ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XXIII, № 3, 1988 Математика

УДК 517.54

А. Э. ДЖРБАШЯН, А. О. КАРАПЕТЯН

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА МЕЖДУ СОПРЯЖЕННЫМИ ПЛЮРИГАРМОНИЧЕСКИМИ ФУНКЦИЯМИ В МНОГОМЕРНЫХ ОБЛАСТЯХ

Введение

Обозначим через $\mathbf{D}$ единичный круг в комплексной плоскости $\mathbf{C}: \mathbf{D} = \{z : |z| < 1\}$. Рассмотрим класс всех аналитических в $\mathbf{D}$ функций f, для которых конечна величина

$$\|f\|_{p,\alpha}^p = \frac{1+\alpha}{\pi} \iint_{\mathbf{D}} |f(z)|^p (1-|z|)^\alpha dm_2(z),$$

где $0 < p < \infty$, $\alpha > -1$ и dm_2—плоская мера Лебега. Обозначим этот класс через A_α^p.

Эти пространства впервые были введены в работах [1], [2] и там же был доказан следующий фундаментальный результат.

Теорема А. Если $f \in A_\alpha^p$, $1 < p < \infty$, $\alpha > -1$, то справедливы представления

$$f(z) = \frac{1+\alpha}{\pi} \iint_{\mathbf{D}} \frac{f(w)}{(1-z\overline{w})^{2+\alpha}} (1-|w|^2)^\alpha \, dm_2(w), \tag{1}$$

$$\overline{f(0)} = \frac{1+\alpha}{\pi} \iint_{\mathbf{D}} \frac{\overline{f(w)}}{(1-z\overline{w})^{2+\alpha}} (1-|w|^2)^\alpha \, dm_2(w). \tag{2}$$

Классы A_α^p, являясь естественным и существенным обобщением классических пространств Харди H^p, обладают рядом свойств, которыми они сильно отличаются от этих пространств. Одним из таких свойств является свойство ограниченности оператора гармонического сопряжения при $0 < p \leqslant 1$ ([3]—[5]).

Теорема В. Пусть $0 < p < \infty$, $\alpha > -1$ и $f = u + iv$ аналитична в $\mathbf{D}$. Если f нормирована условием $\operatorname{Im} f(0) = 0$, то существует константа C, зависящая только от p и α и такая, что

$$\iint_{\mathbf{D}} |f(z)|^p (1-|z|)^\alpha \, dm_2(z) \leqslant C \iint_{\mathbf{D}} |u(z)|^p (1-|z|)^\alpha \, dm_2(z). \tag{3}$$

Оказывается, что этот факт является универсальным и имеет место также в соответствующих пространствах функций в других областях. Например, для подходящих обобщений классов A_α^p в полупространствах для гармонических функций (и при подходящем определе-

нии понятия сопряженной гармонической функции) этот результат доказан в [6].

Соответствующий результат для классов A_α^p в единичном шаре в $\mathbf{C}^n$ является простым следствием теоремы B^*. Действительно, вспомним элементарную формулу ($\mathbf{B}$ — единичный шар в $\mathbf{C}^n$, $S=\partial\mathbf{B}$, $d\sigma$ — мера Лебега на S)

$$\int_{\mathbf{B}} \varphi(w)\, dm_{2n}(w) = \frac{1}{2\pi} \int_S d\sigma(\zeta) \int_{\mathbf{D}} \varphi(z\zeta)\, z^{2n-2}\, dm_2(z) \tag{4}$$

(см., напр., [7]). Теперь, если f — некоторая голоморфная функция в $\mathbf{B}$, $f=u+iv$ (u и v плюригармоничны, $v(0)=0$), и $0<p<\infty$, $\alpha>-1$, то по формуле (4) и теореме B будем иметь

$$\int_{\mathbf{B}} |f(w)|^p (1-|w|)^\alpha\, dm_{2n}(w) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_S d\sigma(\zeta) \int_{\mathbf{D}} |f(z\zeta)|^p |z|^{2n-2} (1-|z|)^\alpha\, dm_2(z) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C}{2\pi} \int_S d\sigma(\zeta) \int_{\mathbf{D}} |u(z\zeta)|^p |z|^{2n-2} (1-|z|)^\alpha\, dm_2(z) =$$

$$= C \int_{\mathbf{B}} |u(w)|^p (1-|w|)^\alpha\, dm_{2n}(w).$$

Настоящая работа посвящена доказательству этого неравенства для плюригармонических функций класса A_α^p в различных многомерных комплексных областях. Оказывается, что во многих случаях результаты в многомерных областях также можно свести к одномерному случаю. Для этого мы приводим некоторые результаты из теории пространств A_α^p в полуплоскости и, в частности, подробное доказательство неравенства между сопряженными гармоническими функциями класса A_α^p. Этот факт в дальнейшем существенно используется при доказательстве аналогов этого результата в многомерных областях.

В § 2 устанавливаются интегральные неравенства между сопряженными плюригармоническими функциями, заданными в некоторых многомерных областях $D\subset\mathbf{C}^{n+m}$, $n\geqslant 1$, $m\geqslant 0$, имеющих специфический вид. Эти области несколько более общие, чем афинно-однородные комплексные области Зигеля, изученные в работе [8]. Для доказательства основных результатов при $p\in(0,\infty)$ и $\alpha\in\mathbf{R}^1$ вводятся пространства $A_\alpha^p(D)$ голоморфных в D функций, интегрируемых с определенным весом. При специальном выборе области D и параметра α, пространства $A_\alpha^p(D)$ совпадают с пространствами $A^{n,r}$, введенными в [5].

---

* Авторы благодарны А. Б. Александрову, указавшему им на этот простой способ доказательства.

При $n=1$, $m=0$, D совпадает с верхней полуплоскостью, а $A^p_\alpha(D)$ дают пространства, рассмотренные в § 1.

В заключительном параграфе дается несколько иное, чем в § 2, обобщение соответствующего одномерного результата. Здесь рассматриваются многомерные области D, более общие по сравнению с теми, что рассматривались в предыдущем параграфе (не требуем от основного конуса афинной однородности). В силу этого фигурирующие в определении пространств $A^p_\alpha(D)$, $p\in(0,\infty)$, $\alpha\in\mathbf{R}^1$ веса менее специфические.

§ 1. Неравенства между сопряженными гармоническими функциями в верхней полуплоскости

Обозначим через $\mathbf{C}_+$ верхнюю полуплоскость в комплексной плоскости и рассмотрим там класс $A^p_\alpha(\mathbf{C}_+)$, $0<p<\infty$, $\alpha>-1$, определенный следующим образом: $f\in A^p_\alpha$, если f аналитична в $\mathbf{C}_+$

$$\|f\|_{p,\alpha}=\left(\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty |f(x+iy)|^p\, y^\alpha\, dx\, dy\right)^{1/p}<\infty.$$

Аналогичный класс гармонических функций в $\mathbf{C}_+$ будем обозначать через $hA^p_\alpha=hA^p_\alpha(\mathbf{C}_+)$.

В работе [9] было установлено интегральное представление для функций класса A^p_α в полуплоскости. Мы приведем его с небольшим дополнением: нижеследующая формула (1.2) получается из формулы (2) точно таким же образом, как в работе [9] была получена формула (1.1) из формулы (1).

Теорема С. Если $f\in A^p_\alpha(\mathbf{C}_+)$ и $1\leqslant p<\infty$, $\alpha>-1$, то имеют место представления

$$f(z)=C_\alpha\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty \frac{f(w)}{(\overline{w}-z)^{2+\alpha}}(\operatorname{Im} w)^\alpha\, dm_2(w), \tag{1.1}$$

$$0=C_\alpha\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty \frac{\overline{f(w)}}{(\overline{w}-z)^{2+\alpha}}(\operatorname{Im} w)^\alpha\, dm_2(w), \tag{1.2}$$

где C_α—некоторая константа, зависящая только от α.

Если функция f принадлежит классу A^p_α при $0<p<1$, то имеет место аналогичное интегральное представление с некоторым другим показателем, зависящим от p и α. Это вытекает из следующей леммы, которую мы заимствовали из работы [10] (предложение 2.2).

Лемма 1. Если $1\leqslant p<\infty$, $\alpha>-1$, то верно вложение $A^p_\alpha\subset A^1_{\frac{1+\alpha}{p}-1}$, а если $0<p\leqslant 1$, то вложение $A^p_\alpha\subset A^1_{\frac{2+\alpha}{p}-2}$.

Применяя эту лемму, немедленно получаем следующий результат

Теорема 1. *Если* $f \in A^p_\alpha(\mathbf{C}_+)$, $0 < p < \infty$, $\alpha > -1$, *то справедливо представление*

$$f(z) = C_\beta \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \frac{f(w)}{(\overline{w} - z)^{2+\beta}} (\operatorname{Im} w)^\beta \, dm_2(w), \tag{1.3}$$

где при $0 < p \leqslant 1$, $\beta \geqslant \frac{2+\alpha}{p} - 2$, *а при* $1 \leqslant p < \infty$, $\beta \geqslant \frac{1+\alpha}{p} - 1$.

При тех же значениях параметра β

$$0 = C_\beta \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \frac{\overline{f(w)}}{(\overline{w} - z)^{2+\beta}} (\operatorname{Im} w)^\beta \, dm_2(w). \tag{1.4}$$

Формулы (1.3) и (1.4) вместе дают

Следствие 1. В условиях теоремы 1, если $f(z) = u(z) + iv(z)$, то

$$f(z) = 2C_\beta \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \frac{u(w)}{(\overline{w} - z)^{2+\beta}} (\operatorname{Im} w)^\beta \, dm_2(w). \tag{1.5}$$

Следствие 2. Если $u \in hA^p_\alpha(\mathbf{C}_+)$, то справедливо представление

$$u(z) = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty u(w) \, R_\beta(z, w) (\operatorname{Im} w)^\beta \, dm_2(w),$$

где $R_\beta(z, w) = \operatorname{Re} \{2C_\beta (\overline{w} - z)^{-2-\beta}\}$ и параметр β удовлетворяет условиям теоремы 1.

Ясно, что если функция f принадлежит пространству A^p_α, то ее вещественная и мнимая части принадлежат пространству hA^p_α. Мы докажем, что верно и обратное: если гармоническая функция принадлежит hA^p_α, то ее аналитическое дополнение, то есть аналитическая функция с этой вещественной частью, принадлежит пространству A^p_α. Из этого, в частности, будет вытекать интегральное неравенство между сопряженными гармоническими функциями.

Для этого нам понадобится еще одна лемма, за доказательством которой мы отсылаем к [6].

Лемма 2. Пусть полуплоскость $\mathbf{C}_+$ разбита на двоичные квадраты, которые мы некоторым образом пронумеруем и обозначим через $\{\Delta_k\} : \bigcup_{k=1}^\infty \Delta_k = \mathbf{C}_+$. Пусть Δ_k^* обозначает квадрат с тем же центром $z_k = x_k + iy_k \in \mathbf{C}_+$, что и Δ_k и со сторонами в 5/4 раза большей длины. Тогда, если u гармонична в $\mathbf{C}_+$, то для всех p и α, $0 < p < \infty$, $\alpha > -1$

$$\max_{z \in \Delta_k} |u(z)|^p \cdot y_k^\alpha \leqslant \frac{C}{|\Delta_k^*|} \int_{\Delta_k^*} |u(w)|^p (\operatorname{Im} w)^\alpha \, dm_2(w).$$

Здесь $|E|$ — лебегова мера множества E.

Теорема 2. *Пусть гармоническая в C_+ функция u принадлежит пространству hA^p_α, $0 < p < \infty$, $\alpha > -1$. Если функция $f = u + iv$ аналитична в C_+ и $v(\infty) = 0$, то она принадлежит пространству A^p_α, при этом*

$$\iint\limits_{C_+} |f(z)|^p (\operatorname{Im} z)^\alpha \, dm_2(z) \leqslant C \iint\limits_{C_+} |u(z)|^p (\operatorname{Im} z)^\alpha \, dm_2(z),$$

где константа C не зависит от функций, участвующих в неравенстве.

Доказательство. Введем в рассмотрение функцию

$$F(z) \equiv F_\beta(z) = 2C_\beta \iint\limits_{C_+} \frac{u(w)}{(\overline{w} - z)^{2+\beta}} (\operatorname{Im} w)^\beta \, dm_2(w), \qquad (1.6)$$

где параметр β удовлетворяет условиям теоремы 1. Из следствия 1 теоремы 1 вытекает, что таким образом функция определена корректно, так как в формуле (1.5) важна лишь принадлежность функции u классу hA^p_α. Однако теперь а приори не очевидно, что функция F_β одна и та же для всех β и совпадает с функцией f из формулы (1.5). Это будет доказано, если мы покажем, что $F \in A^p_\alpha$. Действительно, тогда по следствию 1 из теоремы 1 функция F будет выражаться формулой (1.5) и поэтому будет служить аналитическим дополнением для u.

Если $1 \leqslant p < \infty$, то этот факт (и утверждение теоремы) следует из теорем 2 и 3 работы [9] и мы не будем на этом останавливаться. Перейдем к рассмотрению случая $0 < p < 1$.

Воспользовавшись разбиением C_+ на двоичные квадраты Δ_k, теоремой Фубини и проведя некоторые элементарные вычисления, мы последовательно будем иметь

$$\iint\limits_{C_+} |F(z)|^p (\operatorname{Im} z)^\alpha \, dm_2(z) =$$

$$= C \cdot \int\limits_{C_+} (\operatorname{Im} z)^\alpha \cdot \left| \int\limits_{C_+} \frac{u(w)}{(\overline{w} - z)^{2+\beta}} (\operatorname{Im} w)^\beta \, dm_2(w) \right|^p dm_2(z) =$$

$$= C \cdot \int\limits_{C_+} (\operatorname{Im} z)^\alpha \left| \sum_k \int\limits_{\Delta_k} \frac{u(w)}{(\overline{w} - z)^{2+\beta}} (\operatorname{Im} w)^\beta \, dm_2(w) \right|^p dm_2(z) \leqslant$$

$$\leqslant C \cdot \int\limits_{C_+} (\operatorname{Im} z)^\alpha \cdot \sum_k \left(\int\limits_{\Delta_k} \frac{|u(w)|}{|\overline{w} - z|^{2+\beta}} (\operatorname{Im} w)^\beta \, dm_2(w) \right)^p dm_2(z) \leqslant$$

$$\leqslant C \cdot \int\limits_{C_+} (\operatorname{Im} z)^\alpha \cdot \left\{ \sum_k (\operatorname{Im} w_k)^{\beta p} \cdot \frac{\max\limits_{\Delta_k} |u(w)|^p}{|\overline{w}_k - z|^{(2+\beta)p}} |\Delta_k|^p \right\} dm_2(z) =$$

$$= C\cdot\sum_k \max_{\Delta_k} |u(w)|^p\cdot|\Delta_k|^p(\operatorname{Im} w_k)^{\beta p}\cdot\int\limits_{C_+}\frac{(\operatorname{Im} z)^\alpha}{|\overline{w}_k - z|^{(\beta+2)p}}\,dm_2(z). \qquad (1.7)$$

Здесь w_k — центр квадрата Δ_k. Далее, если выбрать β настолько большим, чтобы $(2+\beta)\cdot p > 2$, то простые вычисления дадут

$$\int\limits_{C_+}\frac{(\operatorname{Im} z)^\alpha}{|\overline{w}_k - z|^{(2+\beta)p}}\,dm_2(z) \leqslant C(\operatorname{Im} w_k)^{\alpha+2-(\beta+2)p}.$$

Подставив это в (1.7) и заметив, что $(\operatorname{Im} w_k)^2 \asymp |\Delta_k|$, окончательно получим

$$\|F\|^p_{p,\alpha} \leqslant C\sum_k \max_{\Delta_k}|u(w)|^p\cdot|\Delta_k|^p\cdot(\operatorname{Im} w_k)^{\alpha+2(1-p)} \leqslant$$

$$\leqslant C\sum_k \max_{\Delta_k}|u(w)|^p\cdot|\Delta_k|\cdot(\operatorname{Im} w_k)^\alpha \leqslant$$

$$\leqslant C\sum_k \int\limits_{\Delta_k}|u(w)|^p(\operatorname{Im} w)^\alpha\,dm_2(w) \leqslant C\int\limits_{C_+}|u(w)|^p\cdot(\operatorname{Im} w)^\alpha\,dm_2(w).$$

Теорема доказана.

Замечание. В работе [10] были рассмотрены пространства более общие, чем A^p_α и фактически неявно была доказана и теорема 2 при помощи довольно сложной теории разбиения функций на атомы и молекулы. Наш метод может быть без каких-либо изменений применен и к этим пространствам и таким образом можно получить более простое доказательство этого факта. Таким образом, можно упростить и многие другие результаты этой статьи.

§ 2. Классы A^p_α. $p\in(0,\infty)$, $\alpha\in\mathbf{R}^l$, в многомерных областях над афинно-однородными конусами

2.1. Обозначим через $\mathbf{R}^n$ и $\mathbf{C}^n$, $n\geqslant 1$, обычные координатные пространства действительных и комплексных чисел соответственно. Мы будем отождествлять $\mathbf{R}^n$ с вещественным подпространством в $\mathbf{C}^n$, точнее

$$\mathbf{R}^n = \{z=(z_1,\cdots,z_n)\in\mathbf{C}^n,\ \operatorname{Im} z_j = 0\ (1\leqslant j\leqslant n)\}. \qquad (2.1)$$

Для произвольного $z=(z_1,\cdots,z_n)\in\mathbf{C}^n$ будем использовать сокращенную запись $z=x+iy$, где $x=(x_1,\cdots,x_n)$, $y=(y_1,\cdots,y_n)$,

$$z_j = x_j + iy_j\ (1\leqslant j\leqslant n).$$

Если $z=(z_1,\cdots,z_n)\in\mathbf{C}^n$, $w=(w_1,\cdots,w_n)\in\mathbf{C}^n$, то полагаем

$$(z,w)=\sum_{k=1}^n z_k\cdot\overline{w}_k,\quad |z|=\sqrt{(z,z)}.$$

Если R есть некоторое вещественное координатное пространство, то через $\mathbf{C}R$ обозначаем комплексное координатное пространство,

содержащее R в качестве максимального вполне вещественного подпространства. Более точно: $\mathbf{C}R = R + iR$.

Далее, для произвольного множества $E \subset \mathbf{R}^n$ положим

$$T_E = \{z = x + iy \in \mathbf{C}^n,\ y \in E\}. \tag{2.2}$$

Тогда T_E является областью в $\mathbf{C}^n$ тогда и только тогда, когда E является областью в $\mathbf{R}^n$.

Через $\mathbf{L}(\mathbf{C}^n)(\mathbf{L}(\mathbf{R}^n))$ будем обозначать группу всех комплексно (соответственно вещественно) линейных изоморфизмов пространства $\mathbf{C}^n(\mathbf{R}^n)$. Если D_1, D_2—произвольные множества в $\mathbf{C}^n(\mathbf{R}^n)$, то будем говорить, что они линейно эквивалентны, если $D_2 = L(D_1)$ для некоторого $L \in \mathbf{L}(\mathbf{C}^n)$ $(L \in \mathbf{L}(\mathbf{R}^n))$. Заметим, что если D_1 и D_2 линейно эквивалентны в $\mathbf{R}^n$, то T_{D_1} и T_{D_2} линейно эквивалентны в $\mathbf{C}^n$.

Если $D \subset \mathbf{C}^n$ есть открытое множество, то через $H(D)$ обозначим пространство всех голоморфных в D функций.

Кроме того, $m(z)$, $z \in \mathbf{C}^n$, обозначает $2n$-мерную меру Лебега в пространстве $\mathbf{C}^n \cong \mathbf{R}^{2n}$ и $m(x)$, $x \in \mathbf{R}^n$, обозначает обычную меру Лебега в пространстве $\mathbf{R}^n$.

2.2. В этом пункте мы бегло, но достаточно аккуратно, обсудим некоторые понятия, определения, утверждения, подробно рассмотренные в [8].

Множество $E \subset \mathbf{R}^n$ называется конусом, если из $x \in E$, $t \in (0; +\infty)$ следует, что $t \cdot x \in E$. Прямой в $\mathbf{R}^n$ называется множество вида

$$l = \{a + \lambda \cdot e,\ \lambda \in \mathbf{R}^1\}, \tag{2.3}$$

где a, $e \in \mathbf{R}^n$, $e \neq 0$.

Множество $E \subset \mathbf{R}^n$ назовем острым, если в $\mathbf{R}^n$ не существует прямой, целиком находящейся в E. Всюду в этом пункте V будет обозначать острый открытый выпуклый конус в $\mathbf{R}^n$.

Для $V \subset \mathbf{R}^n$ введем обозначение

$$\mathbf{L}(V) = \{L \in \mathbf{L}(\mathbf{R}^n),\ L(V) = V\}. \tag{2.4}$$

Конус V называется афинно-однородным, если для любых y_1, $y_2 \in V$ существует $L \in \mathbf{L}(V)$ такой, что $y_2 = Ly_1$.

Приведем некоторые хорошо известные примеры афинно-однородных острых открытых выпуклых конусов

$$\mathbf{R}^n_+ = \{(y_1, \cdots, y_n) \in \mathbf{R}^n,\ y_j > 0\ (1 \leqslant j \leqslant n)\}, \tag{2.5}$$

$$\Gamma = \left\{(y_0, y_1, \cdots, y_n) \in \mathbf{R}^{n+1},\ y_0 \cdot y_1 > \sum_{k=2}^{n} y_k^2,\ y_0 > 0\right\}, \tag{2.6}$$

$$C = \left\{(y_0, y_1, \cdots, y_n) \in \mathbf{R}^{n+1},\ y_0^2 > \sum_{k=1}^{n} y_k^2,\ y_0 > 0\right\}. \tag{2.7}$$

Пусть $V \subset \mathbf{R}^n$, $n \geqslant 1$. V-билинейной симметрической формой на пространстве $\mathbf{R}^m$, $m \geqslant 0$, называется функция $f: \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$, обладающая свойствами:

1) $F(s, t) = F(t, s)$, $t, s \in \mathbf{R}^m$,

2) $F(\lambda_1 \cdot s_1 + \lambda_2 \cdot s_2, t) = \lambda_1 \cdot F(s_1, t) + \lambda_2 \cdot F(s_2, t)$,

где $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}^1$, $s_1, s_2, t \in \mathbf{R}^m$,

3) $F(t, t) \in \overline{V}$, $t \in \mathbf{R}^m$,

4) $F(t, t) = 0 \in \mathbf{R}^n$ тогда и только тогда, когда $t = 0$.

Замечание. В приведенном выше определении случай $m=0$ означает, что $F \equiv 0$, то есть форма не задана.

V-билинейная симметрическая форма F называется афинно-однородной, если выполнены два дополнительных требования:

5) конус V является афинно-однородным,

6) существует подгруппа $G(V)$ группы $\mathbf{L}(V)$, обладающая следующими свойствами:

а) если $y_1, y_2 \in V$, то существует $g \in G(V)$ такой, что $y_2 = g(y_1)$,

б) для любого $g \in G(V)$ существует $\tilde{g} \in L(\mathbf{R}^m)$ такой, что

$$gF(t, t) \equiv F(\bar{g}t, \tilde{g}t), \ t \in \mathbf{R}^m.$$

Замечание. При $m = 0$, $F \equiv 0$ афинная однородность формы F означает лишь афинную однородность конуса V.

Пусть V — афинно-однородный конус в $\mathbf{R}^n$, $n \geqslant 1$, а F есть афинно- однородная V-билинейная симметрическая форма на $\mathbf{R}^m$, $m \geqslant 0$. Рассмотрим следующее множество:

$$\pi(V, F) = \{(y, t, r) \in \mathbf{R}^{n+m+1}, \ y \in \mathbf{R}^n, \ t \in \mathbf{R}^m, \ r \in \mathbf{R}^1, \\ r > 0 \text{ и } r \cdot y - F(t, t) \in V\}. \tag{2.8}$$

Таким образом, $\pi(V, F)$ — некоторое множество в $\mathbf{R}^{n+m+1}$.

Предложение 1. *Пусть V — афинно-однородный конус в $\mathbf{R}^n$, $n \geqslant 1$, а F есть афинно-однородная V-билинейная симметрическая форма на $\mathbf{R}^m$, $m \geqslant 0$. Тогда $\pi(V, F)$ является афинно-однородным острым открытым выпуклым конусом в пространстве $\mathbf{R}^{n+m+1}$.*

Доказательство см. в [8].

Договоримся употреблять вместо выражения «афинно-однородный острый открытый выпуклый конус» более краткое «афинно-однородный конус».

Сейчас мы опишем специальную процедуру, состоящую из бесконечного числа шагов, причем описание будет индуктивным. На первом шаге положим $V^1 = \mathbf{R}^1_+ = (0, +\infty)$. Очевидно, V^1 является афинно-однородным конусом (в $\mathbf{R}^1$). Допустим, что после i-го шага мы построили некоторый афинно-однородный конус V^i. Тогда на $i+1$-ом шаге выберем некоторую афинно-однородную V^i-билинейную симметрическую форму F^{i+1}, заданную на некотором вещественном координатном пространстве $\mathbf{R}_{i+1}$ размерности $n_{i+1} \geqslant 0$ и положим

$$V^{i+1} = \pi(V^i, F^{i+1}). \tag{2.9}$$

Согласно предложению 1, V^{i+1} также является афинно-однородным конусом, представляющим собой конечный результат $i+1$-го шага.

Афинно-однородный конус $V \subset \mathbf{R}^n$ назовем специальным, если его можно построить при помощи описанной выше процедуры за конечное число шагов. Это число шагов $l = l(V)$ называется рангом специального афинно-однородного конуса V. Имеет место следующая важная теорема (см. [8]).

Теорема 3. *Всякий афинно-однородный конус $V \subset \mathbf{R}^n$ линейно эквивалентен некоторому специальному афинно-одкородному конусу, также лежащему в $\mathbf{R}^n$.*

Сформулированная теорема во многих случаях позволяет ограничиться рассмотрением лишь специальных афинно-однородных конусов.

Итак, пусть V есть специальный афинно-однородный конус ранга l, лежащий в пространстве $\mathbf{R}^n$, $n \geqslant 1$. Обозначим через V^i, $1 \leqslant i \leqslant l$, конусы, участвующие в индуктивном построении V, тогда $V^l = V$. При $1 \leqslant i \leqslant l$ обозначим через $\mathbf{R}(i)$ то вещественное координатное пространство, в котором лежит V^i. Полезно заметить, что при $1 \leqslant i \leqslant l$ V^i является специальным афинно-однородным конусом в $\mathbf{R}(i)$. Далее, в индуктивном построении V участвуют также вещественные координатные пространства R_j и формы F^j $(2 \leqslant j \leqslant l)$. При этом справедливы соотношения

$$\mathbf{R}(i) = R_{11} \times R_2 \times R_{22} \times \cdots \times R_i \times R_{ii} \ (1 \leqslant i \leqslant l), \tag{2.10}$$

где через R_{ii} $(1 \leqslant i \leqslant l)$ мы обозначили вещественные координатные пространства размерности 1. Из (2.10) вытекают соотношения

$$\mathbf{R}(i+1) = \mathbf{R}(i) \times R_{i+1} \times R_{i+1\,i+1} \ (1 \leqslant i < l). \tag{2.11}$$

Следовательно, произвольный элемент $y \in \mathbf{R}(i+1)$ можно записать так:

$$y = (y', y_{i+1}, y_{i+1\,i+1}), \tag{2.12}$$

где $y' \in \mathbf{R}(i)$, $y_{i+1} \in R_{i+1}$, $y_{i+1\,i+1} \in R_{i+1\,i+1}$. При этом, как легко следует из (2.9), $y \in V^{i+1}$ тогда и только тогда, когда

$$y_{i+1\,i+1} > 0, \ y_{i+1\,i+1} \cdot y' - F^{i+1}(y_{i+1}, y_{i+1}) \in V^i. \tag{2.13}$$

Теперь введем соответствующие комплексные координатные пространства. При $1 \leqslant i \leqslant l$, $2 \leqslant j \leqslant l$ положим

$$\mathbf{C}(i) = \mathbf{C}\mathbf{R}(i), \ C_{ii} = \mathbf{C}R_{ii}, \ C_j = \mathbf{C}R_j.$$

Тогда будут выполнены соотношения

$$\mathbf{C}(i) = C_{11} \times C_2 \times C_{22} \times \cdots \times C_i \times C_{ii} \ (1 \leqslant i \leqslant l), \tag{2.14}$$

$$\mathbf{C}(i+1) = \mathbf{C}(i) \times C_{i+1} \times C_{i+1\,i+1} \ (1 \leqslant i < l). \tag{2.15}$$

Поэтому произвольный элемент $z \in \mathbf{C}(i+1)$ запишется в виде

$$z = (z', z_{i+1}, z_{i+1\,i+1}), \tag{2.16}$$

где $z' \in \mathbf{C}(i)$, $z_{l+1} \in C_{l+1}$, $z_{l+1\,l+1} \in C_{l+1\,l+1}$.

Для произвольного $y \in V^{l+1}$ введем следующее обозначение:

$$y_{-1} = y' - \frac{1}{y_{l+1\,l+1}} \cdot F^{l+1}(y_{l+1}, y_{l+1}). \tag{2.17}$$

Из (2.13) следует, что $y_{-1} \in V^l$.

При $1 \leqslant i \leqslant l$ с конусами V^i каноническим образом связываются (см. [8]) функции $\chi^i_m(y)$, $1 \leqslant m \leqslant i$, заданные в $\mathbf{R}(i)$ и являющиеся дробно-рациональными. Эти функции, как следует из [8], обладают следующими свойствами:

1) при $1 \leqslant i \leqslant l$

$$V^i = \{y \in \mathbf{R}(i),\ \chi^i_m(y) > 0,\ 1 \leqslant m \leqslant i\}, \tag{2.18}$$

2) при $1 < i < l$

$$\chi^{i+1}_{i+1}(y) \equiv y_{i+1\,i+1}(y \in V^{i+1}). \tag{2.19}$$

$$\chi^{i+1}_m(y) \equiv \chi^i_m(y_{-1})(y \in V^{i+1},\ 1 \leqslant m \leqslant i). \tag{2.20}$$

При помощи этих канонических функций можно ввести аналог степенной функции. Если $y \in V^l$, $\rho = (\rho_1, \cdots, \rho_l) \in \mathbf{C}^l$, то положим

$$y^\rho = \prod_{m=1}^{l} [\chi^l_m(y)]^{\rho_m}. \tag{2.21}$$

Предложение 2. *Пусть* $\rho = (\rho_1, \cdots, \rho_l, \rho_{l+1}) \in \mathbf{C}^{l+1}$, $\rho' = (\rho_1, \cdots, \rho_l) \in \mathbf{C}^l$, *так что* $\rho = (\rho', \rho_{l+1})$. *Тогда для любого* $y \in V^{l+1}$ *справедлива формула*

$$y^\rho = (y_{-1})^{\rho'} \cdot (y_{l+1\,l+1})^{\rho_{l+1}}. \tag{2.22}$$

Доказательство немедленно следует из (2.19)—(2.21).

2.3. Пусть V—открытый выпуклый конус в $\mathbf{R}^n$, $n \geqslant 1$, Ω — открытое множество в $\mathbf{C}^m$, $m \geqslant 0$, и γ является непрерывным отображением из Ω в $\mathbf{R}^n$. Если точки из $\mathbf{C}^{n+m}$ обозначать через (z, ζ), где $z \in \mathbf{C}^n$, $\zeta \in \mathbf{C}^m$, то можно рассмотреть следующее множество в $\mathbf{C}^{n+m}$:

$$D = \{(z, \zeta) \in \mathbf{C}^{n+m} : z = x + iy \in \mathbf{C}^n,\ \zeta \in \mathbf{C}^m,\ y - \gamma(\zeta) \in V\}. \tag{2.23}$$

Это соотношение удобно записывать в виде $D = \pi(V, \gamma)$.

Заметим, что D открыто в $\mathbf{C}^{n+m}$, и если Ω является областью в $\mathbf{C}^m$, то и D является областью в $\mathbf{C}^{n+m}$. Если $m = 0$, $\gamma \equiv 0$, то D — просто трубчатая область над $V: D = T_V$. Отметим также, что множества вида (2.23) включают в себя комплексные области Зигеля (см. [8]), для которых $\Omega = \mathbf{C}^m$ и $\gamma(\zeta) \equiv F(\zeta, \zeta)$, где F является V-эрмитовой формой на $\mathbf{C}^m$.

Из теоремы 3 легко вытекает следующее

Предложение 3. *Пусть* $D=\pi(V, \gamma)\subset \mathbf{C}^{n+m}$, *где* V — *афинно-однородный конус в* $\mathbf{R}^n$, *а* γ *есть непрерывное отображение из* $\Omega\subset\mathbf{C}^m$ *в* $\mathbf{R}^n$. *Тогда существуют специальный афинно-однородный конус* $V_1\subset\mathbf{R}^n$ *и непрерывное отображение* γ_1 *из* Ω *в* $\mathbf{R}^n$ *такие, что* D *линейно эквивалентно* $D_1=\pi(V_1, \gamma_1)\subset\mathbf{C}^{n+m}$.

Таким образом, можно ограничиться рассмотрением тех множеств $D=\pi(V, \gamma)\subset\mathbf{C}^{n+m}$, у которых V является специальным афинно-однородным конусом, что мы и будем делать всюду в этом пункте.

Введем некоторые дополнительные понятия.

Пусть $D=\pi(V, \gamma)\subset\mathbf{C}^{n+m}$, $m\geqslant 1$, и функция Ψ определена в D. При произвольном фиксированном $\zeta\in\Omega$ определим на T_V функцию

$$\Psi_\zeta(\omega)=\Psi(\omega+i\gamma(\zeta), \zeta), \ \omega\in T_V. \tag{2.24}$$

Если же $m=0$, то $D=T_V$. Предположим, что V есть специальный афинно-однородный конус ранга $l+1$, $V=V^{l+1}$. Тогда $V^{l+1}=\pi(V^l, F^{l+1})$, где V^l есть специальный афинно-однородный конус ранга l. Если в $D=T_V$ задана произвольная функция Ψ, то при любых фиксированных $z_{l+1}=x_{l+1}+iy_{l+1}\in C_{l+1}$, $z_{l+1\,l+1}=x_{l+1\,l+1}+iy_{l+1\,l+1}\in\mathbf{C}_+$, определим функцию от $\omega\in T_{V^l}$;

$$\Psi_{-1}(\omega)=\Psi\left(\omega+\frac{i}{y_{l+1l+1}}F^{l+1}(y_{l+1}, y_{l+1}), z_{l+1}, z_{l+1\,l+1}\right). \tag{2.25}$$

Ясно, что функция $\Psi_{-1}(\omega)$ зависит от выбора $z_{l+1}\in C_{l+1}$, $z_{l+1l+1}\in\mathbf{C}_+$, но ради удобства мы не будем отмечать этот факт в обозначении.

При помощи введенных обозначений мы сформулируем существенное для дальнейшего условие. Пусть $D=T_V$ и Ψ — произвольная функция, заданная в D. Мы хотим наложить на Ψ условие, которое формально можно записать так:

$$\Psi(\infty)=0. \tag{2.26}$$

Это удобно сделать индуктивно, взяв в качестве параметра индукции ранг $l=l(V)$ конуса V. При $l=1$ $V=(0+\infty)$, $T_V=\mathbf{C}_+$ и Ψ задана в $\mathbf{C}_+$. Будем писать $\Psi(\infty)=0$, если $\Psi(iy)\to 0$ при $y\to+\infty$.

Допустим теперь, что мы придали смысл условию (2.26) для функций Ψ, заданных в T_V и ранг V равен l. Возьмем произвольный конус V ранга $l+1$. Тогда $V=V^{l+1}=\pi(V^l, F^{l+1})$, где V^l — конус ранга l. Если функция Ψ задана в T_V, то будем писать $\Psi(\infty)=0$, если для почти всех $(z_{l+1}, z_{l+1\,l+1})$ из $C_{l+1}\times\mathbf{C}_+$ $\Psi_{-1}(\infty)=0$.

Если же $D=\pi(V, \gamma)\subset\mathbf{C}^{n+m}$, $m\geqslant 1$, то пишем $\Psi(\infty)=0$ для функции Ψ, заданной в D, если для почти всех $\zeta\in\Omega$ $\Psi_\zeta(\infty)=0$.

2.4. Всюду в этом пункте полагаем $D=\pi(V, \gamma)\subset\mathbf{C}^{n+m}$, где V — специальный афинно-однородный конус в $\mathbf{R}^n$, $n\geqslant 1$, а отображение $\gamma:\Omega\to\mathbf{R}^n$ непрерывно и Ω открыто в $\mathbf{C}^m$, $m\geqslant 0$. Через $l=l(V)$, как обычно, будем обозначать ранг конуса V. Как следует из предложе-

ния 3, предположение о том, что конус V специальный не умаляет общности.

Пусть $p \in (0, +\infty)$, $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_l) \in \mathbf{R}^l$. Для произвольной измеримой по Лебегу, вообще говоря, комплекснозначной функции $f(z, \zeta)$, $(z, \zeta) \in D$, положим

$$\|f\|_{p,\alpha} = \left[\int\limits_D |f(z, \zeta)|^p \cdot (y - \gamma(\zeta))^\alpha \, dm(z) \times dm(\zeta) \right]^{1/p}, \quad z = x + iy. \tag{2.27}$$

Тогда $L^p_\alpha(D)$ состоит из всех тех функций f, для которых $\|f\|_{p,\alpha} < +\infty$. Далее положим

$$A^p_\alpha(D) = H(D) \cap L^p_\alpha(D). \tag{2.28}$$

Отметим, что если D является комплексной областью Зигеля в $\mathbf{C}^{n+m}$, а $\alpha \in \mathbf{R}^l$ выбрано специальным образом, то $A^p_\alpha(D)$ превращаются в пространства $A^{p,r}(D)$, рассмотренные в [5].

Лемма 3. *Пусть* $0 < p < \infty$, $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_l, \alpha_{l+1}) \in \mathbf{R}^{l+1}$, $\alpha' = (\alpha_1, \cdots, \alpha_l) \in \mathbf{R}^l$, *так что* $\alpha = (\alpha', \alpha_{l+1})$. *Далее, пусть* V *есть специальный афинно-однородный конус ранга* $l+1$, $V = V^{l+1} = \pi(V^l, F^{l+1})$, *где* V^l — *специальный афинно-однородный конус ранга* l. *Тогда если* $f \in A^p_\alpha(D)$, $D = T_V$, *то для почти всех*, $(z_{l+1}, z_{l+1l+1}) \in C_{l+1} \times \mathbf{C}_+$, $f_{-1} \in A^p_{\alpha'}(T_{V^l})$.

Доказательство. Поскольку у нас $m = 0$, $\gamma \equiv 0$, то

$$\|f\|^p_{p,\alpha} = \int\limits_{T_{V^{l+1}}} |f(z)|^p \cdot y^\alpha \, dm(z), \quad z = x + iy. \tag{2.29}$$

Далее, так как $\mathbf{C}(l+1) = \mathbf{C}(l) \times C_{l+1} \times C_{l+1l+1}$, то каждое $z = x + iy \in \mathbf{C}(l+1)$ запишется так: $z = (z', z_{l+1}, z_{l+1l+1})$, где $z' = x' + iy' \in \mathbf{C}(l)$, $z_{l+1} = x_{l+1} + iy_{l+1} \in C_{l+1}$, $z_{l+1l+1} = x_{l+1l+1} \in C_{l+1l+1}$. При этом $x = (x', x_{l+1}, x_{l+1l+1})$, $y = (y', y_{l+1}, y_{l+1l+1})$.

Теперь заметим, что $D = T_{V^{l+1}}$ лежит в $\mathbf{C}(l+1)$ и при помощи предложения 2 и теоремы Фубини получим

$$\|f\|^p_{p,\alpha} = \int\limits_{C_{l+1} \times \mathbf{C}_+} [y_{l+1,l+1}]^{\alpha_{l+1,l+1}} dm(z_{l+1,l+1}, z_{l+1,l+1}) \int |f(z', z_{l+1}, z_{l+1l+1})|^p \cdot$$

$$\cdot \left(y' - \frac{1}{y_{l+1l+1}} \cdot F^{l+1}(y_{l+1}, y_{l+1}) \right)^{\alpha'} dm(z'). \tag{2.30}$$

В этом равенстве во внутреннем интеграле интегрирование ведется по множеству тех $z' \in \mathbf{C}(l)$, для которых

$$y' \in \frac{1}{y_{l+1l+1}} \cdot F^{l+1}(y_{l+1}, y_{l+1}) + V^l.$$

Во внутреннем интеграле сделаем следующую замену переменной:

$$z' = \omega + \frac{i}{y_{l+1l+1}} \cdot F^{l+1}(y_{l+1}, y_{l+1}). \tag{2.31}$$

Тогда из (2.30) будем иметь

$$\|f\|_{p,\alpha} = \int\limits_{C_{l+1}\times C_+} [y_{l+1l+1}]^{\alpha_{l+1}} dm(z_{l+1}, z_{l+1l+1}) \cdot \int\limits_{T_{V^l}} |f_{-1}(\omega)|^p \cdot$$

$$\cdot t^{\alpha'} dm(\omega), \ \omega = s + it. \tag{2.32}$$

Поскольку $f \in A^p_\alpha(D)$, то $\|f\|_{p,\alpha} < +\infty$. Поэтому из (2.32) следует, что для почти всех $(z_{l+1}, z_{l+1l+1}) \in C_{l+1} \times \mathbf{C}_+$

$$\int\limits_{T_{V^l}} |f_{-1}(\omega)|^p \cdot t^{\alpha'} dm(\omega) < +\infty, \ \omega = s + it, \tag{2.33}$$

что и требовалось доказать.

При помощи аналогичных рассуждений доказывается

Лемма 4. *Пусть* $0 < p < \infty$, $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_l) \in \mathbf{R}^l$, $D = \pi(V, \gamma) \subset \mathbf{C}^{n+m}$, $m \geqslant 1$, и $l(V) = l$. *Если* $f \in A^p_\alpha(D)$, *то для почти всех* $\zeta \in \Omega$ $f_\zeta \in A^p_\alpha(T_V)$.

Приступим теперь к формулировке и доказательству основных результатов.

Теорема 4. *Пусть* $0 < p < \infty$, $(\alpha_1, \cdots, \alpha_l) \in \mathbf{R}^l$, $D = \pi(V, \gamma) \subset \mathbf{C}^{n+m}$, $n \geqslant 1$, $m \geqslant 0$, $l = l(V)$. *Если* $\alpha_1 \leqslant -1$, *то* $A^p_\alpha(D) = \{0\}$.

Доказательство. Сначала рассмотрим случай $m = 0$, $D = T_V$ тогда проведем доказательство индукцией по l. При $l = 1$ $V = (0, +\infty)$, $T_V = \mathbf{C}_+$, $\alpha \in \mathbf{R}^1$ и $\alpha < -1$. Но хорошо известно, что при $\alpha \leqslant -1$, $A^p_\alpha(\mathbf{C}_+) = \{0\}$. Допустим, что для $l \geqslant 1$ утверждение доказано и докажем его для $l + 1$. Тогда $V = V^{l+1} = \pi(V^l, F^{l+1})$, $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_l, \alpha_{l+1}) \in \mathbf{R}^{l+1}$, $\alpha_1 \leqslant -1$, $0 < p < \infty$. Положим $\alpha' = (\alpha_1, \cdots, \alpha_l) \in \mathbf{R}^l$. Согласно предположению индукции, $A^p_{\alpha'}(T_{V^l}) = \{0\}$. Комбинируя этот факт с леммой 3, получим, что если $f \in A^p_\alpha(T_V)$, то для почти всех (z_{l+1}, z_{l+1l+1}) из $C_{l+1} \times \mathbf{C}_+$, $f_{-1} \equiv 0$ в T_{V^l}. Следовательно, $f \equiv 0$.

Пусть теперь $m \geqslant 1$, $f \in A^p_\alpha(D)$. $\alpha_1 \leqslant -1$. Согласно уже доказанному случаю $m = 0$, $A^p_\alpha(T_V) = \{0\}$. Комбинируя этот факт с леммой 4, получим, что для почти всех $\zeta \in \Omega$ $f_\zeta \equiv 0$ в T_V, значит $f \equiv 0$ и теорема доказана.

Мы впредь будем предполагать, что выполнено условие $\alpha_1 > -1$.

Похожие рассуждения приводят к доказательству следующей теоремы.

Теорема 5. *Пусть* $0 < p < \infty$, $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_l) \in \mathbf{R}^l$, $\alpha_1 > -1$, $D = \pi(V, \gamma) \subset \mathbf{C}^{n+m}$. $n \geqslant 1$, $m \geqslant 0$, $l = l(V)$. *Если* $f \in A^p_\alpha(D)$, *то* $f(\infty) = 0$.

Наконец, имеет место следующая основная

Теорема 6. *Пусть* $0 < p < \infty$, $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_l) \in \mathbf{R}^l$, $\alpha_1 > -1$, $D = \pi(V, \zeta) \subset \mathbf{C}^{n+m}$, $n \geqslant 1$, $m \geqslant 0$, $l = l(V)$. *Тогда существует константа* C, *зависящая от* p *и* α_1 *и такая, что*

$$\|f\|_{p,\alpha} \leqslant C \cdot \|u\|_{p,\alpha} \tag{2.34}$$

для произвольной функции $f = u + iv \in H(D)$ *с* $v(\infty) = 0$.

Доказательство. Займемся сначала случаем $m = 0$, $D = T_V$ и опять проведем доказательство индукцией по l. При $l = 1$ неравенство (2.34) сразу следует из теоремы 2. Допустим, что для некоторого $l \geqslant 1$ теорема доказана и докажем ее для $l+1$. Пусть $V = V^{l+1} = \pi(V^l, F^{l+1})$, $0 < p < \infty$, $\alpha = (\alpha', \alpha_{l+1}) \in \mathbf{R}^{l+1}$, где $\alpha' \in \mathbf{R}^l$ и $\alpha_1 > -1$. Далее, $f = u + iv \in H(T_V)$ и $v(\infty) = 0$. Заметим, что для произвольного фиксированного $(z_{l+1}, z_{l+1\,l+1}) \in C_{l+1} \times \mathbf{C}_+$

$$f_{-1}(\omega) \equiv u_{-1}(\omega) + iv_{-1}(\omega), \quad \omega \in T_{V^l}. \tag{2.35}$$

Из условия $v(\infty) = 0$ следует, что для почти всех $(z_{l+1}, z_{l+1\,l+1})$, $\in C_{l+1} \times \mathbf{C}_+$, $v_{-1}(\infty) = 0$. Согласно предположению индукции, для почти всех $(z_{l+1}, z_{l+1\,l+1}) \in C_{l+1} \times \mathbf{C}_+$

$$\|f_{-1}\|_{p,\alpha'} \leqslant C \cdot \|u_{-1}\|_{p,\alpha'}, \tag{2.36}$$

где C зависит только от p и α_1.

Перепишем (2.36) в виде

$$\int\limits_{T_{V^l}} |f_{-1}(\omega)|^p \cdot t^{\alpha'} dm(\omega) \leqslant C^p \cdot \int\limits_{T_{V^l}} |u_{-1}(\omega)|^p \cdot t^{\alpha'} dm(\omega), \tag{2.37}$$

где $\omega = s + it$. После соответствующей замены переменной в (2.37) получим

$$\int |f(z', z_{l+1}, z_{l+1\,l+1})|^p \left\{ y' - \frac{1}{y_{l+1\,l+1}} F^{l+1}(y_{l+1}, y_{l+1}) \right\}^{\alpha'} dm(z') \leqslant$$

$$\leqslant C^p \cdot \int |u(z', z_{l+1}, z_{l+1\,l+1})|^p \left\{ y' - \frac{1}{y_{l+1\,l+1}} \times \right.$$

$$\left. \times F^{l+1}(y_{l+1}, y_{l+1}) \right\}^{\alpha'} dm(z'). \tag{2.38}$$

При этом в обеих частях этого неравенства интегрирование ведется по множеству $z' = x' + iy'$ с $y' \in \dfrac{1}{y_{l+1\,l+1}} \cdot F^{l+1}(y_{l+1}, y_{l+1}) + V^l$.

Поскольку (2.38) справедливо для почти всех $(z_{l+1}, z_{l+1\,l+1}) \in C_{l+1} \times \mathbf{C}_+$, то умножим обе части неравенства (2.38) на $[y_{l+1\,l+1}]^{\alpha_{l+1}}$ и проинтегрируем по $C_{l+1} \times \mathbf{C}_+$. Тогда получим (2.34), если воспользуемся предположением 2. Итак, при $m = 0$ теорема доказана.

Пусть теперь $m \geqslant 1$. Заметим, что при произвольном $\zeta \in \Omega$

$$f_\zeta(\omega) = u_\zeta(\omega) + iv_\zeta(\omega), \tag{2.39}$$

где $\omega \in T_V$. Поскольку $v(\infty) = 0$, то для почти всех $\zeta \in \Omega$ $v_\zeta(\infty) = 0$.

Но раз для $m=0$ теорема доказана, то существует константа C, зависящая только от p и α_1, такая, что

$$\|f_\zeta\|_{p,\alpha} \leqslant C\cdot\|u_\zeta\|_{p,\alpha}$$

для почти всех $\zeta\in\Omega$, то есть

$$\int\limits_{T_V} |f_\zeta(\omega)|^p\cdot t^\alpha\, dm(\omega) \leqslant C^p\cdot\int\limits_{T_V} |u_\zeta(\omega)|^p\cdot t^\alpha\, dm(\omega),\quad \omega=s+it. \tag{2.40}$$

Учитывая обозначение (2.24) сделаем в (2.40) соответствующую замену переменной и полученное неравенство проинтегрируем по $\zeta\in\Omega$. Тогда получим (2.34) и теорема полностью доказана.

Приведем два важных частных случая этой теоремы.

Положим

$$V=\left\{y=(y_1,\cdots,y_n,y_0)\in\mathbf{R}^{n+1}: y_0y_1>\sum_{k=1}^n y_k^2,\ y_0>0\right\}.$$

Тогда V является специальным афинно-однородным конусом ранга $l=2$ и связанные с ним канонические функции имеют вид

$$\gamma_1^2(y)\equiv y_1-\frac{1}{y_0}\cdot\sum_{k=2}^n y_k^2,\quad \gamma_2^2(y)\equiv y_0.$$

Если положить $D=T_V$, то для этой трубчатой области теорема 6 сформулируется следующим образом.

Теорема 6′. *Пусть $0<p<\infty$, $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2)$, $\alpha_1>-1$. Тогда существует константа, зависящая только от p и α_1 и такая, что для произвольной $f=u+iv\in H(T_V)$ с $v(\infty)=0$ справедливо неравенство ($z=x+iy$)*

$$\int\limits_{T_V} |f(z)|^p\cdot\left(y_1-\frac{1}{y_0}\cdot\sum_{k=2}^n y_k^2\right)^{\alpha_1}\cdot y_0^{\alpha_2}\,dm(z)\leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{const}\int\limits_{T_V} |u(z)|^p\left(y_1-\frac{1}{y_0}\sum_{k=2}^n y_k^2\right)^{\alpha_1}\cdot y_0^{\alpha_2}\,dm(z). \tag{2.41}$$

Далее рассмотрим другой частный случай:

$$D=\{(z,\zeta)\in\mathbf{C}^n,\ z\in\mathbf{C}^1,\ \zeta\in\mathbf{C}^{n-1},\ \operatorname{Im} z>|\zeta|^2\}.$$

Легко заметить, что $D=\pi(V,\gamma)$, где $V=(0,+\infty)\subset\mathbf{R}^1$, $\Omega=\mathbf{C}^{n-1}$, $\gamma(\zeta)\equiv|\zeta|^2$, и поэтому справедлива следующая

Теорема 6″. *Пусть $0<p<\infty$, $\alpha>-1$. Тогда существует константа C, зависящая только от p и α и такая, что для произвольной $f=u+iv\in H(D)$ с $v(\infty)=0$ имеет место неравенство ($w=(z,\zeta)$)*

$$\int\limits_D |f(w)|^p\cdot(\operatorname{Im} z-|\zeta|^2)^\alpha\,dm(w)\leqslant C^p\cdot\int\limits_D |u(w)|^p(\operatorname{Im} z-|\zeta|^2)^\alpha\,dm(w). \tag{2.42}$$

§ 3. Классы A_α^p, $p \in (0, \infty)$, $\alpha \in R^1$, в многомерных областях, ассоциированных с конусами

3.1. Множество $V \subset R^n$, $n \geqslant 1$, назовем открытым выпуклым конусом, если:

1) множество V открыто, выпукло и является конусом в смысле определения предыдущего параграфа;

2) $0 \overline{\in} V$.

В § 2 мы уже вводили понятие открытого выпуклого конуса, но там отсутствовало условие 2), которое равносильно тому, что $V \neq R^n$. Договоримся, что если некоторое множество из R^n обозначается через V, то тем самым подразумевается, что оно есть открытый выпуклый конус в смысле последнего определения.

Далее, если $y = (y_1, \cdots, y_{n-1}, y_n) \in R^n$, то часто будем писать: $y = (y', y_n)$, где $y' = (y_1, \cdots, y_{n-1}) \in R^{n-1}$. Через e обозначим ту точку $y \in R^n$, для которой $y' = 0 \in R^{n-1}$, $y_n = 1 \in R^1$.

Предложение 4. *Пусть $V \subset R^n$. Тогда $V + \overline{V} = V$.*

Доказательство. Так как $0 \in \overline{V}$, то очевидно, $V \subset V + \overline{V}$. Далее, из того, что V открыто и выпукло, следует, что V канонически открыто, то есть $\operatorname{Int}(\overline{V}) = V$.

Теперь заметим, что $V + \overline{V}$ открыто и содержится в $\overline{V} + \overline{V} = \overline{V}$. Но $\operatorname{Int}(\overline{V})$ есть наибольшее открытое множество, лежащее в $\overline{V}$, поэтому $V + V \subset \operatorname{Int}(\overline{V}) = V$ и предложение доказано.

Если $V \subset R^n$ и $y \in V$, то через $\rho_V(y)$ обозначим евклидово расстояние от y до ∂V. Таким образом, $\rho_V(y)$ является положительной функцией, определенной в V.

Пусть V — открытый выпуклый конус в R^n. V называется специальным, если

2) $V \subset \{y = (y', y_n) \in R^n, y_n > 0\}$.

2) $e \in V$.

Предложение 5. *Всякий открытый выпуклый конус из R^n линейно эквивалентен некоторому специальному открытому выпуклому конусу из R^n.*

Доказательство простое и поэтому опускается.

Если V — специальный открытый выпуклый конус, то помимо функции $\rho_V(y)$ с V можно связать и другие функции, которые мы сейчас опишем.

Предложение 6. *Пусть V — специальный открытый выпуклый конус в R^n. Тогда для любого $y' \in R^{n-1}$ множество*

$$E = \{\sigma \in R^1, (y', \sigma) \in V\} \tag{3.1}$$

не пусто.

Доказательство. Заметим прежде всего, что $E \subset (0; +\infty)$. Далее, если $\sigma_1 \in E$ и $\sigma_2 > \sigma_1$, то и $\sigma_2 \in E$. Действительно, $(y', \sigma_2) = (y', \sigma_1) + (\sigma_2 - \sigma_1) \cdot e$ и так как $(y', \sigma_1) \in V$, $e \in V$, $\sigma_2 - \sigma_1 > 0$, а

V — выпуклый конус, то $(y', \sigma_2) \in V$, поэтому $\sigma_2 \in E$. Наконец, E открыто в $\mathbf{R}^1$. Следовательно, E имеет вид

$$E = (b;\ +\infty),\ 0 \leqslant b < +\infty. \tag{3.2}$$

Мы должны показать, что $E \neq \varnothing$, то есть $b < +\infty$.

Так как V открыто и $e \in V$, то существует $\varepsilon > 0$ такое, что если $x' \in \mathbf{R}^{n-1}$ и $|x'| < \varepsilon$, то $(x', 1) \in V$. Так как $y' \in \mathbf{R}^{n-1}$ зафиксировано, то выбирая число $\sigma > 0$ очень большим, можно добиться выполнения неравенства $|y'/\sigma| < \varepsilon$. Тогда $(y'/\sigma, 1) \in V$ и поскольку V — конус, то и $(y', \sigma) \in V$ (при достаточно больших σ). Таким образом, $E \neq \varnothing$ и предложение доказано.

Теперь можно ввести следующую неотрицательную функцию:

$$\sigma_V(y') = \inf\{\sigma \in \mathbf{R}^1,\ (y', \sigma) \in V\},\ y' \in \mathbf{R}^{n-1}. \tag{3.3}$$

Кроме того, для произвольного $y = (y', y_n) \in V$ положим

$$\tau_V(y) = y_n - \sigma_V(y'). \tag{3.4}$$

Легко проверяется, что $\tau_V(y)$ является положительной функцией, определенной в V.

Предложение 7. *Пусть V — специальный открый выпуклый конус в $\mathbf{R}^n$. Тогда существует число a, $0 < a \leqslant 1$, зависящее только от конуса и такое, что*

$$a < \frac{\rho_V(y)}{\tau_V(y)} < 1,\quad y \in V. \tag{3.5}$$

Доказательство. Положим $a = \rho_V(e)$. Очевидно, что $0 < a \leqslant 1$. Мы утверждаем, что для этого a справедливо неравенство (3.5). Зафиксируем произвольное $y = (y', y_n) \in V$. Рассмотрим точку $r = (y', \sigma_V(y')) \in \mathbf{R}^n$. Тогда $r \in \partial V$ и расстояние между y и r равно $y_n - \sigma_V(y') = \tau_V(y)$. Следовательно, $\rho_V(y) \leqslant \tau_V(y)$. Далее, нетрудно показать, что $y \in r + V$, ибо $y = r + \tau_V(y) \cdot e$. А из предложения 4 следует, что $r + V \subset V$. Значит, расстояние от y до $\partial(r + V)$ не больше расстояния от y до ∂V, то есть $\rho_V(y)$. Но расстояние от y до $\partial(r + V)$ равно расстоянию от $y - r$ до ∂V, то есть $\rho_V(y - r)$. Итак $\rho_V(y - r) \leqslant \rho_V(y)$. Так как $y = r + \tau_V(y) \cdot e$, то

$$\rho_V(y - r) = \rho_V[\tau_V(y) \cdot e] = \tau_V(y) \cdot \rho_V(e) = a \cdot \tau_V(y).$$

Следовательно, $a \cdot \tau_V(y) \leqslant \rho_V(y)$ и предложение доказано.

3.2. Как и в § 2, мы будем рассматривать множества вида $D = \pi(V, \gamma) \subset \mathbf{C}^{n+m}$, где V (не обязательно специальный) — открытый выпуклый конус в $\mathbf{R}^n$, $n \geqslant 1$, а γ — непрерывное отображение из Ω в $\mathbf{R}^n$, где Ω открыто в $\mathbf{C}^m$, $m \geqslant 0$.

Напомним, что при $m = 0$, $\gamma \equiv 0$, $D = T_V$.

Предположим, что в области D задана произвольная функция Ψ и рассмотрим два случая:

1) Пусть $m=0$, $D=T_V$. Тогда будем писать $\lim\limits_{\infty} \Psi=0$, если $\Psi(z)\to 0$ при $\rho_V(y)\to+\infty$ $(z=x+iy)$.

Если к тому же V — специальный открытый выпуклый конус, то $\lim\limits_{\infty} \Psi=0$, тогда и только тогда, когда $\Psi(z)\to 0$ при $\sigma_V(y)\to+\infty$ $(z=x+iy)$. При этом для каждого фиксированного $z'=x'+iy'\in \mathbf{C}^{n-1}$ полезно ввести следующую функцию:

$$\Psi_{z'}(\omega)=\Psi(z',\ \omega+i\cdot\sigma_V(y')),\ \omega\in\mathbf{C}_+. \tag{3.6}$$

2) $m\geqslant 1$. Тогда при любом фиксированном $\zeta\in\Omega$ рассмотрим функцию

$$\Psi_\zeta(\omega)=\Psi(\omega+i\gamma(\zeta),\ \zeta),\ \omega\in T_V. \tag{3.7}$$

Будем писать $\lim\limits_{\infty}\Psi=0$, если для почти всех $\zeta\in\Omega$ имеем $\lim\limits_{\infty}\Psi_\zeta=0$.

Наконец, отметим, что точки $w\in\mathbf{C}^{n+m}$ часто будем записывать в виде $w=(z,\ \zeta)$, $z=x+iy\in\mathbf{C}^n$, $\zeta\in\mathbf{C}^m$.

3.3. В этом пункте мы доказываем основные утверждения настоящего параграфа.

Пусть $D=\pi(V,\ \gamma)\subset\mathbf{C}^{n+m}$, $p\in(0,\ \infty)$, $\alpha\in\mathbf{R}^1$. Для произвольной измеримой по Лебегу, вообще говоря, комплекснозначной функции $f(z,\ \zeta)$, $(z,\ \zeta)\in D$, положим $(z=x+iy)$

$$\|f\|_{p,\alpha}=\left\{\int\limits_D |f(z,\ \zeta)|^p\cdot[\rho_V(y-\gamma(\zeta))]^\alpha\, dm(z)\, x\, dm(\zeta)\right\}^{1/p}. \tag{3.8}$$

Тогда $L^p_\alpha(D)$ состоит, по определению, из тех функций f, для которых $\|f\|_{p,\alpha}<\infty$. Затем положим: $A^p_\alpha(D)=H(D)\cap L^p_\alpha(D)$.

Если $D=\pi(V,\ \gamma)$, где V — специальный открытый выпуклый конус и $f=f(z,\ \zeta)$, то из предложения 7 следует, что $f\in L^p_\alpha(D)$ тогда и только тогда, когда $(z=x+iy)$

$$\int\limits_D |f(z,\ \zeta)|^p\cdot[\sigma_V(y-\gamma(\zeta))]^\alpha dm(z)\times dm(\zeta)<+\infty. \tag{3.9}$$

Имеют место следующие утверждения, являющиеся аналогами лемм 3 и 4, доказательства которых почти совпадают с доказательствами названных лемм.

Лемма 5. *Пусть V — специальный открытый выпуклый конус в $\mathbf{R}^n$, $D=T_V$, $0<p<\infty$, $\alpha\in\mathbf{R}^1$. Если $f\in A^p_\alpha(D)$, то для почти всех $z'\in\mathbf{C}^{n-1}$, $f_{z'}\in A^p_\alpha(\mathbf{C}_+)$.*

Лемма 6. *Пусть V — открытый выпуклый конус в $\mathbf{R}^n$, $D=\pi(V,\ \gamma)\subset\mathbf{C}^{n+m}$, $m\geqslant 1$, $0<p<\infty$, $\alpha\in\mathbf{R}^1$. Если $f\in A^p_\alpha(D)$, то для почти всех $\zeta\in\Omega$, $f_\zeta\in A^p_\alpha(T_V)$.*

Теорема 7. *Пусть $0<p<\infty$, $\alpha\in\mathbf{R}^1$, $D=\pi(V,\ \gamma)\subset\mathbf{C}^{n+m}$. Если $\alpha\leqslant-1$, то $A^p_\alpha(D)=\{0\}$.*

Доказательство немедленно следует из предыдущих лемм. Ввиду этой теоремы всюду в дальнейшем имеет смысл рассматривать пространства $A^p_\alpha(D)$ при $\alpha > -1$.

Теорема 8. *Пусть* $0 < p < \infty$, $\alpha > -1$, $D = \pi(V, \gamma) \subset \mathbf{C}^{n+m}$. *Если* $f \in A^p_\alpha(D)$, *то* $\lim f = 0$.

Доказательство. Пусть сначала $m = 0$, $D = T_V$. Нам нужно показать, что при $\rho_V(y) \to +\infty$, $f(z) \to 0$ $(z = x + iy \in T_V)$.

Зафиксируем произвольное $z_0 = x_0 + iy_0 \in T_V$. Так как функция $|f|^p$ субгармонична в T_V, то $(z = x + iy)$

$$|f(z_0)|^p \leqslant \frac{2^{2n}}{[\rho_V(y_0)]^{2n}} \cdot \int_B |f(z)|^p \, dm(z), \tag{3.10}$$

где $B = \left\{ z;\ |z - z_0| < \frac{\rho_V(y_0)}{2} \right\}$. Заметим, что при $z \in B$

$$\frac{\rho_V(y_0)}{2} \leqslant \rho_V(y) \leqslant \frac{3}{2} \rho_V(y_0). \tag{3.11}$$

Если $\alpha \geqslant 0$, то

$$|f(z_0)|^p \leqslant \frac{2^{2n}}{[\rho_V(y_0)]^{2n}} \cdot \frac{[\rho_V(y_0)/2]^\alpha}{[\rho_V(y_0)/2]^\alpha} \cdot \int_B |f(z)|^p \, dm(z) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2^{2n+\alpha}}{[\rho_V(y_0)]^{2n+\alpha}} \cdot \int_B |f(z)|^p \cdot [\rho_V(y)]^\alpha \, dm(z) \leqslant \frac{2^{2n+\alpha}}{[\rho_V(y_0)]^{2n+\alpha}} \cdot \|f\|^p_{p,\alpha}. \tag{3.12}$$

Если же $-1 < \alpha \leqslant 0$, то

$$|f(z_0)|^p \leqslant \frac{2^{2n}}{[\rho_V(y_0)]^{2n}} \cdot \frac{\left[\frac{3}{2} \rho_V(y_0)\right]^\alpha}{\left[\frac{3}{2} \rho_V(y_0)\right]^\alpha} \cdot \int_B |f(z)|^p \, dm(z) \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^\alpha \cdot \frac{2^{2n}}{[\rho_V(y_0)]^{2n+\alpha}} \cdot \int_B |f(z)|^p \cdot [\rho_V(y)]^\alpha \, dm(z) \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^\alpha \cdot \frac{2^{2n}}{[\rho_V(y_0)]^{2n+\alpha}} \cdot \|f\|^p_{p,\alpha}. \tag{3.13}$$

Из (3.12) и (3.13) следует, что $|f(z_0)| \to 0$ при $\rho_V(y_0) \to +\infty$, что и требовалось доказать.

Если же $m \geqslant 1$, то утверждение теоремы сразу же следует из леммы 6 и уже рассмотренного случая $m = 0$.

Теорема 9. *Пусть* $0 < p < \infty$, $\alpha > -1$, $D = \pi(V, \gamma) \subset \mathbf{C}^{n+m}$. *Тогда существует константа* C, *зависящая только от* p *и* α *и конуса* V *такая, что*

$$|f|_{p,\alpha} \leqslant C \cdot |u|_{p,\alpha} \tag{3.14}$$

для произвольной функции $f = u + iv \in H(D)$ *с* $\lim\limits_{\infty} v = 0$.

Доказательство. Пусть сначала $m = 0$, $D = T_V$. Как следует из предложения 5, без ограничения общности можно считать, что V—специальный открытый выпуклый конус в $\mathbf{R}^n$. Пусть $f = u + iv \in H(D)$ и $\lim\limits_{\infty} v = 0$. Это означает, что $v(z) \to 0$ при $\tau_V(y) \to +\infty$ $(z = x + iy)$. Далее заметим, что при любом фиксированном $z' \in \mathbf{C}^{n-1}$

$$f_{z'}(\omega) = u_{z'}(\omega) + iv_{z'}(\omega), \ \omega \in \mathbf{C}_+. \tag{3.15}$$

При фиксированном $z' \in \mathbf{C}^{n-1}$, $v_{z'}(\omega) \to 0$ при $t \to +\infty$ $(\omega = s + it \in \mathbf{C}_+)$. Действительно, $v_{z'}(\omega) = v(z', \omega + i\sigma_V(y')$ и если положим

$$z = x + iy = (z', \omega + i\sigma_V(y')), \tag{3.16}$$

то $x = (x', s)$, $y = (y', t + \sigma_V(y'))$.

Поэтому $\tau_V(y) = t$. Значит, при $t \to +\infty$, $\tau_V(y) \to +\infty$ ($z' \in \mathbf{C}^{n-1}$ фиксировано). И поскольку $\lim\limits_{\infty} v = 0$, то получаем, что $v_{z'}(\omega) \to 0$ при $t \to +\infty$.

Таким образом, при произвольном $z' \in \mathbf{C}^{n-1}$, $f_{z'} = u_{z'} + iv_{z'} \in H(\mathbf{C}_+)$ и $v_{z'}(\omega) \to 0$ при $t \to +\infty$ $(\omega = s + it)$. Тогда по теореме 2

$$\int\limits_{\mathbf{C}_+} |f_{z'}(\omega)|^p \cdot t^\alpha \, dm(\omega) \leqslant C^p \cdot \int\limits_{\mathbf{C}_+} |u_{z'}(\omega)|^p \cdot t^\alpha \, dm(\omega), \tag{3.17}$$

где C зависит от p и α, но не от $z' \in \mathbf{C}^{n-1}$. При каждом $z' \in \mathbf{C}^{n-1}$ в (3.17) сделаем замену переменной: $\omega + i \cdot \sigma_V(y') = z_n$. Тогда $(z_n = x_n + iy_n$, $z' = x' + iy)$

$$\int\limits_{y_n > \sigma_V(y')} |f(z', z_n)|^p \cdot [y_n - \sigma_V(y')]^\alpha \, dm(z_n) \leqslant$$

$$\leqslant C^p \cdot \int\limits_{y_n > \sigma_V(y')} |u(z', z_n)|^p \cdot [y_n - \sigma_V(y')]^\alpha \, dm(z_n). \tag{3.18}$$

Учитывая соотношение (3.4) и интегрируя неравенство по всем $z' \in \mathbf{C}^{n-1}$, получим $(z = x + iy)$

$$\int\limits_{T_V} |f(z)|^p \cdot \tau_V(y)]^\alpha \, dm(z) \leqslant C^p \cdot \int\limits_{T_V} |u(z)|^p \cdot [\tau_V(y)]^\alpha \, dm(z). \tag{3.19}$$

Остается вспомнить предложение 7, которое вместе с (3.19) и дает (3.14), но уже с константой, зависящей и от конуса V.

Пусть теперь $m \geqslant 1$. Из условия $\lim\limits_{\infty} v = 0$ следует, что для почти всех $\zeta \in \Omega$, $\lim\limits_{\infty} v_\zeta = 0$. Поскольку для этих ζ: $f_\zeta = u_\zeta + i \cdot v_\zeta \in H(T_V)$, то согласно уже доказанному случаю $m = 0$

$$\int_{\tau_V} |f_\zeta(\omega)|^p \cdot [\rho_V(t)]^\alpha \, dm(\omega) \leqslant C^p \cdot \int_{\tau_1} |u_\zeta(\omega)|^p \cdot [\rho_V(t)]^\alpha \, dm(\omega). \tag{3.20}$$

Затем в (3.20) сделаем замену переменной $z = \omega + i \cdot \gamma(\zeta)$ и полученное неравенство проинтегрируем по всем $\zeta \in \Omega$. В результате опять получим (3.14) и теорема доказана.

Институт математики АН Армянской ССР

Поступила 3. XI. 1986

Ա. Է. Ջրբաշյան, Ա. Հ. Կարապետյան. Ինտեգրալ անհավասարություններ համալուծ պլուրիհարմոնիկ ֆունկցիաների միջև բազմաչափ տիրույթներում *(ամփոփում)*

Աշխատանքը նվիրված է տարբեր բազմաչափ կոմպլեքս տիրույթներում համալուծ պլուրիհարմոնիկ ֆունկցիաների L^p նորմերի $(0<p<\infty)$ միջև անհավասարությունների հաստատմանը։

Դրա համար սկզբում՝ հենվելով ինտեգրալ ներկայացումների վրա, ստացվում են համապատասխան ինտեգրալ անհավասարություններ վերին կիսահարթությունում համալուծ հարմոնիկ ֆունկցիաների համար։ Այնուհետև բազմաչափ տիրույթների լայն դասի համար համապատասխան խնդիրը բերվում է արդեն դիտարկված միաչափ դեպքին։

A. E. DJRBASHIAN, A. H. KARAPETIAN. *Integral inequalities between conjugate pluriharmonic functions in multidimensional domains* (summary)

In the present paper we prove inequalities between weighted L^p norms $(0<p<\infty)$ of conjugate pluriharmonic functions in different multidimensional complex domains

To do this we first prove corresponding inequalities between conjugate harmonic functions in the upper half—plane on the basis of their integral represention formula. Further for a wide class of domains in C^n the problem is reduced to the one-dimensional case for which the solution is known.

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. М. Джрбашян.* О представимости некоторых классов мероморфных функций в единичном круге, ДАН Арм.ССР, 3, № 1, 1945, 3—9.
2. *М. М. Джрбашян.* К проблеме представимости аналитических функций. Сообщ. Ин-та матем. и мех. АН Арм.ССР, вып. 2, 1948, 3—40.
3. *T. M. Flett.* The dual of an inequality of Hardy and Littlewood and some related inequalities, J. Math. Anal. Appl., 38, 1972, 746—765.
4. *Ф. А. Шамоян.* Приложения интегральных представлений Джрбашяна к некоторым задачам анализа, ДАН СССР, 261, № 3, 1981, 557—562.
5. *R. R. Coifman, R. Rochberg.* Representation theorems for holomorphic and harmonic functions in L^p, Astérisque, 77, 1980, 11—66.
6. *А. Э. Джрбашян.* Классы A_p^α гармонических функций в полупространствах и аналог теоремы М. Рисса, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», 22, № 4, 1987, 386—398.
7. *А. Б. Александров.* Теория функций в шаре, Итоги науки и техники, Современные проблемы математики, фундаментальные направления, т. 8, 1985, 115—190.
8. *С. Г. Гиндикин.* Анализ в однородных областях, УМН, 19, № 4, 1964, 3—92.
9. *М. М. Джрбашян, А. Э. Джрбашян.* Интегральные представления для некоторых классов аналитических функций в полуплоскости, ДАН СССР, 285, № 3, 1985, 547—550.
10. *F. Ricci, M. Taibleson.* Boundary values of hermonic functions in mixed norm spaces and their atomic structure, Annali Scuola Nor. Superiore—Pisa. Serie 6, 10, № 1, 1983, 1—54.