ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XXIII, № 3, 1988 Математика

УДК 517.51

Г. М. ГУБРЕЕВ

БАЗИСНОСТЬ СЕМЕЙСТВ ФУНКЦИЙ ТИПА МИТТАГ—ЛЕФФЛЕРА, ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДЖРБАШЯНА И ВЕСОВЫЕ ОЦЕНКИ ИНТЕГРАЛОВ ТИПА КОШИ

§ 0. Введение

1. Настоящая работа посвящена выяснению необходимых и достаточных условий, при которых семейства функций

$$\{t^{\alpha-1} E_\rho (e^{i\frac{\pi}{2\rho}} \lambda_k t^{\frac{1}{\rho}};\ \alpha) : \lambda_k \in \Lambda\},\ \rho \geqslant \frac{1}{2} \tag{0.1}$$

образуют безусловные базисы пространства $L_2\ (0,\ 1)$. Здесь через $E_\rho\ (z;\ \alpha)$ обозначена целая функция типа Миттаг—Леффлера, которая определяется рядом [1]:

$$E_\rho\ (z;\ \alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma\ (\alpha + n\rho^{-1})}.$$

Проблема разложения функций в биортогональные ряды по системам типа Миттаг—Леффлера имеет давнюю историю. В случае $\rho=\alpha=1$,когда функции семейства (0.1) совпадают с экспонентами, первый крупный вклад в решение этой проблемы был сделан Н. Винером [2] и Н. Винером—Р. Пэли [3]. Подробное изложение истории вопроса можно найти в работе ленинградских математиков Н. К. Никольского, Б. С. Павлова и С. В. Хрущева [4], в которой было получено полное решение задачи о безусловных базисах из экспонент, а также исследованы свойства таких базисов. В общем случае исследование базисных свойств семейств (0.1) было начато М. М. Джрбашяном и его учениками. Еще в работе [5] М. М. Джрбашяном и А. Б. Нерсесяном был построен вариант дискретного аналога теории М. М. Джрбашяна [1], основанный на теоремах равносходимости рядов по системе (0.1) с обычными рядами Фурье функций из класса $L_1\ (0,\ l)$. С другой стороны, в работе М. М. Джрбашяна [6] указывалось на необходимость решения задачи о безусловной базисности семейств функций типа Миттаг—Леффлера (а также более общих семейств) в пространстве L_2 на конечном интервале. Для частных значений параметров ρ, α эта задача рассматривалась в работах С. Г. Рафаеляна [7—8] и автора [9].

Методы настоящей статьи примыкают к методам работы [4] и являются их развитием. При этом, на протяжении всей статьи систематически используются многие факты теории М. М. Джрбашяна [1]. Как и в случае экспонент, в наших построениях важную роль играет известное условие Макенхаупта, обеспечивающее ограниченность сингулярного интеграла типа Коши в весовых пространствах. Отметим, что впервые условие Макенхаупта в проблеме базисности экспонент появилось в работе Б. С. Павлова [10], а операторные соображения, лежащие в основе ее решения, были высказаны еще в [11]. В этой статье решение задачи о безусловной базисности систем (0.1) также получено в рамках спектрального анализа одного класса неограниченных несамосопряженных операторов. Речь идет об операторах A, обратные к которым задаются посредством формул:

$$(A^{-1} h)(t) = e^{i\frac{\pi}{2\rho}} \Gamma^{-1}\left(\frac{1}{\rho}\right) \int_0^t (t-s)^{\frac{1}{\rho}-1} h(s)\, ds + (h, x)\, y, \quad \rho > \frac{1}{2}, \tag{0.2}$$

где x — произвольная функция из $L_2(0, 1)$, $y(t) = \Gamma^{-1}(\alpha)\, t^{\alpha-1} \left(\alpha > \frac{1}{2}\right)$ а скобки обозначают скалярное произведение в $L_2(0,1)$. Специальный выбор функции y обеспечивает то обстоятельство, что собственные векторы оператора A совпадают с функциями семейств вида (0.1).

Спектральные свойства конечномерных возмущений вольтерровых операторов изучались в цикле работ А. П. Хромова (см. [12] и библиографию там). Одна из основных задач, которые исследовались этим автором, состоит в описании класса функций, локально изображающихся равномерно сходящимися рядами по системе собственных векторов оператора. Отметим, что излагаемый в этой статье метод исследования операторов вида (0.2) основан на интегральных оценках норм резольвент (§ 1) и отличается от методов А. П. Хромова. Применяемые здесь операторные рассуждения позволяют не только решить задачу о безусловной базисности семейств (0.1), но и переосмыслить некоторые факты теории интегральных преобразований М. М. Джрбашяна [1] с операторной точки зрения, что дает возможность получить дальнейшие обобщения этой теории. В случае $\rho = 1$ предварительные результаты в этом направлении приведены в заметке [13], а исследованию общего случая автор надеется посвятить отдельную публикацию.

Для упрощения выкладок в работе рассматривается случай, когда последовательность Λ не имеет кратных элементов. Однако, сформулированные здесь теоремы о базисности семейств (0.1) остаются в силе и тогда, когда кратности $\lambda_k \in \Lambda$ ограничены в совокупности.

Работа состоит из четырех параграфов, содержание которых ясно из их названий. Результаты этой статьи частично ($\rho = 1$) анонсированы в [9].

Считаю своим приятным долгом выразить глубокую признательность академику АН Армянской ССР М. М. Джрбашяну и члену-корреспонденту АН Украинской ССР М. Г. Крейну за внимание к работе и поддержку.

2. Как уже отмечалось, на протяжении всей статьи мы существенно опираемся на многие факты теории М. М. Джрбашяна. Поэтому, для удобства читателя, сформулируем здесь ряд применяемых в дальнейшем теорем, тем более, что в этой работе построен дискретный аналог некоторых результатов этой теории. Как и в книге [1], запись $(\rho, \mu) \in U$ будет означать, что совокупность параметров ρ, μ удовлетворяет неравенствам $\rho \geqslant \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} < \mu < \frac{1}{2} + \frac{1}{\rho}$, а через $L_{2,\mu}(0, \infty)$ будем обозначать пространство $L_2(0, \infty)$ с мерой $|y|^{2(\mu-1)}\, dy$. Для сходимости элементов

последовательности $\{f_n\}$ в классах $L_{2,\mu}(0, \infty)$ примем обозначение: $f(y) = \underset{}{\overset{(\mu)}{l.i.m.}} f_n(y)$.

Теорема А. [1, с. 207]. *Пусть* $(\rho, \mu) \in U$ *и* $\frac{\pi}{2\rho} \leqslant \varphi \leqslant 2\pi - \frac{\pi}{2\rho}$. *Если* $f(x)$ — *произвольная функция из класса* $L_2(0, \infty)$, *то*

1. *Формула*

$$g_\varphi(y) = y^{1-\mu} \frac{d}{dy} \left\{ y^\mu \int_0^\infty E_\rho(e^{i\varphi} y^{\frac{1}{\rho}} x^{\frac{1}{\rho}}; \mu+1) x^{\mu-1} f(x)\, dx \right\}, \quad y > 0$$

почти всюду на $(0, \infty)$ *определяет функцию* $g_\varphi \in L_{2,\mu}(0, \infty)$, *причем*

$$\int_0^\infty |g_\varphi(y)|^2 y^{2(\mu-1)}\, dy \leqslant M_\mu^2 \int_0^\infty |f(x)|^2\, dx, \quad \frac{\pi}{2\rho} \leqslant \varphi \leqslant 2\pi - \frac{\pi}{2\rho}.$$

2. *Если обозначить*

$$g_\varphi(y, \sigma) = \int_0^\sigma E_\rho(e^{i\varphi} y^{\frac{1}{\rho}} x^{\frac{1}{\rho}}; \mu) x^{\mu-1} f(x)\, dx, \quad 0 < \sigma < \infty,$$

то $g_\varphi(y) = \underset{\sigma\to\infty}{\overset{(\mu)}{l.i.m.}}\, g_\varphi(y, \sigma)$.

3. *Если* $\rho > \frac{1}{2}$, *то для значений* $\frac{\pi}{2\rho} < \varphi < 2\pi - \frac{\pi}{2\rho}$, $0 < y < \infty$ *функция* $g_\varphi(y)$ *представима в виде*

$$g_\varphi(y) = \int_0^\infty E_\rho(e^{i\varphi} y^{\frac{1}{\rho}} x^{\frac{1}{\rho}}; \mu) x^{\mu-1} f(x)\, dx,$$

причем интеграл справа равномерно и абсолютно сходится в любой ограниченной и замкнутой части указанной области.

4. *Если* $\rho > \frac{1}{2}$, *то функция*

$$F(z) = \int_0^\infty E_\rho(z x^{\frac{1}{\rho}}; \mu) x^{\mu-1} f(x)\, dx$$

голоморфна в области $\frac{\pi}{2\rho} < |\arg z| \leqslant \pi$, $0 < |z| < \infty$ *и удовлетворяет условию*

$$\int_0^\infty |F(re^{i\varphi})|^2 r^\omega\, dr \leqslant M_\mu^2 \int_0^\infty |f(x)|^2\, dx, \quad \omega = 2\mu\rho - \rho - 1$$

для всех $\frac{\pi}{2\rho} < \varphi < 2\pi - \frac{\pi}{2\rho}$.

В следующей теореме дается формула обращения взвешенного преобразования Фурье с помощью ядер типа Миттаг—Леффлера.

Теорема В. [1, с. 219]. *Пусть* $(\rho, \mu) \in U$ *и* $g(y)$ — *произвольная функция из класса* $L_{2,\mu}(0, \infty)$. *Обозначим*

$$f(x, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}} \int_0^{\sigma} e^{-ixy} g(y) y^{\mu-1} dy, \quad \sigma > 0.$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

1. *Существует функция* $f(x)$ *из класса* $L_2(-\infty, \infty)$ *такая, что*

$$f(x) = \underset{\sigma\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\, f(x, \sigma), \quad -\infty < x < \infty.$$

Обратно, функции

$$g(y, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}} \int_{-\sigma}^{\sigma} E_\rho\left((ix)^{\frac{1}{\rho}} y^{\frac{1}{\rho}}; \mu\right) (ix)^{\mu-1} f(x)\, dx$$

при $\sigma \to +\infty$ *сходятся к функции* $g(y)$ *в смысле:* $g(y) = \underset{\sigma\to\infty}{\overset{(\mu)}{\mathrm{l.i.m.}}}\, g(y, \sigma)$

2. *Функции* $g(y)$ *и* $f(x)$ *связаны формулами*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}} \frac{d}{dx} \int_0^{\infty} \frac{e^{-ixy} - 1}{-iy} g(y) y^{\mu-1} dy, \quad -\infty < x < \infty,$$

$$g(y) = \frac{y^{1-\mu}}{\sqrt{2\pi\rho}} \frac{d}{dy} \left\{ y^{\mu} \int_{-\infty}^{+\infty} E_\rho\left((ix)^{\frac{1}{\rho}} y^{\frac{1}{\rho}}; \mu + 1\right) (ix)^{\mu-1} f(x)\, dx \right\}, \quad y > 0,$$

которые имеют место почти всюду на соответствующих интервалах.

Прежде чем сформулировать следующий результат, введем необходимые обозначения и определения. Пусть $\rho \geqslant \frac{1}{2}$ — произвольное, но фиксированное число, $[2\rho]$ — целая часть 2ρ, а натуральное число x удовлетворяет условию $x \geqslant [2\rho] - 1$. Пусть совокупность чисел $\{v_0, v_1, \cdots, v_{x+1}\}$. удовлетворяет следующим условиям:

$$-\pi < v_0 < v_1 < \cdots < v_x \leqslant \pi < v_{x+1} + 2\pi, \quad \max_{0 \leqslant k \leqslant x} \{v_{k+1} - v_k\} = \frac{\pi}{\rho},$$

Из этой совокупности чисел образуем последовательность пар

$$\{(v_0, v_1), (v_1, v_2), \cdots, (v_x, v_{x+1})\}, \tag{0.3}$$

а затем, сохраняя порядок их взаимного следования, выделим из (0.3) все те пары $\{(v_{r_k}, v_{r_k+1})\}_0^p$, для которых выполняется равенство

$$v_{r_k+1} - v_{r_k} = \frac{\pi}{\rho} \quad (k = 0, 1, \cdots, p \leqslant x).$$

Обозначим еще

$$\theta_k = \frac{1}{2} \{v_{r_k} + v_{r_{k+1}}\}, \quad k = 0, 1, \cdots, p.$$

Наконец, полагая $\omega \in (-1, 1)$ и $\sigma_k \geqslant 0$ $(k=0, 1, \cdots, p)$ с совокупностью чисел $\{v_0, v_1, \cdots, v_{x+1}\}$ ассоциируем класс $W_\sigma^p(\omega; \{v_k\}; \{\sigma_k\})$ целых фукнций $f(z)$ порядка ρ и нормального типа $\leqslant \sigma$, удовлетворяющих следующим условиям:

$$\int\limits_0^\infty |f(re^{iv_k})|^2 r^\omega dr < \infty, \; k=0, 1, \cdots, x; \; h(-\theta_k; f) \leqslant \sigma_k \leqslant \sigma, \; k=0, 1, \cdots, p$$

где $h(\theta; f)$ — индикатор функции f. Следующая теорема содержит в себе классическую теорему Винера—Пэли в том случае, когда $\rho=1$, $\omega=0$, $v_0=0$, $v_1=\pi$.

Теорема C. [1, с. 366]. *Класс $W_\sigma^p(\omega; \{v_k\}; \{\sigma_k\})$ совпадает с множеством функций $f(z)$, допускающих представление*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{p} \int\limits_0^{\sigma_k} E_\rho(e^{i\theta_k} z\tau^{\frac{1}{\rho}}; \mu)\, \varphi_k(\tau)\, \tau^{\mu-1}\, d\tau,$$

где $\mu = \dfrac{\omega+\rho+1}{2\rho}$ *и* $\varphi_k \in L_2(0, \sigma_k)$ $(k=0, 1, \cdots, p)$. *Функции* $\varphi_k(\tau)$ *единственным образом почти всюду определяются из формул*

$$\frac{i}{\sqrt{2\pi\rho}}\left\{e^{-i\frac{\pi}{2}\mu}\Phi_{r_{k+1}}(-\tau) - e^{i\frac{\pi}{2}\mu}\Phi_{r_k}(\tau)\right\} = \begin{cases} \varphi_k(\tau), & \tau \in (0, \sigma_k) \\ 0, & \tau \in (\sigma_k, \infty), \end{cases}$$

где почти всюду на полуоси

$$\Phi_k(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{d\tau} \int\limits_0^\infty f(e^{-iv_k} t^{\frac{1}{\rho}}) \frac{e^{-i\tau t}-1}{-it} t^{\mu-1} dt, \; k=0, 1, \cdots, x.$$

Следующий результат тесно связан с предыдущей теоремой. Обозначим через $A_\sigma^2\left(\omega; \pm\dfrac{\pi}{2\rho}\right)$ класс целых функций $f(z)$ порядка $\rho \geqslant \dfrac{1}{2}$ и типа $\leqslant \sigma$, удовлетворяющих условию

$$\int\limits^\infty |f(re^{-iv})|^2 r^\omega dr < \infty, \; \frac{\pi}{2\rho} \leqslant |v| \leqslant \pi,$$

где $\omega \in (-1, 1)$ — заданное число. Имеет место

Теорема D. [1, с. 376]. *Класс $A_\sigma^2\left(\omega; \pm\dfrac{\pi}{2\rho}\right)$ совпадает с множеством функций $f(z)$, допускающих представление*

$$f(z) = \int\limits_0^\sigma E_\rho(z\tau^{\frac{1}{\rho}}; \mu)\, \varphi(\tau)\, \tau^{\mu-1} d\tau,$$

где $\mu = \dfrac{\omega+\rho+1}{2\rho}$, $\varphi \in L_2(0, \sigma)$. *Функция $\varphi(\tau)$ единственна и почти всюду определяется формулой*

$$\frac{i}{2\pi\rho}\left\{ e^{-i\frac{\pi}{2}\mu}\frac{d}{d\tau}\int_0^\infty f(e^{-i\frac{\pi}{2\rho}}v^{\frac{1}{\rho}})\frac{e^{i\tau v}-1}{iv}v^{\mu-1}dv-\right.$$

$$\left.-e^{i\frac{\pi}{2}\mu}\frac{d}{d\tau}\int_0^\infty f(e^{i\frac{\pi}{2\rho}}v^{\frac{1}{\rho}})\frac{e^{-i\tau v}-1}{-iv}v^{\mu-1}dv\right\}=\begin{cases}\varphi(\tau), & \tau\in(0,\sigma)\\ 0, & \tau\in(\sigma,\infty).\end{cases}$$

§ 1. Интегральные оценки норм резольвент на правильной системе лучей

Если ввести обозначение

$$(Bf)(t)=e^{i\frac{\pi}{2\rho}}\Gamma^{-1}\left(\frac{1}{\rho}\right)\int_0^t(t-s)^{\frac{1}{\rho}-1}f(s)\,ds,\ f\in L_2(0,1),$$

то резольвента оператора A запишется в виде

$$(A-\lambda I)^{-1}h=B(I-\lambda B)^{-1}h+y_\lambda((I-\lambda B)^{-1}h,\ x)\varphi^{-1}(\lambda),$$

где $y_\lambda=(I-\lambda B)^{-1}y$, а целая функция $\varphi(\lambda)$ определяется равенством:

$$\varphi(\lambda)=1-\lambda((I-\lambda B)^{-1}y,\ x).$$

Функция $y_\lambda(t)$, являясь решением интегрального уравнения

$$y_\lambda(t)=\Gamma^{-1}(\alpha)t^{\alpha-1}+e^{i\frac{\pi}{2\rho}}\Gamma^{-1}\left(\frac{1}{\rho}\right)\lambda\int_0^t(t-s)^{\frac{1}{\rho}-1}y_\lambda(s)\,ds,\ \alpha>\frac{1}{2},\ \rho>0,$$

вычисляется по формуле [1, с. 123]:

$$y_\lambda(t)=\Gamma^{-1}(\alpha)t^{\alpha-1}+e^{i\frac{\pi}{2\rho}}\Gamma^{-1}(\alpha)\lambda\int_0^t(t-s)^{\frac{1}{\rho}-1}E_\rho\left(e^{i\frac{\pi}{2\rho}}\lambda(t-s)^{\frac{1}{\rho}};\right.$$

$$\left.\frac{1}{\rho}\right)s^{\alpha-1}ds=t^{\alpha-1}E_\rho(e^{i\frac{\pi}{2\rho}}\lambda t^{\frac{1}{\rho}};\ \alpha).$$

Таким образом, спектр оператора A совпадает с множеством Λ корней функции

$$\varphi(\lambda)=1-\lambda\int_0^1 t^{\alpha-1}E_\rho(e^{i\frac{\pi}{2\rho}}\lambda t^{\frac{1}{\rho}};\ \alpha)\,\overline{x(t)}\,dt,$$

а соответствующие собственные векторы имеют вид

$$y_{\lambda_k}(t)=t^{\alpha-1}E_\rho(e^{i\frac{\pi}{2\rho}}\lambda_k t^{\frac{1}{\rho}};\ \alpha),\ \lambda_k\in\Lambda.$$

В дальнейшем часто используется равенство

$$((I-\lambda B)^{-1}(I-\mu B)^{-1}y,\ x)=(\varphi(\lambda)-\varphi(\mu))(\mu-\lambda)^{-1},\ \lambda,\mu\in C,\qquad(1.1)$$

которое легко вытекает из соотношения Гильберта для резольвент. Оператор A изучается в предположении $\rho \geqslant \frac{1}{2}$ и $\frac{1}{2} < \alpha < \frac{1}{2} + \frac{1}{\rho}$. В работе будет доказано, что ограничение на параметр α появляется естественным образом в задаче о базисности собственных функций оператора A (§ 4). Для значений $\rho > \frac{1}{2}$ через γ_ρ обозначим угол с вершиной в начале координат, одна сторона которого совпадает с положительным лучом, а аргументы точек второй стороны равны $-\frac{\pi}{\rho}$; при $\rho = \frac{1}{2}$ под контуром γ_ρ понимаем положительный луч. Введем в рассмотрение контур Γ_ρ, который совпадает с γ_ρ для $\rho \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, а при $\rho > 1$ получается из γ_ρ присоединением n лучей, исходящих из начала координат и лежащих в дополнительном угле раствора $2\pi - \frac{\pi}{\rho}$. При этом должно выполняться условие: каждый из $n+1$ углов, на которые разбивается дополнительный угол, имеет раствор $< \frac{\pi}{\rho}$. Например, можно считать, что $n = [2\rho] - 1$ и, стало быть, контур $\Gamma_\rho (\rho > 1)$ в этом случае состоит из $[2\rho] + 1$ лучей. Условимся угол в контуре γ_ρ называть главным углом. Далее, будем говорить, что функция $|\lambda|^{-\omega} |\varphi(\lambda)|^2$ $(\omega = \rho + 1 - 2\rho\alpha)$ удовлетворяет $A^2_{\Gamma_\rho}$-условию, если

$$\sup_{z \in \Gamma_\rho} \sup_{r > 0} \left\{ r^{-1} \int_{B(z, r) \cap \Gamma_\rho} |\lambda|^{-\omega} |\varphi(\lambda)|^2 |d\lambda| \cdot r^{-1} \int_{B(z, r) \cap \Gamma_\rho} |\lambda|^{\omega} |\varphi(\lambda)|^{-2} |d\lambda| \right\} < \infty, \qquad (A^2_{\Gamma_\rho})$$

где $B(z, r)$ обозначает круг радиуса r с центром в точке z. Отметим, что при $\rho = 1$ это условие совпадает с A^2-условием Макенхаупта [14, с. 253]. Все эти определения и обозначения мы сохраним на протяжении всей статьи. В формулируемой ниже теореме раскрывается операторный смысл условия.

Теорема 1.1. *Пусть $\rho > \frac{1}{2}$ и $\frac{1}{2} < \alpha < \frac{1}{2} + \frac{1}{\rho}$. Тогда следующие требования эквивалентны:*

1) *Для всех $h \in L_2(0, 1)$ выполнена оценка*

$$\int_{\Gamma_\rho} |\lambda|^{\omega} \left| \frac{((I - \lambda B)^{-1} h, x)}{\varphi(\lambda)} \right|^2 |d\lambda| \leqslant M(\rho, \alpha) \|h\|^2. \qquad (1.2)$$

2) *Функция $|\lambda|^{-\omega} |\varphi(\lambda)|^2$ удовлетворяет $A^2_{\Gamma_\rho}$-условию, $\omega = \rho + 1 - 2\rho\alpha$.*

Доказательство. Рассмотрим случай $\rho > 1$, когда контур Γ_ρ устроен более сложно. Обозначим через Q угол, образованный двумя любыми лучами контура Γ_ρ и для любой функции $f \in L_2(Q)$ рассмотрим интеграл

$$h(t) = \int_{Q} t^{\alpha-1} E_\rho (e^{i\frac{\pi}{2\rho}} \lambda t^{\frac{1}{\rho}}; \alpha) |\lambda|^{-\frac{\omega}{2}} f(\lambda)\, d\lambda,\ t \in [0, 1], \tag{1.3}$$

причем направление обхода контура Q безразлично. Покажем, что $h \in L_2(0, 1)$, а интеграл (1.3) сходится в метрике пространства $L_2(0, 1)$. Для этого перепишем $h(t)$ в виде

$$h(t) = e^{i\varphi} \int_0^\infty t^{\alpha-1} E_\rho (e^{i\left(\frac{\pi}{2\rho}+\varphi\right)} rt^{\frac{1}{\rho}}; \alpha)\, r^{-\frac{\omega}{2}} f(re^{i\varphi})\, dr -$$

$$- e^{i\psi} \int_0^\infty t^{\alpha-1} E_\rho (e^{i\left(\frac{\pi}{2\rho}+\psi\right)} rt^{\frac{1}{\rho}}; \alpha)\, r^{-\frac{\omega}{2}} f(re^{i\psi})\, dr,$$

где $\varphi, \psi \in \left[0, 2\pi - \frac{\pi}{\rho}\right]$. После замены $r = u^{1/\rho}$ найдем

$$h(t) = e^{i\varphi} \rho^{-1} \int_0^\infty t^{\alpha-1} E_\rho (e^{i\varphi_1} u^{1/\rho} t^{1/\rho}; \alpha)\, u^{\alpha-1} u^{\gamma} f(u^{1/\rho} e^{i\varphi})\, du -$$

$$- e^{i\psi} \rho^{-1} \int_0^\infty t^{\alpha-1} E_\rho (e^{i\psi_1} u^{1/\rho} t^{1/\rho}; \alpha)\, u^{\alpha-1} u^{\gamma} f(u^{1/\rho} e^{i\psi})\, du,\ \gamma = \frac{1-\rho}{2\rho},$$

причем $\frac{\pi}{2\rho} \leqslant \varphi_1, \psi_1 \leqslant 2\pi - \frac{\pi}{2\rho}$. Поэтому, на основании теоремы A, имеет место оценка

$$\int_0^1 |h(t)|^2\, dt \leqslant M \left\{ \int_0^\infty |f(u^{1/\rho} e^{i\varphi})|^2 u^{2\gamma}\, du + \int_0^\infty |f(u^{1/\rho} e^{i\psi})|^2 u^{2\gamma}\, du \right\} \leqslant$$

$$\leqslant M_1 \int_Q |f(\lambda)|^2\, |d\lambda|$$

и, стало быть, несобственный интеграл (1.3) сходится в метрике L_2 (0, 1).

Итак, если имеет место (1.2), то тем более

$$\int_Q |\mu|^{\omega} \varphi^{-1}(\mu) ((I - \mu B)^{-1} h,\ x)|^2\, |d\mu| \leqslant M \|h\|^2$$

и мы можем здесь в качестве h взять функцию, определенную равенством (1.3). Вспоминая равенство (1.1) и обозначения y_λ (t), получим

$$((I - \mu B)^{-1} h,\ x) = \left((I - \mu B)^{-1} \int_Q y_\lambda(t) |\lambda|^{-\frac{\omega}{2}} f(\lambda)\, d\lambda,\ x \right) =$$

$$= \int_Q ((I - \mu B)^{-1} y_\lambda(t),\ x) |\lambda|^{-\frac{\omega}{2}} f(\lambda)\, d\lambda = \int_Q \frac{\varphi(\lambda) - \varphi(\mu)}{\mu - \lambda} |\lambda|^{-\frac{\omega}{2}} f(\lambda)\, d\lambda$$

Таким образом

$$\int_Q |\mu|^{\omega} |\varphi^{-1}(\mu)| \int_Q \frac{\varphi(\lambda)-\varphi(\mu)}{\mu-\lambda} |\lambda|^{-\frac{\omega}{2}} f(\lambda)\, d\lambda|^2 |d\mu| \leqslant M\|h\|^2 \leqslant K \int_Q |f(\lambda)|^2 |d\lambda|$$

для любой функции $f \in L_2(Q)$. Перепишем это неравенство в виде

$$\int_Q \Big| |\mu|^{\frac{\omega}{2}} \int_Q \frac{|\lambda|^{-\frac{\omega}{2}} f(\lambda)}{\mu-\lambda}\, d\lambda - |\mu|^{\frac{\omega}{2}} \varphi^{-1}(\mu) \int_Q \frac{|\lambda|^{-\frac{\omega}{2}} \varphi(\lambda) f(\lambda)}{\mu-\lambda}\, d\lambda \Big|^2 |d\mu| \leqslant K \int_Q |f(\lambda)|^2 \, |d\lambda|.$$

В силу условий теоремы $\omega \in (-1, 1)$ и поэтому первое из фигурирующих здесь слагаемых является ограниченным оператором в пространстве $L_2(Q)$ [15, с. 89]. Следовательно, из последнего неравенства вытекает ограниченность второго слагаемого в $L_2(Q)$ и, стало быть, выполнено условие [15, с. 89]:

$$\sup_{z\in Q} \sup_{r>0} \left\{ r^{-1} \int_{B(z,r)\cap Q} |\lambda|^{-\omega} |\varphi(\lambda)| \, |d\lambda| \, r^{-1} \int_{B(z,r)\cap Q} |\lambda|^{\omega} |\varphi(\lambda)|^{-2} \, |d\lambda| \right\} < \infty \quad (1.4)$$

для каждого угла Q. Пусть контур Γ_ρ состоит из объединения лучей $l_j (1 \leqslant j \leqslant [2\rho]+1)$, а L_{ij} обозначает угол, составленный из лучей l_i и l_j. Если $z \in \Gamma_\rho$, то

$$r^{-1} \int_{B(z,r)\cap\Gamma_\rho} |\lambda|^{-\omega} |\varphi(\lambda)|^2 |d\lambda| r^{-1} \int_{B(z,r)\cap\Gamma_\rho} |\lambda|^{\omega} |\varphi(\lambda)|^{-2} |d\lambda| =$$

$$= \sum_{i,j} r^{-1} \int_{B(z,r)\cap l_i} |\lambda|^{-\omega} |\varphi(\lambda)|^2 |d\lambda| r^{-1} \int_{B(z,r)\cap l_j} |\lambda|^{\omega} |\varphi(\lambda)|^{-2} |d\lambda| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i,j} r^{-1} \int_{B(z,r)\cap L_{ij}} |\lambda|^{-\omega} |\varphi(\lambda)|^2 |d\lambda| \, r^{-1} \int_{B(z,r)\cup L_{ij}} |\lambda|^{\omega} |\varphi(\lambda)|^{-2} |d\lambda|.$$

Из этого неравенства и соотношений (1.4) вытекает наличие $A^2_{\Gamma_\rho}$-условия, то есть второе требование теоремы выполнено.

Обратно, выполнение $A^2_{\Gamma_\rho}$-условия влечет наличие неравенств (1.4), из которых, обращая приведенные раннее рассуждения, приходим к оценкам

$$\int_Q |\mu|^{\omega} |\varphi^{-1}(\mu)\, ((I-\mu B)^{-1} h, x)|^2 |d\mu| \leqslant K \int_Q |f(\mu)|^2 |d\mu|, \quad (1.5)$$

где $h(t)$ задается равенством (1.3), а f — произвольная функция из $L_2(Q)$. Если в качестве Q взять угол, образованный некоторым лучом l контура Γ_ρ и положительным лучом, то для функции f_1, сосредоточенной на положительном луче, из (1.5) выводим

$$\int_l |\mu|^{\omega} |\varphi^{-1}(\mu)\, ((I-\mu B)^{-1} h_1, x)|^2 |d\mu| \leqslant K \int_0^{\infty} |f_1(r)|^2 \, dr,$$

где $h_1(t)=\int_0^\infty t^{\alpha-1}E_\rho(e^{i\frac{\pi}{2\rho}}rt^{\frac{1}{\rho}};\alpha)\,r^{-\frac{\omega}{2}}f_1(r)\,dr$. Аналогично, если одна из сторон угла Q совпадает со второй стороной главного угла γ_ρ, то

$$\int_l |\mu|^\omega |\varphi^{-1}(\mu)((I-\mu B)^{-1}h_2,\ x)|^2\,|d\mu| \leqslant K\int_0^\infty |f_2(re^{-i\frac{\pi}{\rho}})|^2\,dr,$$

причем $h_2(t)=e^{-i\frac{\pi}{\rho}}\int_0^\infty t^{\alpha-1}E_\rho(e^{-i\frac{\pi}{2\rho}}rt^{\frac{1}{\rho}};\alpha)\,r^{-\frac{\omega}{2}}f_2(re^{-i\frac{\pi}{\rho}})\,dr$. Подбирая константы α_1, α_2 соответствующим образом, функцию $\alpha_1h_1+\alpha_2h_2$ запишем в виде:

$$h=\alpha_1h_1+\alpha_2h_2=\int_{\gamma_\rho} t^{\alpha-1}E_\rho(e^{-i\frac{\pi}{2\rho}}\lambda t^{\frac{1}{\rho}};\alpha)\,\lambda^{-\frac{\omega}{2}}f(\lambda)\,d\lambda,\quad t\in[0,1],$$

где f, составленная из функций f_1, f_2, пробегает все пространство $L_2(\gamma_\rho)$. Если считать, что $\arg y^{\frac{1}{\rho}}=-\frac{\pi}{\rho}$ для $y<0$, то после замены $\lambda=y^{\frac{1}{\rho}}$ $(y\in R)$ получим

$$h(t)=\rho^{-1}t^{\alpha-1}\int_R E_\rho(e^{i\frac{\pi}{2\rho}}y^{\frac{1}{\rho}}x^{\frac{1}{\rho}};\alpha)\,(iy)^{\gamma-1}g(y)dy,$$

$$g(y)=(i)^{1-\gamma}y^{\gamma}f(y^{\frac{1}{\rho}}),\quad \gamma=\frac{1-\rho}{2\rho}.$$

Из двух последних неравенств заключаем, что

$$\int_l |\mu|^\omega|\varphi^{-1}(\mu)((I-\mu B)^{-1}h,\ x)|^2\,|d\mu|\leqslant K_1\left\{\int_0^\infty|f_1(r)|^2\,dr+\right.$$

$$\left.+\int_0^\infty|f_2(re^{-i\frac{\pi}{\rho}})|^2\,dr\right\}=K_1\int_{\gamma_\rho}|f(\lambda)|^2\,|d\lambda|=K_2\int_R|y|^{2\gamma}|f(y^{1/\rho})|^2dy=$$

$$=K_3\int_R|g(y)|^2\,dy. \qquad (1.6)$$

причем функция g пробегает все пространство $L_2(R)$. Теперь используем теорему В об обращении преобразования Фурье с помощью ядер Миттаг—Леффлера. Для этого, положив в формуле для $h(t)$

$$g(y)=\int_0^1 e^{-ixy}\Psi(x)\,dx,\quad \Psi\in L_2(0,1),$$

найдем, что $h = 2\pi\Psi$ и $\int\limits_R |g(y)|^2 dy = 2\pi \int\limits_0^1 |\Psi(x)|^2 dx$. Это означает, что в (1.6) функция h пробегает все пространство $L_2(0,1)$, а также

$$\int\limits_l |\mu|^{\omega} |\varphi^{-1}(\mu)((I-\mu B)^{-1} h, x)|^2 |d\mu| \leqslant M \int\limits_0^1 |h(t)|^2 dt,$$

где l — произвольный луч контура Γ_ρ, который не совпадает со сторонами угла γ_ρ. Далее, если в (1.5) считать, что $Q = \gamma_\rho$, то с помощью приведенных выше рассуждений, снова придем к оценке

$$\int\limits_{\gamma_\rho} |\mu|^{\omega} |\varphi^{-1}(\mu)((I-\mu B)^{-1} h, x)|^2 |d\mu| \leqslant M \|h\|^2.$$

Соединяя это со сказанным раннее, заключаем, что выполнено первое требование теоремы. При $\rho \in \left|\frac{1}{2}, 1\right|$ доказательство не требует привлечения новых соображений и проще изложенного выше. Теорема доказана.

Замечание 1.1. С помощью незначительной модификации приведенных рассуждений можно получить оценки вида (1.2) и на более сложных контурах. В частности, при $\rho = \frac{1}{2}$ теорема 1.1 остается в силе, если вместо контура Γ_ρ взять параболу, задаваемую уравнением $z(t) = (t + ia)^2$, $t \in R$, $a > 0$. Другими словами, оценка из теоремы 1.1 $\left(\rho = \frac{1}{2}\right)$ отвечает тому крайнему случаю, когда эта парабола вырождается в положительный луч.

Замечание 1.2. Отметим связь оценок типа (1.2) с задачей о разрешимости некоторых классов линейных дифференциальных уравнений, порождаемых оператором A. Речь идет об условиях, при которых A является генератором семейства T^s ограниченных в пространстве $L_2(0,1)$ операторов обобщенного сдвига [16]. Например, в случае $\rho = 1$ некоторые результаты в этом направлении содержатся в [13].

§ 2. Теорема о полноте корневых подпространств

Напомним, что оператор называется полным, если замыкание линейной оболочки его корневых подпространств совпадает со всем пространством.

Функция $\varphi(\lambda)$, чьи корни совпадают со спектром оператора A, является целой функцией порядка ρ и нормального типа. Через $h_\varphi(\theta)$ обозначим ее индикатор

$$h_\varphi(\theta) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log|\varphi(re^{i\theta})|}{r^\rho}, \quad \theta \in [-\pi, \pi).$$

В задаче о полноте важную роль играет рост $\varphi(\lambda)$ внутри главного угла γ_ρ, то есть величина $h_\varphi\left(-\frac{\pi}{2\rho}\right)$. Если $\rho = 1$, то существуют как бы два главных угла (верхняя и нижняя полуплоскость) и в этом случае будем использовать также значение $h_\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Теорема 2. 1. *Пусть* $\rho > \frac{1}{2}$ *и* $\frac{1}{2} < \alpha < \frac{1}{2} + \frac{1}{\rho}$, *функция* $|\lambda|^{-\omega} |\varphi(\lambda)|^2$ $(\omega = \rho + 1 - 2\rho\alpha)$ *удовлетворяет* $A^2_{\Gamma_\rho}$*-условию,* $h_\varphi\left(-\frac{\pi}{2\rho}\right) = 1$. *Если* $\rho \neq 1$, *то операторы* A *и* A^* *полны одновременно в пространстве* $L_2(0,1)$. *В случае* $\rho = 1$ *теорема остается в силе, если добавить условие* $h_\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

Доказательство. Из соотношения (1.1) вытекает, что если $\lambda_k \in \Lambda$, то

$$\varphi(\lambda) = (\lambda_k - \lambda) \int_0^1 u^{\alpha-1} E_\rho(e^{i\frac{\pi}{2\rho}} \lambda u^{\frac{1}{\rho}};\ \alpha)\, \overline{x_k(u)}\, du = (\lambda_k - \lambda)\, \psi(\lambda),$$

где $x_k = (I - \overline{\lambda}_k B^*)^{-1} x$. Покажем, что $\psi(\lambda)$ — функция вполне регулярного роста внутри угла γ_ρ. Для этого рассмотрим функцию $\psi_\rho(\lambda) = \psi(\lambda^{1/\rho})$, которая голоморфна в нижней полуплоскости и имеет там порядок роста 1. Поскольку для вещественных x

$$\psi_\rho(x) = \int_0^1 E_\rho(e^{i\frac{\pi}{2\rho}} x^{\frac{1}{\rho}} u^{\frac{1}{\rho}};\ \alpha)\, u^{\alpha-1}\, \overline{x_k(u)}\, du, \quad x_k \in L_2(0,1),$$

то из теоремы А выводим, что

$$\int_R |x|^{2(\alpha-1)} |\psi_\rho(x)|^2\, dx < \infty$$

и, стало быть

$$\int_R \frac{\log_+|\psi_\rho(x)|}{1 + x^2}\, dx < \infty. \tag{2.1}$$

Согласно теореме М. Картрайт, $\psi_\rho(x)$ — вполне регулярного роста в нижней полуплоскости [17, с. 315]. Отметим, что при значениях параметра $\rho = \frac{1}{2}$, 1 функция $\psi_\rho(\lambda)$ является целой, конечной степени и вполне регулярного роста во всей плоскости.

Перейдем к доказательству полноты оператора A^*. Для упрощения рассуждений будем считать, что корневые подпространства совпадают с собственными, поскольку эти рассуждения остаются в силе и в случае кратных корней функции $\varphi(\lambda)$. Из условия $(A^2_{\Gamma_\rho})$ и теоремы 1.1 вытекает наличие оценки

$$\int_{\Gamma_\rho} |\lambda|^{\omega}\, |\varphi^{-1}(\lambda)\, ((I - \lambda B)^{-1} h,\ x)|^2\, |d\lambda| \leqslant M \|h\|^2, \quad \omega \in (-1, 1).$$

Если оператор A^* не полон, то найдется такой вектор $h_0 \neq 0$, что функция

$$F(\lambda) = ((I - \lambda B)^{-1} h_0, \ x)\varphi^{-1}(\lambda)$$

является целой, порядка не выше ρ. В этом легко убедиться, если учесть, что собственные векторы оператора A^* имеют вид

$$x_{\bar{\lambda}_k} = (I - \bar{\lambda}_k B^*)^{-1} x, \ \lambda_k \in \Lambda.$$

Следовательно, $F(\lambda)$ удовлетворяет условию

$$\int_{\Gamma_\rho} |\lambda|^{\alpha} |F(\lambda)|^2 |d\lambda| < \infty. \tag{2.2}$$

Выведем отсюда, что $F(\lambda) \equiv 0$. Рассмотрим сначала случай $\rho = \frac{1}{2}$, 1.

В первом случае функция $\varphi(\lambda^2)$ является целой, конечной степени и вполне регулярного роста, причем из (2.1) и условия $h_\varphi(-\pi) = 1$ вытекает, что ее индикаторная диаграмма совпадает с отрезком $[-i, i]$. Во втором случае $\varphi(\lambda)$ обладает аналогичными свойствами, а ее индикаторная диаграмма равна отрезку $[-i, 0]$. Легко проверяется, что при $\rho = \frac{1}{2}$ индикаторная диаграмма функции $((I - \lambda^2 B)^{-1} h_0, \ x)$ содержится в отрезке $[-i, i]$. Поэтому целая функция $F(\lambda^2)$ имеет нулевую степень. Соединяя это с соотношением (2.2), которое в этом случае выглядит следующим образом:

$$\int_R |x|^{4-2\alpha} |F(x^2)|^2 \, dx < \infty, \ \alpha \in \left(\frac{1}{2}, \ \frac{5}{2}\right),$$

заключаем, что $F(\lambda^2) \equiv 0$. Повторяя дословно эти же рассуждения, приходим к выводу, что $F(\lambda) \equiv 0$ и в случае $\rho = 1$. Перейдем к общему случаю. Если порядок F равен $\rho_0 < \rho$, то рассмотрим функцию

$$\Phi(z) = \int_0^z \frac{F(\lambda)}{(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)} \, d\lambda,$$

где λ_1, λ_2 — в числе нулей функции F (случай, когда F имеет менее двух нулей разбирается тривиально). Из неравенства Коши—Шварца и оценки (2.2) немедленно вытекает, что на каждом луче контура Γ_ρ функция $\Phi(z)$ ограничена. Поскольку ее порядок равен ρ_0, то учитывая строение контура Γ_ρ, с помощью теоремы Фрагмена—Линделефа выводим, что $\Phi(z) \equiv C$ и, стало быть, $F(\lambda) \equiv 0$.

И, наконец, пусть порядок F равен ρ. Пусть $x_0, x_1, \cdots, x_n$ — убывающая последовательность чисел из интервала $[-\pi, \pi)$, причем $x_i = \arg z_i$, если $z_i \in l_i$, где l_i — луч контура Γ_ρ. Таким образом, при такой нумерации лучей, l_0 — ближайший к отрицательной полуоси луч контура Γ_ρ. Совокупность чисел $v_i = - x_i$ удовлетворяет условиям

$$-\pi < v_0 < v_1 < \cdots < v_n \leqslant \pi < v_0 + 2\pi$$

и для единственной пары последовательных чисел $\left(0, \frac{\pi}{\rho}\right)$ расстояние между ними равно $\frac{\pi}{\rho}$. Далее, если $h_F\left(-\frac{\pi}{2\rho}\right) < 0$, то прибавляя к Γ_ρ еще луч с аргументом $-\frac{\pi}{2\rho}$, снова с помощью теоремы Фрагмена—Линделефа получим, что $F(\lambda) \equiv 0$. Итак, $h_F\left(-\frac{\pi}{2\rho}\right) = \sigma \geqslant 0$ и условие (2.2) запишем в виде

$$\int_0^\infty |F(re^{-i\varphi_k})|^2 r^\omega dr < \infty, \quad k = 0, 1, \cdots, n, \quad \omega \in (-1, 1).$$

Из теоремы C вытекает, что

$$F(\lambda) = \int_0^1 E_\rho\left(e^{i\frac{\pi}{2\rho}} \lambda u^{\frac{1}{\rho}}; \mu\right) \overset{\circ}{x}(u)\, u^{\mu-1}\, du,$$

где $\overset{\circ}{x} \in L_2(0, 1)$, $\mu = (2\rho)^{-1}(\omega + \rho + 1)$. С другой стороны, поскольку $\varphi(\lambda)$ — вполне регулярного роста внутри главного угла, то

$$h_G\left(-\frac{\pi}{2\rho}\right) + h_F\left(-\frac{\pi}{2\rho}\right) = h_\Phi\left(-\frac{\pi}{2\rho}\right), \quad G(\lambda) = ((I - \lambda B)^{-1} h_0, x).$$

Из свойств резольвенты $(I - \lambda B)^{-1}$ выводим, что $h_\Phi\left(-\frac{\pi}{2\rho}\right) \leqslant 1$ и, стало быть, $\sigma = 0$, то есть $F(\lambda) \equiv 0$.

Итак, мы доказали, что $((I - \lambda B)^{-1} h_0, x) = 0$ для всех $\lambda \in C$. Если $x(t) \overset{\text{п. в.}}{=} 0$ в некоторой полуокрестности 1, то тип функции $\varphi(\lambda)$ был бы меньше 1, что противоречит условию теоремы. Последнее означает цикличность вектора x для оператора B^* [18, с. 476] и, следовательно, множество $x_\mu = (I - \mu B^*)^{-1} x\ (\mu \in C)$ всюду плотно в $L_2(0, 1)$. Таким образом, $h_0 = 0$, что и доказывает полноту оператора A^*.

Обратимся теперь к доказательству полноты оператора A. Если оператор не полон, то обозначим через N ортогональное дополнение к замыканию линейной оболочки корневых подпространств оператора A. Для каждого $h \in N$ функция $(y_\lambda, h)\varphi^{-1}(\lambda)$ является целой, где, как обычно, $y_\lambda(t) = t^{\alpha-1} E_\rho\left(e^{i\frac{\pi}{2\rho}} \lambda t^{\frac{1}{\rho}}; \alpha\right)$. Из асимптотических формул для функций типа Миттаг—Леффлера [1, с. 133] вытекает, что справедлива оценка $\|y_\lambda\| \leqslant K|\lambda|^{\rho(1-\alpha)}$, если $\lambda \to \infty$, оставаясь на контуре Γ_ρ (см. неравенство (4.2)). Обозначая через Γ_ρ^0 контур Γ_ρ с выброшенной окрестностью нуля, рассмотрим интеграл

$$\int_{\Gamma_\rho^0} |\lambda|^{1-\rho} |\varphi^{-1}(\lambda)(y_\lambda, h)((I - \lambda B)^{-1} h_1, x)|^2 |d\lambda| \leqslant$$

$$\leqslant \|h\|^2 \int\limits_{\Gamma_\rho^0} |\lambda|^{1-\rho} \|y_\lambda\|^2 |\varphi^{-1}(\lambda)((I-\lambda B)^{-1} h_1, x)|^2 |d\lambda| \leqslant$$

$$\leqslant K\|h\|^2 \int\limits_{\Gamma_\rho^0} |\lambda|^{\omega} |\varphi^{-1}(\lambda)((I-\lambda B)^{-1} h_1, x)|^2 |d\lambda| \leqslant K_1 \|h\| \|h_1\|^2$$

для любых h, $h_1 \in L_2(0, 1)$. Пусть p обозначает наименьшее целое неотрицательное число, для которого $\rho - 1 + \omega < 2p$, а $P(\lambda)$ — произвольный полином степени p, корни которого не лежат на Γ_ρ. Полагая $h_1 = y_\mu$, получим

$$\int\limits_{\Gamma_\rho^0} |\lambda|^{\omega} |P^{-1}(\lambda)\varphi^{-1}(\lambda)((I-\lambda B)^{-1} y_\mu, x)(y_\lambda, h)|^2 |d\lambda| \leqslant$$

$$\leqslant L_1 \int\limits_{\Gamma_\rho^0} |\lambda|^{1-\rho} |\varphi^{-1}(\lambda)(y_\lambda, h)((I-\lambda B)^{-1} y_\mu, x)|^2 |d\lambda| \leqslant L_2(\mu).$$

Последнее неравенство означает, что функция

$$\Phi(\lambda) = P^{-1}(\lambda)\varphi^{-1}(\lambda)(y_\lambda, h)((I-\lambda B)^{-1} y_\mu, x)$$

принадлежит пространству $L_2^{\omega}(\Gamma_\rho^0)$. Фиксируя $\mu \overline{\in} \Gamma_\rho$, с учетом (1.1) найдем

$$\Phi(\lambda) = \frac{(y_\lambda, h)}{P(\lambda)(\mu-\lambda)} - \varphi(\mu)\frac{(y_\lambda, h)}{P(\lambda)(\mu-\lambda)\varphi(\lambda)}.$$

Первое слагаемое в этом равенстве принадлежит $L_2^{\omega}(\Gamma_\rho^0)$. Этот факт нетрудно вывести из определения числа p, четвертого пункта теоремы А и оценки

$$\int\limits_{\Gamma_\rho} |\lambda|^{\omega} |P^{-1}(\lambda)(\mu-\lambda)^{-1}(y_\lambda, h)|^2 |d\lambda| \leqslant K \int\limits_{\Gamma_\rho} |\lambda|^{-\omega} |(y_\lambda, h)|^2 |d\lambda| \leqslant K_1 \|h\|^2.$$

Отсюда следует, что второе слагаемое также принадлежит $L_2^{\omega}(\Gamma_\rho^0)$, а значит, и

$$\Phi_1(\lambda) \stackrel{\mathrm{df}}{=} Q^{-1}(\lambda)\varphi^{-1}(\lambda)(y_\lambda, h) \in L_2(\Gamma_\rho), \quad Q(\lambda) = P(\lambda)(\mu-\lambda). \tag{2.3}$$

Пусть теперь $h \in N$, а корни Q выбраны из числа корней функции (y_λ, h), которые не входят в Λ. Тогда Φ_1 является целой функцией порядка не выше ρ и к ней применимы рассуждения, использованные при доказательстве полноты оператора A^*. Следовательно, $(y_\lambda, h) \equiv 0$ и, значит, $h = 0$. Осталось рассмотреть тот случай, когда функция (y_λ, h) не имеет достаточного количества посторонних корней. Другими словами, существуют такие полиномы f, g, что

$$(y_\lambda, h)\varphi^{-1}(\lambda) = f(\lambda)\exp\{g(\lambda)\}, \quad \deg f < \deg Q, \quad \deg g \leqslant [\rho], \tag{2.4}$$

где символом deg обозначается степень полинома. Покажем, что всегда $\deg g = 0$. Действительно, из (2.3) находим

$$f(\lambda)\, Q^{-1}(\lambda) \exp |g(\lambda)| \in L_2^{\omega}(\Gamma_\rho) \tag{2.5}$$

и, следовательно, в случае $\rho = 1$ полином $g(\lambda) = ia\lambda$ $(a \in R)$. Если $a \neq 0$, то это противоречит (2.4), поскольку индикаторная диаграмма (y_λ, h) получается из отрезка $[-i, 0]$ сдвижкой на $|a|$ единиц. При $\rho > 1$, из (2.5) с помощью принципа Фрагмена—Линделефа получаем, что и в этом случае степень g равна 0.

Таким образом, возвращаясь к (2.4), заключаем, что для каждого $h \in N$ найдется такой полином $f_h(\lambda)$, что

$$(y_\lambda, h) = f_h(\lambda)\, \varphi(\lambda),$$

причем степени полиномов f_h ограничены числом $\deg Q = p + 1$. Поскольку справедливы равенства

$$(y_\lambda, \sum \bar{c}_k h_k) = (\sum c_k f_{h_k}(\lambda))\, \varphi(\lambda), \quad h_k \in N,$$

то $\dim N \leq p + 1$. С другой стороны, подпространство N инвариантно относительно оператора A^{*-1} и ввиду своей конечномерности содержит собственный вектор оператора A^*, что невозможно. Полученное противоречие доказывает полноту оператора A.

С помощью изложенных рассуждений можно получать и более общие теоремы о полноте операторов рассматриваемого класса. Здесь же приведен простейший результат в этом направлении, который используется в дальнейшем. Но даже его интересно сравнить с известным признаком Карлемана [19, с. 227] полноты операторов из идеалов Неймана-Шэттена. Теорема 2.1 усиливает признак в двух направлениях: позволяет углу между лучами Γ_ρ равняться $\frac{\pi}{\rho}$ и накладывает более тонкое ограничение на поведение резольвенты вдоль лучей контура Γ_ρ.

§ 3. Базисность рациональных дробей в некоторых весовых пространствах

Для каждого $\rho \geq \frac{1}{2}$ обозначим через $L_2^{\omega}(\gamma_\rho)$ гильбертово пространство функций $f(\lambda)$, заданных на контуре γ_ρ, для которых конечна величина

$$\|f\|_{\omega}^2 \stackrel{\mathrm{df}}{=} \int_{\gamma_\rho} |\lambda|^{\omega} |f(\lambda)|^2 |d\lambda| < \infty.$$

Напомним, что при $\rho = \frac{1}{2}$ контур γ_ρ представляет собой положительный луч, который при интегрировании проходится в одном направлении. Для дальнейшего продвижения в исследовании операторов рассматриваемого класса, необходимо решить задачу о безусловной базисности в замыкании своей линейной оболочки семейства рациональных дробей

$$\{f_k(\lambda) : \lambda_k \in \Lambda\}, \quad f_k(\lambda) = (\lambda_k - \lambda)^{-1}$$

в пространствах $L_2^{\omega}(\gamma_\rho)$. Поскольку внутри угла γ_ρ аргумент отсчитывается от положительного луча по часовой стрелке, то λ^ρ отображает область γ_ρ $\left(\text{при } \rho=\frac{1}{2} - \text{плоскость без положительного луча}\right)$ на нижнюю полуплоскость. Для множества Λ, лежащего внутри области γ_ρ, введем обозначение

$$\Lambda^\rho = \{\lambda_k^\rho : \lambda_k \in \Lambda\}.$$

При $\rho > \frac{1}{2}$ следующий результат содержится в более общих теоремах работ [20—22]. Мы приводим его здесь с новым, более кратким доказательством, которое опирается на простые вычисления.

Теорема 3.1. *Пусть $\rho \geqslant \frac{1}{2}$, а множество Λ лежит внутри области γ_ρ. Тогда семейство рациональных дробей $\{f_k(\lambda)\}$ образует безусловный базис замыкания своей линейной оболочки в пространстве $L_2^{\omega}(\gamma_\rho)$, если и только если последовательность Λ^ρ удовлетворяет условию Карлесона:*

$$\inf_n \prod_{k \neq n} |z_n - z_k| |z_n - \bar{z}_k|^{-1} > 0, \ \Lambda^\rho = \{z_k\}.$$

Доказательство. Речь идет о необходимых и достаточных условиях справедливости двусторонней оценки

$$\|\Sigma c_k f_k\|_\omega^2 \asymp \Sigma |c_k|^2 \|f_k\|_\omega^2, \tag{3.1}$$

где c_k — произвольные комплексные числа, а суммирование распространяется на любое конечное подмножество индексов. Пусть сначала $\rho > \frac{1}{2}$.

Считая, что при $t < 0$ справедливо равенство $\arg t^{1/\rho} = -\frac{\pi}{\rho}$, сделаем замену

$$\|\Sigma\, c f_k\|_\omega^2 = \rho^{-1} \int\limits_R |\Sigma\, c_k t^\tau (\lambda_k - t^{\frac{1}{\rho}})^{-1}|^2 dt, \quad \tau = \frac{\omega}{2\rho} + \frac{1-\rho}{2\rho}.$$

Простые вычисления показывают, что

$$P(\Sigma\, c_k t^\tau (\lambda_k - t^{\frac{1}{\rho}})^{-1}) = \rho \Sigma c_k \cdot \lambda_k^{\frac{\omega}{2}} \cdot \lambda_k^{\frac{\rho-1}{2}} (\lambda_k^\rho - t)^{-1},$$

где P — проектор Рисса на класс Харди H_+^2 (в верхней полуплоскости). Таким образом, имеет место неравенство

$$\int\limits_R |\Sigma\, c_k \lambda_k^{\frac{\omega}{2}} \lambda_k^{\frac{\rho-1}{2}} (\lambda_k^\rho - t)^{-1}|^2 dt < M \int\limits_R |\Sigma\, c_k t^\tau (\lambda_k - t^{\frac{1}{\rho}})^{-1}|^2 dt. \tag{3.2}$$

С другой стороны, используя формулы Сохоцкого, в результате несложных вычислений, найдем

$$\sum c_k \rho^{-1} \lambda_k^{\nu\rho} \frac{z^{\frac{\omega}{2}}}{z-\lambda_k} = \frac{1}{2} \sum c_k \frac{z^{\frac{\rho-1}{2}}}{z^\rho - \lambda_k^\rho} - \frac{z^{\frac{\omega}{2}}}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{\lambda^{-\frac{\omega}{2}}}{z-\lambda} \sum c_k \frac{\lambda^{\frac{\rho-1}{2}}}{\lambda^\rho - \lambda_k^\rho} d\lambda,$$

где $\nu = -\frac{\omega}{2\rho} + \frac{1-\rho}{2\rho}$. Как уже отмечалось, фигурирующий здесь интегральный оператор ограничен в пространстве $L_2(\gamma_\rho)$ (§ 1) и если ввести обозначение $c_k \lambda_k^{\nu\rho} = a_k$, то приходим к оценке

$$\int_{\gamma_\rho} |\sum a_k z^{\frac{\omega}{2}} (z-\lambda_k)^{-1}|^2 |dz| \leqslant K \int_{\gamma_\rho} |\sum c_k \cdot \lambda_k^{-\nu\rho} \cdot \lambda_k^{\frac{\rho-1}{2}} (\lambda^\rho - \lambda_k^\rho)^{-1}|^2 |d\lambda| =$$

$$= K_1 \int_R |\sum a_k \cdot \lambda_k^{\frac{\omega}{2}} \cdot \lambda_k^{\frac{\rho-1}{2}} \cdot (\lambda_k^\rho - t)^{-1}|^2 dt.$$

Соединяя это неравенство с (3.2), получим

$$\|\sum c_k f_k\|_\omega^2 \asymp \int_R |\sum c_k \cdot \lambda_k^{\frac{\omega}{2}} \cdot \lambda_k^{\frac{\rho-1}{2}} \cdot (\lambda_k^\rho - t)^{-1}|^2 dt.$$

Отсюда вытекает, что (3.1) равносильно двустороннему неравенству

$$\int_R |\sum a_k (\lambda_k^\rho - t)^{-1}|^2 dt \asymp \sum |a_k|^2 \int_R |\lambda_k^\rho - t|^{-2} dt,$$

из которого и вытекает требуемое [23].

В случае $\rho = \frac{1}{2}$ имеем

$$\|\sum c_k f_k\|_\omega^2 = \int_R |t|^{2\beta} |\sum c_k (z_k^2 - t^2)^{-1}|^2 dt, \quad \beta = \omega + \frac{1}{2}, \quad z_k \in \Lambda^{\frac{1}{2}}$$

и поэтому снова с помощью проектирования на H_+^2 приходим к неравенству

$$\int_R |\sum c_k z_k^{\beta-1} (t - z_k)^{-1}|^2 dt \leqslant M \|\sum c_k f_k\|_\omega^2. \tag{3.3}$$

Далее, нетрудно проверить, что оператор

$$(Tf)(x) = \lim_{\lambda \to x} \frac{\lambda^{\omega + \frac{1}{2}}}{2\pi i} \int_R \frac{t^{-\omega + \frac{1}{2}}}{t^2 - \lambda^2} f(t)\, dt, \quad \lambda = x + iy, \ y < 0$$

непрерывен в метрике пространства $L_2(R)$. В результате простых вычислений получим

$$T(\sum c_k (z_k - t)^{-1}) = \frac{1}{2} \sum c_k (t - z_k)^{-1} - \sum c_k z_k^{1-\beta} t^\beta (z_k^2 - t^2)^{-1}$$

и, стало быть, справедлива оценка

$$\|\sum c_k f_k\|^2_{\omega} \leqslant M_1 \int\limits_R |\sum c_k z_k^{\beta-1} (t - z_k)^{-1}|^2 \, dt.$$

Соединяя ее с (3.3) снова приходим к нужному заключению. Теорема доказана.

Если последовательность Λ лежит вне угла γ_ρ и, следовательно, $0 < \arg \lambda_k < 2\pi - \frac{\pi}{\rho}$, $\lambda_k \in \Lambda$, то применяя предыдущую теорему к дополнительному углу раствора $\frac{\pi}{\beta} = 2\pi - \frac{\pi}{\rho}$ приходим к следующему результату.

Следствие. *Если $\rho > \frac{1}{2}$ и последовательность Λ лежит вне угла γ_ρ, то семейство $\{f_k(\lambda)\}$ образует безусловный базис замыкания своей оболочки в $L_2^{\omega}(\gamma_\rho)$ тогда и только тогда, когда последовательность Λ^{β} $(\beta = \rho(2\rho - 1)^{-1})$ удовлетворяет условию Карлесона.*

Заканчивая параграф отметим, что изложенное здесь доказательство почти дословно переносится на тот случай, когда вес $|z|^{\omega}$ $(-1 < \omega < 1)$ пространства L_2 заменен произвольным весом Макенхаупта на контуре γ_ρ. Таким образом, теорема 3.1 остается в силе и в этом случае.

§ 4. Безусловная базисность семейств функций типа Миттаг—Леффлера и интерполяция целыми функциями конечного порядка

В этом параграфе будут установлены необходимые и достаточные условия, при которых семейства функций

$$y_{\lambda_k}(t) = t^{\alpha-1} E_\rho \left(e^{i\frac{\pi}{2\rho}} \lambda_k t^{\frac{1}{\rho}}; \alpha\right), \; \lambda_k \in \Lambda, \; \rho > \frac{1}{2} \tag{4.1}$$

образуют безусловные базисы пространства $L_2(0,1)$. Кроме введенных в предыдущих параграфах определений и обозначений будем пользоваться также следующими. В дальнейшем через $A_\sigma^2\left(\beta; 0; -\frac{\pi}{\rho}\right)$ обозначается класс целых функций $f(\lambda)$ порядка $\rho \geqslant \frac{1}{2}$ и типа $\leqslant \sigma$, удовлетворяющих условию

$$\int\limits_0^\infty |f(re^{i\theta})|^2 r^\beta \, dr < \infty, \; \theta \in \left[0, 2\pi - \frac{\pi}{\rho}\right],$$

где $\beta \in (-1, 1)$ — заданное число. Далее, для каждого $\delta > 0$ обозначим через G_δ область комплексной плоскости, состоящую из объединения дополнительного угла контура Γ_ρ $\left(\text{раствора } 2\pi - \frac{\pi}{\rho}\right)$ и части главного угла γ_ρ, которая выделяется неравенством $|\operatorname{Im} \lambda^\rho| < \delta$, причем λ^ρ отображает внутренность γ_ρ на нижнюю полуплоскость. Таким образом, при $\rho = \frac{1}{2}$ область G_δ представляет собой внутренность соответствующей параболы. Кроме того, при изучении систем (4.1), не умаляя общности, будем считать что $0 \overline{\in} \Lambda$. Связь с предыдущими рассмотрениями устанавливается посредством следующей теоремы.

Теорема 4.1. *Пусть семейство* (4.1) *образует безусловный базис пространства* $L_2(0,1)$, *причем* $\Lambda \subset G_\delta$ *при некотором* $\delta > 0$. *Тогда*

1) *Существует оператор* A *вида* (0.2), *для которого функции* y_{λ_k} *являются собственными и* $\sigma(A) = \Lambda$.

2) *Справедливо неравенство* $\frac{1}{2} < \alpha < \frac{1}{2} + \frac{1}{\rho}$.

3). *Элементы последовательности* Λ *суть простые нули целой функции* $\varphi(\lambda)$, *для которой*

$$\lambda^{-1}(\varphi(\lambda) - \varphi(0)) \in A_1^2\left(-\omega;\ 0; -\frac{\pi}{\rho}\right),\quad \omega = \rho + 1 - 2\rho\alpha.$$

4). *Функция* $\varphi(\lambda)$ *из предыдущего пункта однозначно определяется условием нормировки* $\varphi(0) = 1$.

Доказательство. Если семейство $\{y_{\lambda_k}\}$ образует базис, то последовательность λ_k^{-1} ограничена и поэтому существует ограниченный оператор, обозначаемый через A^{-1}, для которого

$$A^{-1} y_{\lambda_k} = \lambda_k^{-1} y_{\lambda_k},\ \lambda_k \in \Lambda.$$

Оператор A^{-1} будем искать в виде

$$(A^{-1}h)(t) = e^{i\frac{\pi}{\rho}} \Gamma^{-1}\left(\frac{1}{\rho}\right) \int_0^t (t-s)^{\frac{1}{\rho}-1} h(s)\,ds + (Vh)(t).$$

Из элементарных соотношений для функций типа Миттаг—Леффлера [1, с. 118] вытекает, что оператор V одномерный, причем

$$(Vy_{\lambda_k})(t) = \Gamma^{-1}(\alpha)\lambda_k^{-1} t^{\alpha-1},\ \lambda_k \in \Lambda.$$

Следовательно, $\alpha > \frac{1}{2}$ и существует такой вектор $x \in L_2(0,1)$, что

$$(Vh)(t) = (h, x)\, y,\quad y(t) = \Gamma^{-1}(\alpha)\, t^{\alpha-1},$$

то есть утверждение 1) доказано. Поэтому (§ 1) последовательность Λ совпадает с множеством корней функции

$$\varphi(\lambda) = 1 - \lambda \int_0^1 t^{\alpha-1} E_\rho\left(e^{i\frac{\pi}{2\rho}} \lambda t^{\frac{1}{\rho}};\ \alpha\right) \overline{x(t)}\,dt,$$

которые простые, поскольку кратный нуль порождает корневое подпространство, что невозможно в случае базисности собственных векторов. Далее, если $\Lambda \subset G_\lambda$, то при $\frac{1}{2} < \alpha \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{\rho}$ справедлива оценка

$$\|y_{\lambda_k}\| \leqslant M |\lambda_k|^{\rho(1-\alpha)}, \ \lambda_k \in \Lambda, \ \rho \geqslant \frac{1}{2}, \tag{4.2}$$

для доказательства которой применяются асимптотические формулы для функций типа Миттаг—Леффлера [1, с. 133]. Например, для $\rho > \frac{1}{2}$, в одном из возможных случаев, найдем

$$\|y_\lambda\|^2 = \int\limits_{\{|\lambda t^{\frac{1}{\rho}}| < 1\}} |y_\lambda(t)|^2\, dt + \int\limits_{\{|\lambda t^{\frac{1}{\rho}}| > 1\}} |y_\lambda(t)|^2\, dt \leqslant$$

$$\leqslant |\lambda|^{2\rho(1-\alpha)} \left\{ M_1 |\lambda|^{-\rho} \int\limits_0^{|\lambda|} u^{-\omega} (1+u)^{-2}\, du + M_2 + M_3 |\lambda|^{-\rho} \right\},$$

где $\omega = \rho + 1 - 2\rho\alpha$. Поскольку α изменяется в указанных пределах, то из полученного неравенства вытекает (4.2).

Докажем теперь, что при $\alpha \geqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{\rho}$ семейство $\{y_{\lambda_k}\}$ не может быть безусловным базисом пространства $L_2(0,1)$. Действительно, в случае базисности собственных векторов оператора A для сингулярных чисел [24, с. 46] оператора

$$A^{-1} h = Bh + (h, x)\, y$$

справедливо соотношение $s_k(A^{-1}) \asymp |\lambda_k|^{-1}$, где $\{\lambda_k\}$ — правильно занумерованный спектр A (корни функции φ). С другой стороны, поскольку A^{-1} есть одномерное возмущение B, то [24, с. 49]: $s_{k+1}(B) \leqslant s_k(A^{-1}) \leqslant s_{k-1}(B)$. Так как $s_k(B) \asymp k^{1/\rho}$ [18, с, 480], то в итоге получаем $|\lambda_k| \asymp k^{1/\rho}$. Далее, из формулы для $\varphi(\lambda)$ следует, что $|(x, y_{\lambda_k})| = |\lambda_k|^{-1}$ и, стало быть, сходится ряд

$$\sum |\lambda_k|^{-2} \|y_{\lambda_k}\|^{-2} < \infty.$$

Используя оценку (4.2) при $\alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{\rho}$, получаем сходимость ряда с общим членом k^{-1}. Если же $\alpha > \frac{1}{2} + \frac{1}{\rho}$, то существует такое $\beta > 0$, что [1, с. 120]:

$$\Gamma^{-1}(\beta) \int\limits_0^t (t-s)^{\beta-1} E_\rho (e^{i\frac{\pi}{2\rho}} \lambda_k s^{\frac{1}{\rho}};\ \mu)\, s^{\mu-1}\, ds = t^{\alpha-1} E_\rho (e^{i\frac{\pi}{2\rho}} \lambda_k t^{\frac{1}{\rho}},\ \alpha),$$

$$\mu = \frac{1}{2} + \frac{1}{\rho}$$

и, следовательно, снова $\|y_{\lambda_k}\| \leqslant M_1 |\lambda_k|^{\rho(1-\mu)}$, ввиду ограниченности в $L_2(0,1)$ оператора дробного интегрирования. Поэтому и в этом случае предыдущие рассуждения приводит к противоречию.

Теперь уже утверждение 3) вытекает из 2) и тероемы D. И, наконец, последнее утверждение теоремы непосредственно следует из параметрического представления функций класса $A_1^2\left(-\omega; 0; -\frac{\pi}{\rho}\right)$, которое вытекает из теоремы D и того факта, что оператор A^{-1} полностью определяется своими значениями на базисе. Теорема доказана.

Замечание. 4.1. Функцию $\varphi(\lambda)$, нормированную условием $\varphi(0) = 1$, будем называть порождающей функцией семейства (4.1), и решение задачи о базисности будет сформулировано в терминах именно этой функции.

Замечание 4.2. Те же рассуждения, что и при доказательстве (4.2) приводят к двусторонней оценке

$$\|y_\lambda\| \asymp |\lambda|^{\rho(1-\alpha)}, \tag{4.3}$$

если $\lambda \to \infty$, оставаясь на сторонах угла γ_ρ.

Продолжим теперь перечень необходимых условий базисности, сосредоточив, для определенности, все усилия на том важном случае, когда Λ лежит внутри главного угла γ_ρ и удовлетворяет требованию

$$0 < \delta < |\operatorname{Im} \lambda_k^\rho| < \Delta \tag{4.4}$$

при некоторых δ, Δ.

Лемма 4.1. *Если семейство $\{y_{\lambda_k}\}$ образует безусловный базис $L_2(0,1)$, а Λ удовлетворяет (4.4), то на каком-нибудь контура Γ_ρ функция $|\lambda|^{-\omega} |\varphi(\lambda)|^2$ $(\omega = \rho + 1 - 2\rho\alpha)$ удовлетворяет условию $(A_{\Gamma_\rho}^2)$.*

Доказательство. Предварительно докажем справедливость оценки

$$\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\infty}\right) |u|^{2\left(\frac{1}{\rho}-1\right)} \|B(I - u^{\frac{1}{\rho}} B)^{-1} h\|^2 \, du \leqslant M \|h\|^2, \quad \rho \geqslant \frac{1}{2} \tag{4.5}$$

для всех $h \in L_2(0,1)$ и некоторого $\varepsilon > 0$. Действительно, элементарные вычисления дают

$$B(I - u^{\frac{1}{\rho}} B)^{-1} h = e^{i\frac{\pi}{2\rho}} \int_0^t s^{\frac{1}{\rho}-1} E_\rho\left(e^{i\frac{\pi}{2\rho}} u^{\frac{1}{\rho}} s^{\frac{1}{\rho}};\ \frac{1}{\rho}\right) h(t-s)\, ds$$

и поэтому для любого ортонормированного базиса $\{e_k\}$ пространства $L_2(0,1)$ получим

$$\|B(I - u^{1/\rho} B)^{-1} h\|^2 = \sum_k |(B(I - u^{1/\rho} B)^{-1} h,\ e_k)|^2 =$$

$$= \sum_k |(s^{\frac{1}{\rho}-1} E_\rho\left(e^{i\frac{\pi}{2\rho}} u^{\frac{1}{\rho}} s^{\frac{1}{\rho}};\ \frac{1}{\rho}\right),\ (Q^* e_k)(s))|^2,$$

где $(Qf)(t)=\int_0^t f(s)\,h(t-s)\,ds$. Следовательно, если ρ изменяется в пределах $\left[\frac{1}{2}, 2\right)$, то можно воспользоваться свойствами преобразования М. М. Джрбашяна, о которых говорится в теореме А:

$$\int_R u^{2\left(\frac{1}{\rho}-1\right)}\|B(I-u^{\frac{1}{\rho}}B)^{-1}h\|^2\,du=\sum_k\int_R |u|^{2\left(\frac{1}{\rho}-1\right)}\times$$

$$\times\left|\left(s^{\frac{1}{\rho}-1}E_\rho\left(e^{i\frac{\pi}{2\rho}}u^{\frac{1}{\rho}}s^{\frac{1}{\rho}};\frac{1}{\rho}\right),\ (Q^*e_k)(s)\right)\right|^2 du\leqslant$$

$$\leqslant M\sum_k\int_0^1|(Q^*e_k)(s)|^2\,ds\leqslant M_1\|h\|^2,$$

поскольку оператор Q является оператором Гильберта—Шмидта и, стало быть, его абсолютная норма оценивается через норму h [24]. Для доказательства (4.5) при прочих значениях ρ необходимо воспользоваться асимптотическими формулами [1, с. 133], с помощью которых доказательство сводится к оценке

$$\int_R\left|\int_0^t e^{ius}f(t-s)\,ds\right|^2 du\leqslant K\|f\|^2,\ f\in L_2(0,1),$$

которая уже доказана ($\rho=1$).

Итак, в случае базисности рассматриваемой системы, существует подходящий оператор A, причем, в виду наличия разложений

$$h=\sum_{\lambda_k\in\Lambda}a_k y_{\lambda_k},\quad \|h\|^2\asymp\sum_{\lambda_k\in\Lambda}|a_k|^2\|y_{\lambda_k}\|^2,\quad h\in L_2(0,1)$$

справедливо неравенство

$$\int_{\gamma_\rho^0}|\lambda|^{1-\rho}\|(A-\lambda I)^{-1}h\|^2|d\lambda|\leqslant K\sum|a_k|^2\|y_{\lambda_k}\|^2\int_{\gamma_\rho^0}|\lambda|^{1-\rho}|\lambda_k-\lambda|^{-2}|d\lambda|,$$

где γ_ρ^0 — контур γ_ρ с выброшенной окрестностью нуля. Несложные вычисления, которые мы опускаем, показывают, что требование

$$\int_{\gamma_\rho^0}|\lambda|^{1-\rho}|\lambda_k-\lambda|^{-2}|d\lambda|<C,\ \lambda_k\in\Lambda$$

равносильно условию $|\operatorname{Im}\lambda_k^\rho|>\delta>0$ для всех $\lambda_k\in\Lambda$. Возвращаясь к предыдущему неравенству, получим

$$\int_{\gamma_\rho^0}|\lambda|^{1-\rho}\|(A-\lambda I)^{-1}h\|^2|d\lambda|\leqslant L\|h\|^2$$

для всех $h \in L_2(0,1)$. После замены переменной (4,5) запишем в виде

$$\int_{\gamma_\rho^0} |\lambda|^{1-\rho} \|B(I-\lambda B)^{-1} h\|^2 |d\lambda| \leqslant M\|h\|^2.$$

Учитывая вид резольвенты оператора A (§ 1), а также соотношение (4.3), из двух последних неравенств выводим

$$\int_{\gamma_\rho^0} |\lambda|^{\omega} \varphi^{-1}(\lambda) \left|((I-\lambda B)^{-1} h, x)\right|^2 |d\lambda| \leqslant M_1 \|h\|^2, \quad h \in L_2(0,1)'$$

причем здесь контур γ_ρ^0 уже можно заменить на γ_ρ. Пусть теперь l обозначает какой-нибудь луч Γ_ρ $(\rho > 1)$. Покажем, что

$$\int_{l} |\lambda|^{\omega} |\varphi^{-1}(\lambda) ((I-\lambda B)^{-1} h, x)|^2 |d\lambda| \leqslant L \int_{\gamma_\rho} |\lambda|^{\omega} |\varphi^{-1}(\lambda) ((I-\lambda B)^{-1} h, x)|^2 |d\lambda|,$$

для всех $h \in L_2(0,1)$. Поскольку это неравенство достаточно доказать для плотного множества, то выбирая в качестве такого множества совокупность всех конечных сумм вида $h = \sum c_k y_{\lambda_k}$, с учетом (1.1) найдем

$$\varphi^{-1}(\lambda)\, ((I-\lambda B)^{-1} h, x) = \varphi^{-1}(\lambda) \sum c_k \varphi(\lambda) (\lambda_k - \lambda)^{-1} = \sum c_k (\lambda_k - \lambda)^{-1}.$$

Поэтому выражение, стоящее справа, запишем в виде

$$\int_{\gamma_\rho} |\lambda|^{\omega} |\sum c_k (\lambda_k - \lambda)^{-1}|^2 |d\lambda| = \beta^{-1} \int_R |\sum c_k t^{\gamma} (\lambda_k - t^{1/\beta})^{-1}|^2 dt, \quad \gamma = \frac{\omega}{2\beta} + \frac{1-\beta}{2\beta},$$

где число β определяется равенством $\pi\beta^{-1} = 2\pi - \dfrac{\pi}{\rho}$. Так как функция

$$f(t) = \sum c_k t^{\gamma} (\lambda_k - t^{1/\beta})^{-1}$$

принадлежит классу Харди H_+^2, то справедливо неравенство [25—26]

$$\int_0^{\infty} |f(re^{i\varphi})|^2 dr \leqslant L_1 \int_R |f(t)|^2 dt, \quad 0 < \varphi < \pi.$$

Возвращаясь здесь к переменной λ, получим

$$\int_l |\lambda|^{\omega} |\sum c_k (\lambda_k - \lambda)^{-1}|^2 |d\lambda| \leqslant L \int_{\gamma_\rho} |\lambda|^{\omega} |\sum c_k (\lambda_k - \lambda)^{-1}|^2 |d\lambda|,$$

что и доказывает нужное неравенство. Таким образом, если принять во внимание все сказанное выше, то приходим к выводу, что имеет место оценка (1.2) и утверждение леммы следует из теоремы 1.1.

Лемма 4.2. *Пусть семейство* $\{y_{\lambda_k}\}$ *образует безусловный базис* $L_2(0,1)$ *и выполнено условие* (4.4). *Тогда последовательность* Λ' *отделима:*

$$\inf_{k \neq j} |z_k - z_j| > 0, \quad \{z_k\} = \Lambda^\rho.$$

Доказательство. Предположим сначала, что $\rho > \frac{1}{2}$ и докажем справедливость равенства

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} y_\lambda(t)\, e^{-i\lambda^\rho} (\lambda - \lambda_k)^{-1}\, d\lambda = e^{-i\lambda_k^\rho} y_{\lambda_k}(t), \quad t \in [0,1], \tag{4.6}$$

где контур обходится так, что внутренность γ_ρ остается справа. Прежде всего отметим, что фигурирующий здесь интеграл сходится в метрике $L_2(0, 1)$. Действительно, из теоремы 4.1 заключаем, что применима теорами A, согласно которой

$$\left\| \int_{\gamma_\rho} y_\lambda(t) f(\lambda)\, d\lambda \right\|^2_{L_2(0,1)} \leqslant M \int_{\gamma_\rho} |f(\lambda)|^2 |\lambda|^\omega |d\lambda|, \quad \omega = \rho + 1 - 2\rho\alpha. \tag{4.7}$$

Поскольку оператор дробного интегрирования, рассмотренный в $L_2(0,1)$, не имеет ядра, то для доказательства (4.6) достаточно доказать равенство, которое получается из (4.6) применением к обеим его частям этого оператора. Другими словами, достаточно доказать, что

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} t^{\gamma-1} E_\rho\left(e^{i\frac{\pi}{2\rho}} \lambda t^{\frac{1}{\rho}}; \gamma\right) e^{-i\lambda^\rho} (\lambda - \lambda_k)^{-1} d\lambda = e^{-i\lambda_k^\rho} t^{\gamma-1} E_\rho\left(e^{i\frac{\pi}{2\rho}} \lambda_k t^{\frac{1}{\rho}}; \gamma\right),$$

где $\gamma = \alpha + \beta$, а параметр β выбран так, чтобы $\gamma > 1$. Но доказательство этого равенства не представляет труда, поскольку теперь

$$\left|E_\rho\left(e^{i\frac{\pi}{2\rho}} \lambda t^{\frac{1}{\rho}}; \gamma\right) e^{-i\lambda^\rho}\right| \to 0, \quad t > 0$$

равномерно по λ внутри угла γ_ρ и можно воспользоваться формулами теории вычетов. Если теперь в (4.7) положить $f(\lambda) = \sum c_k (\lambda - \lambda_k)^{-1} e^{-i\rho}$, то с учетом (4.6) найдем

$$\left\| \sum c_k e^{-i\lambda_k^\rho} y_{\lambda_k} \right\|^2 \leqslant M \int_{\gamma_\rho} |\lambda|^\omega \left| \sum c_k (\lambda - \lambda_k)^{-1} \right|^2 |d\lambda|. \tag{4.8}$$

С другой стороны, из предыдущей леммы и теоремы 1.1 вытекает наличие оценки (1.2) для оператора A, чьи собственные векторы суть функции рассматриваемой системы. Если рассмотреть (1.2) на конечных суммах $h = \sum c_k y_{\lambda_k}$, то приходим к оценке

$$\int_{\gamma_\rho} |\lambda|^\omega \left| \sum c_k (\lambda - \lambda_k)^{-1} \right|^2 |d\lambda| \leqslant L \left\| \sum c_k y_{\lambda_k} \right\|^2. \tag{4.9}$$

Поэтому в случае базисности $\{y_{\lambda_k}\}$, с учетом (4.4), находим

$$\int_{\gamma_\rho} |\lambda|^\omega \left| \sum c_k (\lambda - \lambda_k)^{-1} \right|^2 |d\lambda| \asymp \sum |c_k|^2 \int_{\gamma_\rho} |\lambda|^\omega |\lambda - \lambda_k|^{-1} |d\lambda|$$

и остается воспользоваться теоремой 3.1. Заметим, что в силу (4.4) условие Карлесона равносильно евклидовой отделимости последовательности Λ^ρ.

Если $\rho = \frac{1}{2}$, то принимая во внимание интегральное представление [1, с. 129], получим

$$y_{\lambda_k}(t) = \varepsilon z_k^{1-\alpha} e^{iz_k t} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin\left(xt + \frac{\pi}{2}.(1-\alpha)\right)}{x^2 - z_k^2} x^{2-\alpha} dx, \; |\varepsilon| = 1, \; |z_k| = \Lambda^{\frac{1}{2}}.$$

Из этого соотношения, опираясь на свойства преобразования Фурье, выводим неравенство

$$\left\| \sum c_k y_{\lambda_k} \right\|^2 \leqslant M \left\{ \int_{-\infty}^{1} \left| \sum c_k z_k^{1-\alpha} e^{iz_k t} \right|^2 dt + \int_R \left| \sum c_k x^{2-\alpha} (x^2 - z_k^2)^{-1} \right|^2 dx \right\} <$$

$$\leqslant M_1 \left\{ \int_R \left| \sum c_k z_k^{1-\alpha} e^{iz_k} (t - z_k)^{-1} \right|^2 dt + \int_R \left| \sum c_k x^{2-\alpha} (x^2 - z_k^2)^{-1} \right|^2 dx \right\}.$$

Поскольку в рассматриваемом случае $\omega = \frac{3}{2} - \alpha$, то можно воспользоваться оценкой (3.3). Окончательно находим:

$$\sum c_k y_{\lambda_k} \|^2 \leqslant M_1 \int_0^\infty t^\omega \left[\left| \sum c_k a_k (\lambda_k - t)^{-1} \right|^2 + \left| \sum c_k (\lambda_k - t)^{-1} \right|^2 \right] dt, \; a_k = e^{iz_k}. \tag{4.10}$$

Соединяя это неравенство с (4.9) при $\rho = \frac{1}{2}$, снова заключаем, что в случае базисности семейства $\{y_{\lambda_k}\}$ последовательность $\Lambda^{1/2}$ отделима. Лемма доказана.

Лемма 4.3. *Если семейство $\{y_{\lambda_k}\}$ образует безусловный базис $L_2(0,1)$, то $h_\varphi\left(-\frac{\pi}{2\rho}\right) = 1$ $\left(\text{если } \rho = 1, \text{ то также } h_\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0\right)$, где $\Lambda^{1/2}$ — индикатор, порождающей функции этого семейства.*

Доказательство. Рассмотрим снова подходящий оператор

$$A^{-1} h = Bh + (h, x)\, y,$$

существование которого гарантируется теоремой 4.1. В результате несложных оценок, приходим к выводу, что в случае $h_\varphi\left(-\frac{\pi}{2\rho}\right) < 1$ функция $x(t) \overset{\text{п.в.}}{=} 0$, если $t \in (t_0, 1)$. Тогда подпространство

$$L = \{h \in L_2(0,1) \colon h(t) \overset{\text{п.в.}}{=} 0, \; t \in [0, t_0]\}$$

инвариантно относительно оператора A^{-1} и на нем индуцируется вольтерров оператор $A^{-1}/L=B/L$. Последнее несовместимо с базисностью собственных векторов оператора A. Отметим также, что дополнительное условие $h_\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ также может быть доказано с помощью операторных рассуждений.

После проведенной подготовительной работы, обратимся теперь к задаче о базисности семейств функций типа Миттаг—Леффлера.

Теорема 4.2. *Пусть* $\rho\geqslant\frac{1}{2}$, *последовательность* Λ *удовлетворяет условию* (4.4). *Тогда семейство функций*

$$\{t^{\alpha-1}E_\rho(e^{i\frac{\pi}{2\rho}}\lambda_k t^{\frac{1}{\rho}};\alpha):\lambda_k\in\Lambda\}$$

образует безусловный базис пространства $L_2(0,1)$ *в том и только том случае, когда выполнена совокупность требований:*

1). $\frac{1}{2}<\alpha<\frac{1}{2}+\frac{1}{\rho}$.

2). *Элементы* Λ *суть простые корни целой функции* $\varphi(\lambda)$, *тип которой равен* 1 *при порядке* ρ.

3). *Функция* $|\lambda|^{-\omega}|\varphi(\lambda)|^2$ $(\omega=\rho+1-2\rho\alpha)$ *удовлетворяет* A_Γ *условию на каком-нибудь контуре* Γ_ρ.

4). $h_\varphi\left(-\frac{\pi}{2\rho}\right)=1$, *а в случае* $\rho=1$, *то также* $h_\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$.

5). *Последовательность* Λ^ρ *отделима:*

$$\inf_{k\neq j}|z_k-z_j|>0,\ \Lambda^\rho=\{z_k\}.$$

Доказательство. Осталось доказать достаточность перечисленных условий. Пусть l_k — какой-нибудь луч контура Γ_ρ. Из требования 3) вытекает, что

$$\sup_J\left\{|J|^{-1}\int_J t^{-\omega}|\varphi(te^{ix_k})|^2\,dt\,|J|^{-1}\int_J t^{\omega}|\varphi(te^{ix_k})|^{-2}\,dt\right\}<\infty,$$

где J — произвольный интервал полуоси R_+, а x_k — аргумент точек луча l_k. Отсюда, в свою очередь, выводим [15, с. 46]

$$\int_0^\infty t^{-\omega}\frac{|\varphi(te^{ix_k})|^2}{1+t^2}\,dt<\infty,\ k=0,1,\cdots,n.$$

Если вспомнить, что порождающую функцию мы нормируем условием $\varphi(0)=1$, то последние соотношения равносильны требованиям

$$\int_0^\infty t^{-\omega}\left|\frac{\varphi(te^{ix_k})-1}{t}\right|^2 dt<\infty,\ k=0,1,\cdots,n,\ \omega\in(-1,1).$$

Учитывая строение контура Γ_ρ, применим к функции $\psi(\lambda) = \lambda^{-1}(1-\varphi(\lambda))$ теорему C о параметрическом представлении целых функций, удовлетворяющих интегральным условиям на системе лучей. Таким образом, с учетом четвертого условия теоремы, получаем интегральное представление для порождающей функции:

$$\varphi(\lambda) = 1 - \lambda \int_0^1 E_\rho(e^{i\frac{\pi}{2\rho}} \lambda t^{\frac{1}{\rho}}; \alpha)\, t^{\alpha-1}\, \overline{x(t)}\, dt, \quad x \in L_2(0,1),$$

где $\alpha = (2\rho)^{-1}(1+\rho-\omega)$. Далее, в пространстве $L_2(0,1)$ рассмотрим оператор

$$(A^{-1}h)(t) = e^{i\frac{\pi}{2\rho}} \Gamma^{-1}\left(\frac{1}{\rho}\right) \int_0^t (t-s)^{\frac{1}{\rho}-1} h(s)ds + (h, x)\, y, \; y(t) = \Gamma^{-1}(\alpha)\, t^{\alpha-1}.$$

Теперь функции рассматриваемой системы совпадают с собственными векторами оператора A, а его спектр — с последовательностью Λ. Из теоремы 1.1 вытекает наличие оценки (1.2) и, стало быть, оценки (4.9). Соединяя это с неравенством (4.8), а при $\rho = \frac{1}{2}$ — с (4.10), на основании результатов § 3, приходим к соотношениям

$$\|\sum c_k y_{\lambda_k}\|^2 \asymp \sum |c_k|^2 \|y_{\lambda_k}\|^2.$$

Заметим, наконец, что полнота рассматриваемого семейства следует из теоремы 2.1. Теорема доказана.

Теперь мы в состоянии дополнить теорему 4.1 следующим предложением.

Предложение 4.1. *Для каждого набора параметров ρ, α, удовлетворяющего неравенствам $\rho \geqslant \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} < \alpha < \frac{1}{2} + \frac{1}{\rho}$, существует безусловный базис $L_2(0,1)$, составленный из функции Миттаг—Леффлера.*

В самом деле, в качестве порождающей функции возьмем

$$\varphi(\lambda) = 1 - \lambda a^{-1} E_\rho(e^{i\frac{\pi}{2\rho}}\lambda; \alpha+\beta), \; \beta = \rho^{-1}(1+\rho-\alpha\rho), \quad a \in C,$$

которой отвечает выбор функции $x(t) = a^{-1}\Gamma^{-1}(\beta)(1-t)^{\beta-1}$, принадлежащей $L_2(0,1)$. Выбирая α должным образом можно добиться выполнения всех условий теоремы 4.2. Заметим, что возможное появление кратных корней не препятствует применению этой теоремы, поскольку их может быть лишь конечное число.

В работе [5] рассматривался также вопрос о базисности более общих семейств функций $\{Y_{\lambda_k}(t)\}$, где

$$Y_{\lambda_k}(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j t^{\alpha_j - 1} E_\rho(e^{i\frac{\pi}{2\rho}} \lambda_k t^{\frac{1}{\rho}}; \alpha_j), \quad \alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \cdots \leqslant \alpha_n.$$

Используя элементарные свойства функций типа Миттаг—Леффлера, нетрудно доказать, что это семейство образует безусловный базис пространства L_2 (0, 1) в том и только том случае, когда этим же свойством обладает система

$$\{t^{\alpha_1-1} E_\rho (e^{i\frac{\pi}{2\rho}} \lambda_k t^{\frac{1}{\rho}};\ \alpha_1) : \lambda_k \in \Lambda\}.$$

Таким образом, теорема 4.2 дает ответ и на этот вопрос.

Можно рассмотреть также и тот случай, когда Λ лежит вне главного угла $\gamma_\rho \left(\rho > \frac{1}{2}\right)$ и удовлетворяет требованию

$$|\mathrm{Im}\, \lambda_k^\rho| > \delta > 0,\ \lambda_k \in \Lambda, \tag{4.11}$$

где λ^ρ определена на плоскости с разрезом по мнимой положительной полуоси и выделена условием $\arg \lambda^\rho = 0$, если $\lambda > 0$. Поскольку решение этой задачи не требует принципиально новых соображений, то здесь сформулирован лишь конечный результат. В приведенной ниже теореме условие $(A^2_{\gamma_\rho})$ означает то же, что и $(A^2_{\Gamma_\rho})$ с заменой Γ_ρ на γ_ρ (§ 1).

Теорема 4.2′. *Пусть* $\rho > \frac{1}{2}$, *а* Λ *удовлетворяет условию* (4.11). *Тогда семейство функций типа Миттаг—Леффлера образует безусловный базис пространства* L_2 (0,1) *тогда и только тогда, когда выполнено требование* 1) *теоремы* 4.2, *а также:*

2′). *Элементы* Λ *суть простые корни целой функции* $\varphi(\lambda)$ *порядка* ρ *и нормального типа, для которой*

$$\lambda^{-1}(1-\varphi(\lambda)) \in A_1^2\left(-\omega;\ 0;\ -\frac{\pi}{\rho}\right),\ \omega = \rho + 1 - 2\rho\alpha.$$

$$3'). \ \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log|\varphi(re^{-i\frac{\pi}{2\rho}})|}{r^\rho} = 1,\ \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log|\varphi(re^{i\gamma})|}{r^\beta} = 0,$$

$$\beta = \rho(2\rho-1)^{-1},\ \gamma = \pi - \frac{\pi}{2\rho}.$$

4′). *Функция* $|\lambda|^{-\omega}|\varphi(\lambda)|^2$ *удовлетворяет* $A^2_{\gamma_\rho}$-*условию.*

5′). *Последовательность* Λ^β *удовлетворяет условию Карлесона.*

Отметим, что последовательность Λ^β из условия 5′) имеет тот же смысл, что и в рассмотрениях § 3.

Остановимся на тех случаях, когда рассматриваемые функции выражаются через элементарные:

$$E_1(i\lambda t; 1) = e^{i\lambda t},\ E_{1/2}(-\lambda t^2;\ 1) = \cos\sqrt{\lambda} t,\ tE_{1/2}(-\lambda t^2;\ 2) = \frac{\sin\sqrt{\lambda} t}{\sqrt{\lambda}}.$$

Сформулированные теоремы содержат в себе критерий базисности в смысле Рисса семейств экспонент, но не дают ответа на аналогичный вопрос для косинусов и синусов. Рассмотрим, например, задачу о базисности по Риссу семейства $\{\cos\sqrt{\lambda_k}t : \lambda_k \in \Lambda\}$. Из условия почти нормируемости $\|\cos\sqrt{\lambda_k}t\| \asymp 1$ вытекает, что последовательность Λ должна лежать внутри некоторой Δ_a, которая задается уравнением $z(t) = (t + ia)^2$ $t \in R$, $a > 0$. Поэтому для решения этой задачи применяется оценка вида (1.2) на контуре Δ_a (см. Замечание 1.1), а в остальном все рассуждения остаются практически неизменными. Заметим еще, что в этом случае получается простая формула для оператора A, собственные функции которого совпадают с заданной системой косинусов:

$$Ay = -y'', \tag{4.12}$$

а его область определения состоит из функций пространства Соболева $W_2^2(0,1)$, выделяемых условиями:

$$y'(0) = 0, \ \hat{\varphi}(y) = 0, \tag{4.13}$$

где $\hat{\varphi}$ — линейный ограниченный функционал в $W_2^2(0,1)$. При этом, никакая линейная комбинация функционалов $\delta'(t)$ (δ — функция Дирака) и $\hat{\varphi}$ не продолжаются до ограниченного функционала в $L_2(0,1)$, а для порождающей функции φ семейства $\{\cos\sqrt{\lambda_k}t : \lambda_k \in \Lambda\}$ имеет место представление

$$\varphi(\lambda) = \hat{\varphi}(\cos\sqrt{\lambda}t).$$

Решение рассматриваемой задачи дает

Теорема 4.3. *Собственные функции оператора* (4.12)—(4.13) *образуют базис Рисса пространства* $L_2(0,1)$ *в том и только том случае, когда:*

1). $\varphi(\lambda)$ *имеет простые корни, а последовательность* $\Lambda^{1/2}$ *удовлетворяет условиям*:

$$b = \sup_{z_k} |\mathrm{Im}\, z_k| < \infty, \ \inf_{k \neq j} |z_k - z_j| > 0, \ \inf_{k,\, j} |z_k + z_j| > 0, \ \Lambda^{1/2} = \{z_k\}.$$

2). $h_\varphi(-\pi) = 1$.

3). *На каком-нибудь контуре* $\Delta_a\,(a > b)$ *функция* $|\lambda|^{-\frac{1}{2}}|\varphi(\lambda)|^2$ *удовлетворяет условию* $(A^2_{\Delta_a})$.

Замечание. 4.3. Сформулированная теорема остается в силе и для общих операторов Штурма—Лиувилля в пространстве $L_2(0,1)$:

$$Ly = -y'' + qy, \ y'(0) = \theta y(0), \ \hat{\varphi}(y) = 0, \ \theta \in C,$$

где функционал $\hat{\varphi}$ имеет прежний смысл. Это объясняется тем, что при известных ограничениях на потенциал q [27], существуют операторы преобразования, переводящие решение уравнения

$$Ly(t, \lambda) = \lambda y(t, \lambda), \ y'(0, \lambda) = \theta, \ y(0, \lambda) = 1$$

в функцию $\cos\sqrt{\lambda}t$. Таким образом, система собственных векторов оператора L образует базис Рисса, если и только если функция $\varphi(\lambda) = \hat{\varphi}(y(t, \lambda))$ удовлетворяет условиям теоремы 4.3. Этот результат, в качестве частного случая $(\hat{\varphi}=\delta(t-1)+\eta\delta'(t-1)$ содержит известную теорему о базисности оператора Штурма-Лиувилля с разделенными граничными условиями [27, с. 50].

Заканчивая статью, сформулируем интерполяционные следствия доказанных ранее теорем. Связь между задачами базисности и интерполяции отмечалась многими авторами. В нашей ситуации общие принципы такой связи основаны на свойствах преобразований М. М. Джрбашяна с ядрами Миттаг—Леффлера (см. Введение) и изложены в [7—8, 28]. Поэтому здесь будут сформулированы только окончательные результаты.

Через $l^2\{b_k\}$ будем обозначать пространство последовательностей $\{c_k\}_1^\infty$ с нормой $\|\{c_k\}\|^2=\sum|c_k|^2 b_k,\ b_k>0$. Далее, снабдим класс функций $A_1^2\left(-\omega;\ 0;\ -\frac{\pi}{\rho}\right)$ нормой

$$\|f\|^2=\sup_\theta\int_0^\infty|f(re^{i\theta})|^2r^{-\omega}\,dr,\ \theta\in\left[0,\ 2\pi-\frac{\pi}{\rho}\right]$$

и рассмотрим на нем оператор

$$J_\Lambda f=\{f(\lambda_k):\lambda_k\Lambda\},$$

где $\Lambda=\{\lambda_k\}_1^\infty$ — фиксированная последовательность комплексных чисел, занумерованная в порядке неубывания модулей. Имеет место

Теорема 4.4. *Следующие условия эквивалентны:*

1). *Последовательность Λ удовлетворяет требованиям теоремы 4.2.*

2). *Оператор J_Λ непрерывно отображает пространство $A_1^2\left(-\omega;\ 0;\ -\frac{\pi}{\rho}\right)$ на пространство $l^2\{b_k\}$ с весом*

$$b_k=k^{2(\alpha-1)},\ \alpha=(2\rho)^{-1}(1+\rho-\omega),\ k\geqslant 1.$$

Отметим, что решение соответствующей интерполяционной задачи

$$f(\lambda_k)=c_k,\ \{c_k\}\in l^2\{b_k\}$$

дается рядом

$$f(\lambda)=\sum_{k=1}^\infty c_k\frac{\varphi(\lambda)}{\varphi'(\lambda_k)(\lambda-\lambda_k)},$$

который сходится как по норме класса $A_1^2\left(-\omega;\ 0;\ -\frac{\pi}{\rho}\right)$, так и равномерно на всех компактах плоскости. Функкция φ имеет здесь тот же смысл, что и в теореме 4.2. Совершенно ясно, что аналогичное интерполяционное следствие может быть выведено также из теоремы 4.2'.

Некоторые частные случаи рассмотренных интерполяционных задач изучались в работах [4, 7—8, 28—29], в которых рассматривались также задачи с интерполяционными данными из весовых пространств l_p.

Одесский педагогический
институт

Поступила 20. IV. 1986

Գ. Մ. ԳՈՒԲՐԵԵՎ. Միտտագ-Լեֆլերի տիպի ֆունկցիաների բազիսությունը, Ջրբաշյանի ձևափոխությունները և Կոշու տիպի ինտեգրալների որոշ կշռային գնահատականներ *(ամփոփում)*

Հոդվածում գտնված է

$$\{t^{\alpha-1} E_\rho(e^{i\frac{\pi}{2\rho}} \lambda_k t^{\frac{1}{\rho}}; \alpha) : \lambda_k \in \Lambda\},\ \rho \geqslant \frac{1}{2},\ \alpha > \frac{1}{2}$$

տեսքի ֆունկցիոնալ ընտանիքների անպայման բազիսության հայտանիշը $L_2(0, 1)$ *տարածությունում։ Այստեղ* $E_\rho(z; \alpha)$ *ամբողջ ֆունկցիան որոշված է.*

$$E_\rho(z; \alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha + k\rho^{-1})}$$

շարքով։ Պատասխանը տրված է ρ *կարգի մի ամբողջ ֆունկցիայի տերմիններով, որի զրոները համընկնում են* Λ *բազմության հետ (ծնորդ ֆունկցիա)։ Հետազոտված են նաև մի շարք հարակից խնդիրներ՝ ռացիոնալ ֆունկցիաների բազիսությունը կշռային տարածությունում, ինտերպոլյացիան վերջավոր կարգի ամբողջ ֆունկցիաների միջոցով և այլն։*

G. M. GUBREEV. *Basisity of the families of Mittag—Leffler type functions, Djrbashian transforms and weight estimates of Cauchy type integrals* (summary)

In the paper the criteria of nonconditional basisity in the space $L_2(0, 1)$ of the families of the functions

$$\{t^{\alpha-1} E_\rho(e^{i\frac{\pi}{2\rho}} \lambda_k t^{\frac{1}{\rho}}; \alpha) : \lambda_k \in \Lambda\},\ \rho \geqslant \frac{1}{2},\ \alpha > \frac{1}{2}$$

is obtained. Here the entire function $E_\rho(z; \alpha)$ is determined by the series

$$E_\rho(z; \alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha + k\rho^{-1})}.$$

The answer is given in the terms of an entire function of order ρ, whose zeros coincide with the set Λ (generative function). A series of connected problems is investigated: the basisity of rational functions in the weighted space, the interpolation by the entire functions of finite order and others.

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. М. Джрбашян.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, М., «Наука», 1966.
2. *N. Wiener.* On the closure of certain assemblages of trigonometric functions, Proc. Nat. Acad. Sci., USA, 13, 1927, 27.
3. *Н. Винер, Р. Пэли.* Преобразование Фурье в комплексной области. М., «Наука», 1964.
4. *S. V. Hruščov, N. K. Nikol'skij, B. S. Pavlov.* Unconditional base of exponentials and of reproducing kernels, Lecture Notes in Math., 864, 1981, 214—335.
5. *М. М. Джрбашян, А. Б. Нерсесян.* Разложения по специальным биортогональным системам и краевые задачи для диффеернциальных уравнений дробного порядка, ДАН СССР, 132, №4, 1960, 747—750, Труды Моск. матем. об-ва, 10, 1961, 89—179.
6. *М. М. Джрбашян.* Краевая задача для дифференциального оператора дробного порядка типа Штурма—Лиувилля, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», V, № 2, 1970, 71—96.

7. *С. Г. Рафаелян.* О базисности некоторых систем целых функций, ДАН Арм.ССР, 70, № 4, 1980, 198—204.
8. *С. Г. Рафаелян.* Базисность некоторых биортогональных систем в L_2 $(-\sigma, \sigma)$ с весом, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», XIX, № 3, 1984, 207—218.
9. *Г. М. Губреев.* Базисность семейств функций типа Миттаг—Леффлера, преобразования Джрбашяна и условие Макенхаупта, Функц. анализ и его прилож., 21, вып. 3, 1987.
10. *Б. С. Павлов.* Базисность систем экспонент и условие Макенхаупта, ДАН СССР, 247, № 1, 1979, 37—40.
11. *Б. С. Павлов.* Спектральный анализ дифференциального оператора с «размазанным» граничным условием, Проблемы матем. физики, ЛГУ, вып. 6, 1973, 101—119.
12. *А. П. Хромов.* Конечномерные возмущения вольтерровых операторов, Матем. заметки, 16, № 4, 1974, 669—680.
13. *Г. М. Губреев.* Обобщенные преобразования Джрбашяна и их применения, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», XXI, № 3, 1986, 306—310.
14. *Дж. Гарнетт.* Ограниченные аналитические функции, М., «Мир», 1984.
15. *Е. М. Динькин, Б. П. Осиленкер.* Весовые оценки сингулярных интегралов и их приложения, Итоги науки и техники, матем. анализ, 21, 1983, 42—129.
16. *Б. М. Левитан.* Теория операторов обобщенного сдвига, М., «Наука», 1973.
17. *Б. Я. Левин.* Распределение корней целых функций, М., ГИТТЛ, 1956.
18. *И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн.* Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения, М., «Наука», 1967.
19. *Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц.* Линейные операторы, т. 2, М., «Мир», 1966.
20. *В. М. Мартиросян.* Базисность некоторых систем аналитических функций и решение интерполяционной задачи в области угла, ДАН Арм.ССР, LXIII, № 5, 1976, 278—283.
21. *В. М. Мартиросян.* Замыкание и базисность некоторых биортогональных систем и решение кратной интерполяционной задачи в угловых областях, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», XIII, № 5—6, 1978, 490—531.
22. *В. М. Мартирсоян.* Замыкание и базисность некоторых биортогональных систем и решение кратной интерполяционной задачи в H_p $[\alpha; \omega]$, ДАН СССР, 245, № 1, 1979, 24—27.
23. *М. М. Джрбашян.* Базисность некоторых биортогональных систем и решение кратной интерполяционной задачи в классах H^p в полуплоскости, Изв. АН СССР, сер. матем., 42, № 6, 1978, 1322—1383.
24. *И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов, М., «Наука», 1965.
25. *М. М. Джрбашян, А. Е. Аветисян.* Интегральные представления некоторых классов функций, аналитических в области угла, ДАН СССР, 120, № 3, 1958, 475—480; Сиб. матем. ж., 1, № 3, 1960, 383—426.
26. *С. А. Акопян.* Теорема о двух постоянных для функций класса H_p, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», VIII, № 1, 1973, 384—409.
27. *В. А. Марченко.* Операторы Штурма—Лиувилля и их приложения, Киев, «Наукова думка», 1977.
28. *М. М. Джрбашян.* Интерполяционные и спектральные разложения, ассоциированные с дифференциальными операторами дробного порядка, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», XIX, № 2, 1984, 81—181.
29. *Б. Я. Левин.* Интерполяция целыми функциями экспоненциального типа, Матем. физика и функц. анализ, ФТИНТ АН УССР, № 1, 1969, 136—146.