала запишем

$$P_b^{(\varepsilon)}\left\{\sup_{|u|>\nu}\int_0^T \Delta S dw > \frac{1}{2}\nu^2\varepsilon^{-1}\varkappa\right\} \leqslant$$

$$\leqslant P\left\{\sup_{\alpha-\theta^*<u<-\nu}\int_0^T \Delta S dw > \frac{1}{2}\nu^2\varepsilon^{-1}\varkappa\right\} +$$

$$+ P\left\{\sup_{\nu<u<\beta-\theta^*}\int_0^T \Delta S dw > \frac{1}{2}\nu^2\varepsilon^{-1}\varkappa\right\}.$$

Далее

$$P_b^{(\varepsilon)}\left\{\sup_{\nu<u<\beta-\theta^*}\int_0^T \Delta S dw > \frac{1}{2}\nu^2\varepsilon^{-1}\varkappa\right\} \leqslant$$

$$\leqslant P\left\{\sup_{\nu<u<\beta-\theta^*}\int_0^T [S(\theta^*+u, X_t) - S(\theta^*+\nu, X_t)]\, dw >\right.$$

$$\left. > \frac{1}{4}\varkappa\nu^2\varepsilon^{-1}\right\} + P\left\{\int_0^T [S(\theta^*, X_t) - S(\theta^*+\nu, X_t)]\, dw > \frac{1}{4}\varkappa\nu^2\varepsilon^{-1}\right\} \leqslant$$

$$\leqslant 8K^*\exp\left\{-\frac{\gamma^*\nu^2\varepsilon^{-1}\varkappa}{8(\beta-\theta^*-\nu)}\right\} + K^*\exp\left\{-\frac{\gamma^*}{4}\nu\varepsilon^{-1}\varkappa\right\}.$$

Аналогичное неравенство имеем и при $u \in (\alpha-\theta^*, -\nu)$. Объединяя полученные неравенства, приходим к соотношению

$$P_b^{(\varepsilon)}\{|\hat\theta_\varepsilon - \theta^*| > \nu\} \leqslant 2\exp\{-(2T\varepsilon)^{-1}\} +$$

$$+ 16K^*\exp\left\{-\frac{\gamma^*\nu^2\varepsilon^{-1}\varkappa}{8(\beta-\alpha)}\right\} + 2K^*\exp\left\{-\frac{\gamma^*}{4}\nu\varepsilon^{-1}\varkappa\right\},$$

справедливом при $\varepsilon < \varepsilon_0$. Из вида правой части этого неравенства следует, что найдутся такие постоянные $\bar\varepsilon_0$, C и c, что при всех $\varepsilon < \tilde\varepsilon_0$ справедливо неравенство (3.2).

Теорема 3.1. *Пусть выполнены условия* L, *функция* $S(\theta, x) \in M^4_{\theta,x}$ *и* $b(x) \in M^4_x$, *функция* $G(\theta)$ *имеет единственный минимум* $\theta^* \in (\alpha, \beta)$ *и* $\ddot G(\theta^*) > 0$, *тогда ОМП* $\hat\theta_\varepsilon$ *при* $\varepsilon < \varepsilon^*$ *допускает представление*

$$\widehat{\theta}_\varepsilon = \theta^* + \varepsilon \{\xi(\theta^*) + \psi \varepsilon^{1/2}\} \chi_{\{H\}} + \zeta \chi_{\{\overline{H}\}}, \tag{3.5}$$

где $\xi(\theta^*)$ — *гауссовская случайная величина,* $|\psi| < 1$, *а для случайной величины* ζ *и дополнения множества* H *справедливы оценки: при* $x \geqslant \nu$

$$P_b^{(\varepsilon)}\{|\zeta| > x\} \leqslant K_1 \exp\{-k_1 \varepsilon^{-\gamma_1}\},$$
$$P_b^{(\varepsilon)}\{\overline{H}\} \leqslant K_2 \exp\{-k_2 \varepsilon^{-\gamma_2}\}, \tag{3.6}$$

причем постоянные ε^*, K_i, k_i, γ_i *могут быть явно выписаны.*

Доказательство. Уравнение максимального правдоподобия (УМП)

$$\frac{d}{d\theta} L_\varepsilon(\theta, X_\varepsilon) = 0$$

запишем в виде

$$\varepsilon \int_0^T \dot S(\theta_u, X_\varepsilon)\, dw - \int_0^T \dot S(\theta_u, X_\varepsilon)[S(\theta_u, X_\varepsilon) - b(X_\varepsilon)]\, dt = 0.$$

Одно из решений этого уравнения и есть ОМП $\widehat{\theta}_\varepsilon = \theta^* + \widehat{u}_\varepsilon$.

Введем множество

$$H_1 = \{\omega : \sup_{|u| \geqslant \nu} Z_\varepsilon(u) < 1\},$$

вероятность дополнения которого оценена в лемме 3.1. Как и ранее, $\nu = \varepsilon^\delta$, где $\delta \in (0, 1/2)$.

Выясним сначала условия единственности решения УМП, а затем воспользуемся формулой Тейлора для неявно заданной функции $\widehat{u}_\varepsilon = u(\varepsilon)$, как это было сделано в работе [4]. Обозначим левую часть УМП через $R(u, \varepsilon)$.

Уравнение

$$R(u, \varepsilon) = 0, \quad u \in (-\nu, \nu) \tag{3.7}$$

будет иметь единственное решение, если

$$R(-\nu, \varepsilon) > 0, \quad R(\nu, \varepsilon) < 0,$$
$$\frac{\partial R(u, \varepsilon)}{\partial u} < -c, \tag{3.8}$$

где c — некоторая положительная постоянная. Ниже мы введем множество H_2, гарантирующее выполнение условий (3.8).

Имеем

$$\frac{\partial R(u, \varepsilon)}{\partial u} = \varepsilon \int_0^T \ddot S(\theta_u, X_\varepsilon)\, dw - \left\{ \int_0^T \ddot S(\theta_u, X_\varepsilon) \times \right.$$

$$\times [S(\theta_u, X_\varepsilon) - b(X_\varepsilon)]\, dt + \int_0^T \dot{S}(\theta_u, X_\varepsilon)^2\, dt \Big\}.$$

Выражение в фигурных скобках обозначим $F(u, \varepsilon)$. Очевидно $F(u, 0) = F(u)$.

Элементарные неравенства позволяют записать

$$|F(u, \varepsilon) - F(u, 0)| \leqslant \left| \int_0^T [\dot{S}(\theta_u, X_\varepsilon)^2 - \dot{S}(\theta_u, X_0)^2] dt \right| +$$

$$+ \left| \int_0^T (\ddot{S}(\theta_u, X_\varepsilon) \cdot [S(\theta_u, X_\varepsilon) - b(X_\varepsilon)] - \right.$$

$$\left. - \ddot{S}(\theta_u, X_0)[S(\theta_u, X_0) - b(X_0)]) dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^T |\dot{S}(\theta_u, X_\varepsilon) - \dot{S}(\theta_u, X_\varepsilon)| \cdot |\dot{S}(\theta_u, X_\varepsilon) + \dot{S}(\theta_u, X_0)|\, dt +$$

$$+ \int_0^T |\ddot{S}(\theta_u, X_\varepsilon) - \ddot{S}(\theta_u, X_0)| \cdot |S(\theta_u, X_\varepsilon) - b(X_\varepsilon)|\, dt +$$

$$+ \int_0^T |\ddot{S}(\theta_u, X_0)| (|S(\theta_u, X_\varepsilon) - S(\theta_u, X_0)| + |b(X_\varepsilon) - b(X_0)|) dt. \qquad (3.9)$$

Имеем

$$|\dot{S}(\theta_u, X_\varepsilon) - \dot{S}(\theta_u, X_0)| = |\dot{S}'(\theta_u, \tilde{X}_\varepsilon)| \times$$

$$\times |X_\varepsilon(t) - X_0(t)| \leqslant L(1 + |X_\varepsilon(t)|)\, \varepsilon e^{LT} \eta_T \leqslant D_1 \varepsilon \eta_T + D_2 \varepsilon^2 \eta_T^2.$$

Следовательно

$$\int_0^T |\dot{S}(\theta_u, X_\varepsilon) - \dot{S}(\theta_u, X_0)| \cdot |\dot{S}(\theta_u, X_\varepsilon) + \dot{S}(\theta_u, X_0)|\, dt \leqslant$$

$$\leqslant (D_1 T \varepsilon \eta_T + D_2 T \varepsilon^2 \eta_T^2)(D_3 + D_4 \varepsilon \eta_T).$$

Далее,, аналогично получаем

$$|\ddot{S}(\theta_u, X_\varepsilon) - \ddot{S}(\theta_u, X_0)| \leqslant D_5 \varepsilon \eta_T + D_6 \varepsilon^2 \eta_T^2$$

и, наконец,

$$|S(\theta_u, X_\varepsilon) - S(\theta_u, X_0)| + |b(X_\varepsilon) - b(X_0)| \leqslant 2L |X_\varepsilon(t) - X_0(t)|.$$

Подставляя полученные оценки в (3.9), приходим к неравенству

$$|F(u, \varepsilon) - F(u)| \leqslant \sum_{j=1}^{3} d_j \varepsilon^j \eta_T^j, \quad d_j > 0.$$

Далее, из гладкости функции $S(\theta, \cdot)$ следует неравенство

$$\sup_{|u|<\nu} |F(u) - I(\theta^*)| \leqslant d_4\nu, \quad F''(0) = I(\theta^*).$$

Введем множество

$$H_2 = \left\{ \omega : \begin{array}{l} \sup\limits_{|u|<\nu} \int\limits_0^T \ddot{S}(\theta_u, X_t)\, dw < \frac{1}{4} I(\theta^*)\, \varepsilon^{-1}, \\ \sup\limits_{0<t<T} |w(t)| \leqslant \varepsilon^{-1/2} \end{array} \right.$$

и постоянную

$$\varepsilon_1 = \inf\left\{ \varepsilon : \sum_{j=1}^{3} d_j \varepsilon^{j/2} + d_4 \varepsilon^{\delta} < \frac{1}{4} I(\theta^*) \right\}.$$

Тогда на множестве H_2 при $\varepsilon < \varepsilon_1$

$$\frac{\partial R(u, \varepsilon)}{\partial u} \leqslant -\frac{1}{2} I(\theta^*). \tag{3.10}$$

Введем еще множество

$$H_3 = \left\{ \omega : \int\limits_0^T \dot{S}(\theta^*, X_t)\, dw < \frac{\nu}{8} I(\theta^*)\, \varepsilon^{-1} \right\}$$

и заметим, что в силу $\dot{G}(\theta^*) = 0$, имеем

$$|F(0, \varepsilon)| = |F(0, \varepsilon) - \dot{G}(\theta^*)| \leqslant d_5\, \varepsilon \eta_T + d_6\, \varepsilon^2 \eta_T^2.$$

На множестве H_2 последнее выражение меньше $d_5 \varepsilon^{1/2} + d_6\, \varepsilon$. Следовательно, если ввести

$$\varepsilon_2 = \inf\left\{ \varepsilon : d_5\, \varepsilon^{1/2} + d_6 \varepsilon < \frac{\nu}{8} I(\theta^*) \right\}$$

и обозначить $\varepsilon^* = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, то при $\varepsilon < \varepsilon^*$

$$R(\nu, \varepsilon) = R(0, \varepsilon) + \int\limits_0^{\nu} \frac{\partial R}{\partial u}\, du < \frac{\nu}{4} I(\theta^*) - \frac{\nu}{2} I(\theta^*) = -\frac{\nu}{4} I(\theta^*).$$

Аналогично получаем $R(-\nu, \varepsilon) \geqslant \frac{\nu}{4} I(\theta^*)$. Тем самым, соотношения (3.8) получены на множестве $H^* = \bigcap\limits_{j=1}^{3} H_j$ и на H^* уравнение (3.7) имеет единственное решение $\hat{u}_\varepsilon = u(\varepsilon)$.

Уравнение (3.7) задает неявную функцию $u = u(\varepsilon)$. По правилу дифференцирования неявных функций выпишем первые два члена разложения. Заметим, что при $\varepsilon = 0$ в силу единственности минимума функции $G(\cdot)$ получаем $u(0) = 0$. Далее

$$\left.\frac{du}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = I(\theta^*)^{-1}\left\{\int_0^T \dot{S}(\theta^*, X_0)\,dw(t) - \right.$$

$$-\int_0^T \dot{S}'(\theta^*, X_0)[S(\theta^*, X_0) - b(X_0)] + \dot{S}(\theta^*, X_0)\times$$

$$\times[S'(\theta^*, X_0) - b'(X_0)])X_0^{(1)}(t)\,dt\} \equiv \xi(\theta^*),$$

$$dX_0^{(1)}(t) = b'(X_0(t))X_0^{(1)}(t)\,dt + dw(t),\ X_0^{(1)}(0) = 0. \tag{3.11}$$

Следовательно, на множестве H^*

$$u(\varepsilon) = \varepsilon\xi(\theta^*) + \frac{1}{2}\varepsilon^2 u''(\bar{\varepsilon}),\ \bar{\varepsilon}\in(0, \varepsilon),$$

где

$$u''(\varepsilon) = (R'_u)^{-3}\{R'_{u,\varepsilon}R'_\varepsilon R'_u - R'_{uu}(R'_\varepsilon)^2 - R'_u(R'_u)^2\}.$$

Вводим еще множество

$$H_4 = \{\omega : \sup_{|u|<\varepsilon}|u''(\tilde{\varepsilon})| \leqslant 2\varepsilon^{-1/2}\}.$$

Тем самым на $H = \bigcap_{j=1}^{4} H_j$ имеем представление $\hat{\theta}_\varepsilon = \theta^* + \varepsilon\xi(\theta^*) + \varepsilon^{1/2}\psi$, где $|\psi| \leqslant 1$.

Осталось оценить вероятность дополнения множества $\dot{H}$. Вероятность дополнения H_1 оценена в лемме 3.1. Вероятность первого неравенства в определении H_2 оценивается с помощью леммы 2.3, а второго — оценивается с помощью (3.4). Вероятность дополнения H_3 также оценивается по лемме 2.3, дополнения H_4 — аналогично тому, как это было сделано в работе [4]

§ 4. Сходимость функций распределения и моментов

Разложение ОМП (3.5) позволяет получить первые члены разложения ОМП. Действительно, согласно теореме 3.1

$$P_b^{(\varepsilon)}\{\varepsilon^{-1}(\hat{\theta}_\varepsilon - \theta^*) < x\} = P\{\varepsilon^{-1}(\hat{\theta}_\varepsilon - \theta^*) < x,\ H\} +$$

$$+ P\{\varepsilon^{-1}(\hat{\theta}_\varepsilon - \theta^*) < x,\ \bar{H}\} \leqslant P\{\xi(\theta^*) - \varepsilon^{1/2}\psi < x,\ H\} +$$

$$+ P\{\bar{H}\} \leqslant P\{\xi(\theta^*) < x + \sqrt{\varepsilon}\} + P\{\bar{H}\} \leqslant$$

$$\leqslant \Phi_\xi(x + \sqrt{\varepsilon}) + K_2\exp\{-k_2\varepsilon^{-\gamma_2}\} \to \Phi_\xi(x),$$

где $\Phi_\xi(\cdot)$ — функция распределения гауссовской случайной величины $\xi(\theta^*)$, определенной в (3.11).

Аналогично получаем и оценку снизу для этой вероятности:

$$P_b^{(\varepsilon)}\{\varepsilon^{-1}(\hat{\theta}_\varepsilon - \theta^*) < x\} \geqslant P\{\xi(\theta^*) + \sqrt{\varepsilon}\,\psi < x,\ H\} \geqslant$$

$$\geqslant P\{\xi(\theta^*) < x - \sqrt{\varepsilon}\} - P\{\bar{H}\} \geqslant$$

$$\geqslant \Phi_{\xi}(x-\sqrt{\varepsilon})-K_2\exp\{-k_2\varepsilon^{-\gamma_2}\}\to\Phi_{\xi}(x)$$

при $\varepsilon\to 0$.

Тем самым доказана

Теорема 4.2. *Пусть выполнены условия теоремы 3.1, тогда при $\varepsilon<\varepsilon^*$ имеют место неравенства*

$$\Phi_{\xi}(x-\sqrt{\varepsilon})-K_2\exp\{-k_2\varepsilon^{-\gamma_2}\}\leqslant P_b^{(\varepsilon)}\{\varepsilon^{-1}(\hat{\theta}_\varepsilon-\theta^*)<x\}\leqslant$$
$$\leqslant\Phi_{\xi}(x+\sqrt{\varepsilon})+K_2\exp\{-k_2\varepsilon^{-\gamma_2}\}.$$

Из этой теоремы, в частности, следует асимптотическая нормальность ОМП.

Докажем сходимость моментов: для любого $p\geqslant 1$

$$E_b|\varepsilon^{-1}(\hat{\theta}_\varepsilon-\theta^*)|^p=E_b|\varepsilon^{-1}(\hat{\theta}_\varepsilon-\theta^*)|^p\chi_{\{H\}}+$$
$$+E_b|\varepsilon^{-1}(\hat{\theta}_\varepsilon-\theta^*)|^p\chi_{\{\bar{H}\}}=E|\xi(\theta^*)+\varepsilon^{1/2}\psi|^p\chi_{\{H\}}+$$
$$+E\left|\frac{\zeta}{\varepsilon}\right|^p\chi_{\{\bar{H}\}}\leqslant M_p+\int\limits_{\bar{H}}\left|\frac{\zeta}{\varepsilon}\right|^p dP_b^{(\varepsilon)},\ (M_p=E|\xi(\theta^*)|^p+o(\varepsilon^{1/2})).$$

Для последнего слагаемого имеют место соотношения

$$\int\limits_{\bar{H}}|\zeta\varepsilon^{-1}|^p\,dP_b^{(\varepsilon)}=\int\limits_{|\zeta|<\nu,\,\bar{H}}|\zeta\varepsilon^{-1}|^p\,dP_b^{(\varepsilon)}+$$
$$+\int\limits_{|\zeta|>\nu,\,\bar{H}}|\zeta\varepsilon^{-1}|^p\,dP_b^{(\varepsilon)}\leqslant|\nu\varepsilon^{-1}|^p\cdot P(\bar{H})+\left(\frac{\beta-\alpha}{\varepsilon}\right)^p\times$$
$$\times P\{|\zeta|>x,\ \bar{H}\}\leqslant|\nu\varepsilon^{-1}|^p k_2\exp\{-k_2\varepsilon^{-\gamma_2}\}+\left|\frac{\beta-\alpha}{\varepsilon}\right|k_1\exp\{-k_1\varepsilon^{-\gamma_1}\}.$$

Аналогично получаем и оценку снизу для этого интеграла. Объединяя их, приходим к неравенствам, из которых следует сходимость

$$\lim_{\varepsilon\to 0}E_b|\varepsilon^{-1}(\hat{\theta}_\varepsilon-\theta^*)|^p=E|\xi(\theta^*)|^p.$$

§ 5. Заключительные замечания

Заметим, что если наблюдатель выбрал такое семейство $\{S(\theta,x),\ \theta\in\Theta\}$, что при некотором θ_0 имеем $S(\theta_0,x)=b(x)$, то $\theta^*=\theta_0$ и получаем обычную задачу оценки параметра диффузионного процесса (см., например, [3], теорема 3.4.3).

Специально подчеркнем, что основной результат — теорема 3.1 носит «не асимптотический» характер. Все постоянные, случайные величины и множества, входящие в формулировку, могут быть явно вычислены или выписаны.

Представляет интерес описание свойств байесовских оценок и ОМП, когда функция $G(\theta)$ имеет несколько совпадающих по величине минимумов. ОМП, по-видимому, с разными вероятностями будет сходится к каждому из них.

Не представляет принципиальных трудностей получение первых $k>1$ членов в разложении ОМП по степеням ε. Справедлива

Теорема. 5.1. *Пусть функция* $S(\theta, x)$ *имеет* $k+3$ *ограниченных производных по* θ *и* x, *а функция* $b(x)-k+3$ *ограниченных производных по* x, *и функция* $G(\theta)$ *имеет единственный минимум в точке* $\theta^* \in (\alpha, \beta)$, *причем* $\ddot{G}(\theta^*)>0$, *тогда для ОМП справедливо представление*

$$\hat{\theta}_\varepsilon = \theta^* + \left\{ \sum_{j=1}^{k} \varepsilon^j \psi_j + \varepsilon^{k+1/2} \psi_{k+1} \right\} \chi_{\{A\}} + \zeta \chi_{\{\bar{A}\}},$$

а для ζ *и* A *имеют место соотношения* (3.6).

Доказательство ничего нового по сравнению с [4] и приведенным здесь доказательством теоремы 3.1 не содержит, поэтому мы его опускаем.

Условия теоремы 3.1 могут быть ослаблены в следующую сторону. Вместо условия (2.1) в определении класса $M^l_{\theta,x}$ можно в правой части писать $L_m(1+|x|^m)$, $m \geqslant 1$. В доказательстве это отразится на ухудшении скорости убывания в показателях экспонент (3.6).

Пример. Пусть имеется возможность реализовывать только линейные системы вида

$$dX_\varepsilon(t) = \theta X_\varepsilon(t)\,dt + \varepsilon dw(t), \quad X_\varepsilon(0) = x_0 \neq 0, \quad 0 < t \leqslant T,$$

а исходное уравнение

$$dX_\varepsilon(t) = \sin(X_\varepsilon(t))\,dt + \varepsilon dw(t), \quad X_\varepsilon(0) = x_0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

тогда ОМП $\hat{\theta}_\varepsilon$ „выбирает" при $\varepsilon \to 0$ значение

$$\theta^* = \frac{1}{2}\left(X_0(T)^2 - x_0^2\right)\left(\int_0^T X_0(t)^2\,dt\right)^{-1},$$

где $X_0(t)$ — решение уравнения

$$\frac{dX_0(t)}{dt} = \sin X_0(t), \quad X_0(0) = x_0.$$

Ереванский государственный
университет

Поступила 28. III. 1986

ՅՈՒ. Ա. ԿՈՒՏՈՅԱՆՑ. Փոքր աղմուկով դինամիկական համակարգերի նույնականացման մեկ խնդրի մասին (*ամփոփում*)

Դիտարկվում է փոքր դիֆուզիայով դիֆուզիոն պրոցեսի համար մոդելի ընտրման խնդիրը։ Մաքսիմալ ճշմարտանմանության մեթոդը թույլ է տալիս ընտրել շեղման գործակցով պարամետրական մոդել, որը L_2*-ի իմաստով մոտ է սկզբնական մոդելի շեղման գործակցին։ Ապացուցվում է մաքսիմալ ճշմարտանմանության գնահատականի ունակայունությունը, ասիմպտոտիկ նորմալությունը և մոմենտների զուգամիտությունը, երբ դիֆուզիայի գործակիցը ձգտում է զրոյի։*

Y. A. KUTOYANTS. *On a problem of dynamical systems with small noise identification* (summary)

The problem of choice of a model for a diffusion process with small diffusion coefficient is considered. The maximum likelihood method allows to choose a parametric model with trend coefficient which is close to the trend coefficient of the original process in L_2-sence. The consistency and asymptotic normality of the maximum likelihood estimate are proved and the convergence of the moments is established as the diffusion coefficient tends to zero.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Р. Ш. Липцер, А. Н. Ширяев.* Статистика случайных процессов, М., «Наука», 1974.
2. *Yu. A. Kutoyants.* Parameter estimation for stochastic process, Berlin, Heldermann 1984, 207 p.
3. *Yu. A. Kutoyants.* On nonparametric estimation of trend coefficients in a diffusion, process, in „Statistics and control of stochastic process" Ed.N. V. Krylov, R. Sh. Liptser, A. A. Novikov, New York, Optimization software, 1985.
4. *Ю. А. Кутоянц.* Разложение оценки максимального правдоподобия по степеням диффузии, Теор. вероят. и ее примен., 29, № 3, 1984, 452—463.
5. *М. В. Бурнашев.* Асимптотическое разложение оценок параметра сигнала в белом гауссовском шуме, Матем. сб., 104, № 2, 1977, 179—206.
6. *I. W. Mckeague.* Estimation for diffussion processes under misspecified models. J. Appl. Prob., 21, 1984, 511—520.
7. *М. В. Бурнашев.* Об оценке максимального правдоподобия параметра сигнала в белом гауссовском шуме, Проблемы передачи информации, 4, 1975, 55—69.