

УДК 517.53

И. О. ХАЧАТРЯН, С. А. АКОПЯН

КВАЗИАНАЛИТИЧЕСКИЕ КЛАССЫ ФУНКЦИЙ, ПРЕДСТАВИМЫХ ИНТЕГРАЛАМИ С ЯДРАМИ МИТТАГ-ЛЕФФЛЕРА

В настоящей статье устанавливается квазианалитичность некоторых классов бесконечно дифференцируемых функций. Эти классы вводятся с помощью интегральных представлений с ядрами Миттаг-Леффлера. Признаки квазианалитичности классов даются в терминах полноты системы полиномов или целых функций в различных пространствах. Такой подход впервые указан Б. Я. Левиным в том случае, когда классы определяются с помощью интегральных представлений с ядрами Фурье.

В некоторых приведенных ниже теоремах мы существенно опираемся на представление ядра Коши с помощью функции типа Миттаг-Леффлера, установленном М. М. Джрбашяном [1]. Статья является продолжением работы [2].

1°. Пусть $w(t)$ — определенная на $[0, +\infty[$ вещественная измеримая функция, удовлетворяющая условиям:

$$w(t) > 1, \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^n}{w(t)} = 0, n = 0, 1, 2, \dots,$$

$C_w[0, \infty[$ — множество непрерывных на $[0, +\infty[$ функций $f(t)$, для которых

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{f(t)}{w(t)} = 0 \text{ и } \|f\| = \sup_{0 < t < +\infty} \frac{|f(t)|}{w(t)}.$$

Очевидно, что функция $\cos \sqrt{ut}$ для каждого $u \geq 0$ принадлежит пространству $C_w[0, \infty[$ и если F — линейный функционал, действующий в $C_w[0, \infty[$, то равенством

$$f(u) \stackrel{\text{def}}{=} F[\cos \sqrt{ut}] = \int_0^{+\infty} \cos \sqrt{ut} \frac{d\sigma(t)}{w(t)} \quad (1)$$

получим функцию f , бесконечно дифференцируемую на $[0, +\infty[$.

В самом деле, имеем

$$(\cos \sqrt{ut})^{(n)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2n}} (-t)^n \left(\frac{\sqrt{ut}}{2} \right)^{-n + \frac{1}{2}} J_{n - \frac{1}{2}}(\sqrt{ut}),$$

где $J_\nu(x)$ — функция Бесселя первого рода. Но так как

$$\left| \left(\frac{\sqrt{ut}}{2} \right)^{-n+\frac{1}{2}} \int_{n-\frac{1}{2}}^1 (\sqrt{ut}) \right| = \left| \frac{2}{\sqrt{\pi} \Gamma(n)} \int_0^1 (1-\tau^2)^{n-1} \cos \sqrt{ut} \tau d\tau \right| \leq$$

$$\leq \frac{2}{\sqrt{\pi} (n-1)!} \int_0^1 (1-\tau^2)^{n-1} d\tau = \frac{1}{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)} \quad (u \geq 0, n \geq 1),$$

то дифференцирование под знаком интеграла (1) любое число раз законно.

Пусть теперь F пробегает сопряженное пространство. Тогда формулой (1) определяется некоторый класс бесконечно дифференцируемых функций на $[0, +\infty[$. Этот класс обозначим через K_w .

Определение 1. Класс K_w назовем квазианалитическим, если из $f \in K_w$, $g \in K_w$, $f^{(n)}(0) = g^{(n)}(0)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, следует, что $f(u) \equiv g(u)$, $u \in [0, +\infty[$.

Имеет место следующая

Теорема 1. Для квазианалитичности класса K_w , необходимо и достаточно, чтобы система $\{t^n\}_{n=0}^\infty$ была полна в $C_w[0, \infty[$.

Необходимость. Пусть класс K_w квазианалитичен и пусть F_0 — произвольный линейный функционал, обращающийся в нуль на системе $\{t^n\}_{n=0}^\infty$: $F_0[t^n] = 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Рассмотрим ту функцию $f_0(u)$, которая порождается этим функционалом равенством (1):

$$f_0(u) = F_0[\cos \sqrt{ut}] = \int_0^{+\infty} \cos \sqrt{ut} \frac{d\alpha_0(t)}{w(t)}.$$

Имеем $f_0^{(n)}(0) = c_n F_0[t^n] = 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$, и так как класс K_w квазианалитичен по предположению, то $f_0(u) \equiv 0$, $u \in [0, +\infty[$, т. е.

$$\int_0^{+\infty} \cos \sqrt{ut} \frac{d\alpha_0(t)}{w(t)} = 0, \quad u \in [0, +\infty[. \quad (2)$$

По теореме единственности преобразования Фурье—Стилтьеса [3, стр. 452] из (2) следует, что $d\alpha_0(t) \equiv 0$, $t \in [0, +\infty[$, следовательно $F_0 = 0$.

Достаточность. Пусть система $\{t^n\}_{n=0}^\infty$ полна в $C_w[0, \infty[$ и пусть $f_1(u)$ и $f_2(u)$ — две функции из K_w , такие, что $f_1^{(n)}(0) = f_2^{(n)}(0) = 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Рассмотрим функцию $f_0(u) = f_1(u) - f_2(u)$. Из линейности класса K_w следует, что $f_0(u) \in K_w$, т. е. $f_0(u) = F_0[\cos \sqrt{ut}]$.

Легко видеть, что $f_0^{(n)}(0) = c_n F_0[t^n]$, $n = 0, 1, 2, \dots$ ($c_n \neq 0$) и так как $f_0^{(n)}(0) = 0$, то $F_0[t^n] = 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Но по предположению система $\{t^n\}_{n=0}^\infty$ полна в $C_w[0, \infty[$. Отсюда следует, что $F_0 = 0$, т. е. $f_0(u) \equiv 0$ или $f_1(u) \equiv f_2(u)$, $u \in [0, +\infty[$. Отметим, что критерий полноты системы $\{t^n\}_{n=0}^\infty$ в $C_w[0, \infty[$ имеется в работе [4] в случае, ко-

гда $w(t)$ — нормально возрастающая функция и в [5] — в общем случае.

Пусть теперь класс K_w не квазианалитичен в смысле определения 1. Мы хотим выяснить, при каких условиях этот класс будет квазианалитическим по отношению к заданному порядку [6], [7]. При этом мы следуем схеме рассуждений Б. Я. Левина.

Определение 2. Пусть $\varphi(z)$ — определенная в правосторонней окрестности нуля функция такая, что $\lim_{\alpha \rightarrow +0} \alpha^{-n} \varphi(\alpha) = 0$, $n=0, 1, 2, \dots$. Класс K_w назовем квазианалитическим по отношению к порядку $\varphi(z)$, если из условий $f_0(u) \in K_w$ и

$$\int_0^{\alpha^2} |f_0(u)| u^{-\frac{1}{2}} du \leq \varphi(\alpha) \quad (3)$$

следует, что $f_0(u) \equiv 0$, $u > 0$.

Теперь приведем вышеупомянутое представление ядра Коши.

Теорема (М. М. Джрбашян) [1, стр. 149]. Пусть $\rho > 0$, $\nu > 0$ и $\theta (-\pi < \theta \leq \pi)$ — фиксированные параметры. Тогда справедлива формула

$$\frac{1}{z-t} = \rho e^{-i\rho t} z^{\mu\rho-1} \int_0^{\infty} e^{-(e^{-i\theta} z)^{\rho-\rho}} E_{\rho}(e^{-i\theta} t\tau, \mu) \tau^{\mu\rho-1} d\tau \quad (\mu > 0), \quad (4)$$

если $t \in D_{\rho}^*(\theta, \nu)$, $z \in \overline{D_{\rho}(\theta, \nu)}$, где $D_{\rho}(\theta, \nu) = \{z : \operatorname{Re}(e^{-i\theta} z)^{\rho} > \nu\}$, а $D_{\rho}^*(\theta, \nu)$ — дополнение к $\overline{D_{\rho}}$. Интеграл (4) сходится абсолютно и равномерно относительно обеих переменных t и z , если $t \in \overline{G}$ и $z \in \overline{D_{\rho}(\theta, \nu)}$, где G — любая ограниченная подобласть области $D_{\rho}^*(\theta, \nu)$. В формуле (4) участвует целая функция типа Миттаг—Леффлера, которая определяется разложением

$$E_{\rho}(z; \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma\left(\frac{k}{\rho} + \mu\right)}. \quad (5)$$

Отметим асимптотику функции типа Миттаг—Леффлера, которой мы воспользуемся позже:

$$E_{\rho}(z; \mu) = \begin{cases} \rho z^{\rho(1-\mu)} e^{z^{\rho}} + O\left(\frac{1}{z}\right), & |\arg z| \leq \alpha, \\ O\left(\frac{1}{z}\right), & \alpha \leq |\arg z| \leq \pi, \end{cases} \quad (6)$$

где $\frac{\pi}{2\rho} < \alpha < \min\left(\pi, \frac{\pi}{\rho}\right)$, а также соотношения

$$E_1(z; 1) = e^z, \quad E_{\frac{1}{2}}(-z, 1) = \cos \sqrt{z}.$$

Предположим, что $\beta = -\frac{1}{\alpha} \ln \varphi(\alpha) \nearrow +\infty$ при $\alpha \nearrow 0$. Обратную функцию обозначим через $\eta(\beta)$:

$$\beta = -\frac{1}{\alpha} \ln \varphi(\alpha) \Leftrightarrow \alpha = \eta(\beta).$$

Перейдем теперь к изложению нашего результата.

Итак, рассмотрим класс функций

$$f(u) = F \left[E \left(-ut, 1 \right) \right] = F[\cos \sqrt{ut}], \quad u > 0,$$

и пусть некоторая функция $f_0(u)$ из этого класса удовлетворяет условию (3).

Обозначим через F_0 функционал, которым порождается функция f_0 : $f_0(u) = F_0[\cos \sqrt{ut}]$. В формуле (4), беря $\rho = \frac{1}{2}$, $\mu = 1$, $\theta = \pi$, получим

$$\frac{1}{z-t} = \frac{1}{2} (-z)^{-\frac{1}{2}} \int_0^{+\infty} e^{-(-z)^{\frac{1}{2}} \tau^{\frac{1}{2}}} \cos \sqrt{t\tau} \tau^{-\frac{1}{2}} d\tau,$$

откуда следует, что

$$F_0(z) \stackrel{\text{def}}{=} F_0 \left[\frac{1}{z-t} \right] = \frac{1}{2} (-z)^{-\frac{1}{2}} \int_0^{+\infty} e^{-(-z)^{\frac{1}{2}} \tau^{\frac{1}{2}}} f_0(\tau) \tau^{-\frac{1}{2}} d\tau. \quad (7)$$

В равенстве (7), полагая $z = -x$ ($x > 0$), получим

$$\begin{aligned} F_0(-x) &= \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} \int_0^{+\infty} e^{-x^{\frac{1}{2}} \tau^{\frac{1}{2}}} f_0(\tau) \tau^{-\frac{1}{2}} d\tau, \\ |F_0(-x)| &\leq \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} \int_0^{+\infty} e^{-x^{\frac{1}{2}} \tau^{\frac{1}{2}}} |f_0(\tau)| \tau^{-\frac{1}{2}} d\tau = \\ &= \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} \left\{ \int_0^{a^2} |f_0(\tau)| \tau^{-\frac{1}{2}} d\tau + \int_{a^2}^{+\infty} e^{-x^{\frac{1}{2}} \tau^{\frac{1}{2}}} |f_0(\tau)| \tau^{-\frac{1}{2}} d\tau \right\}. \end{aligned} \quad (8)$$

Для второго слагаемого в (8) имеем оценку

$$\int_{a^2}^{+\infty} e^{-x^{\frac{1}{2}} \tau^{\frac{1}{2}}} |f_0(\tau)| \tau^{-\frac{1}{2}} d\tau \leq c_1 \int_{a^2}^{+\infty} e^{-x^{\frac{1}{2}} \tau^{\frac{1}{2}}} \tau^{-\frac{1}{2}} d\tau = \frac{c_2}{\sqrt{x}} e^{-a\sqrt{x}}.$$

Таким образом, получаем

$$|F_0(-x)| \leq c_3 x^{-\frac{1}{2}} [\varphi(a) + x^{-\frac{1}{2}} e^{-a\sqrt{x}}],$$

или

$$|F_0(-x)| \leq c_4 x^{-\frac{1}{2}} [\varphi(x) + e^{-a\sqrt{x}}], \quad x \geq 1.$$

Возьмем $a = \eta(\sqrt{x})$, тогда

$$|F_0(-x)| \leq 2c_4 x^{-\frac{1}{2}} e^{-\sqrt{x} \eta(\sqrt{x})}, \quad x \geq 1. \quad (9)$$

Обозначим через E множество целых функций $\Phi(z)$, $t\Phi(t) \in C_w[0, \infty[$ порядка $1/2$ и минимального типа, удовлетворяющих условию

$$|\Phi(-x)| \leq \text{const} \cdot x^{-\frac{1}{2}} e^{\sqrt{x} \gamma(\sqrt{x})}, \text{ при } x \geq 1, \quad (10)$$

а через $\mathcal{M}_\Phi$ — множество тех функций из E , для которых выполняется условие $\|\Phi(t)\| \leq 1$.

Введем обозначения: $\Phi_1(z) = (1+z^2)\Phi(z)$ и

$$q_\Phi(z) = F_0 \left[\frac{\Phi_1(t) - \Phi_1(z)}{t-z} \right].$$

Нетрудно доказать [5], что $q_\Phi(z)$ — целая функция порядка $1/2$ и минимального типа. Имеем

$$q_\Phi(z) = F_0 \left[\frac{\Phi_1(t)}{t-z} \right] - \Phi_1(z) F_0 \left[\frac{1}{t-z} \right].$$

Предположим, что $\Phi \in \mathcal{M}_\Phi$ (тогда $\|\Phi_1(t)(t+1)^{-1}\| \leq \text{const}$) и z принимает отрицательные значения $z = -x$, где $x \geq 1$.

Имея в виду (9) и (10) получаем

$$\begin{aligned} |q_\Phi(-x)| &= \left| F_0 \left[\frac{\Phi_1(t)}{t+x} \right] - \Phi_1(-x) F_0 \left[\frac{1}{t+x} \right] \right| \leq \\ &\leq \|F_0\| \left\| \frac{\Phi_1(t)}{t+x} \right\| + |\Phi_1(-x)| |F_0(-x)| \leq \\ &\leq \|F_0\| \left\| \frac{\Phi_1(t)}{t+1} \right\| \max_{0 < t < +\infty} \left| \frac{t+1}{t+x} \right| + |\Phi_1(-x)| |F_0(-x)| \leq c_5 (x \geq 1). \end{aligned}$$

Следовательно, по принципу Фрагмена—Линделёфа $q_\Phi(z) \equiv c_\Phi$, т. е.

$$F_0 \left[\frac{\Phi_1(t) - \Phi_1(z)}{t-z} \right] \equiv c_\Phi = \text{const}. \quad (11)$$

В частности, беря в (11) $z = i$ и $z = -i$, получим, что

$$F_0[(t+i)\Phi(t)] = F_0[(t-i)\Phi(t)] = c_\Phi$$

или

$$F_0(\Phi(t)) = 0, \quad \forall \Phi \in E. \quad (12)$$

Из (12) следует, что если E плотно в $C_w[0, \infty[$, то будем иметь $F_0 = 0$. Таким образом, доказана

Теорема 2. Если множество E целых функций порядка $1/2$ и минимального типа, удовлетворяющих условию (10), плотно в $C_w[0, \infty[$, то класс K_w квазианалитичен по отношению к порядку $\varphi(z)$.

Рассмотрим следующий пример. Пусть $\eta(r)$ — монотонно убывающая на $]0, +\infty[$ функция такая, что $\lim_{r \rightarrow \infty} r \frac{\eta'(r)}{\eta(r)} = 0$, и пусть

$$\rho(r) = \frac{1}{2} + \frac{\ln \eta(r)}{\ln r} \quad (r^\rho(r) = r^{\frac{1}{2}} \eta(r)).$$

Так как

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln \eta(r)}{\ln r} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r \eta'(r)}{\eta(r)} = 0$$

и

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \ln r \rho'(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} \left[r \frac{\eta'(r)}{\eta(r)} - \frac{\ln \eta(r)}{\ln r} \right] = 0,$$

то $\rho(r)$ — уточненный порядок [7], следовательно $r^{\rho(r)}$ — монотонно растет для всех достаточно больших значений r . Без ограничения общности можно предположить, что это свойство имеет место при $r \geq 1$. Пусть $r = \lambda_k$ — решение уравнения $r^{\rho(r)} = k$, т. е. $\lambda_k^{\rho(\lambda_k)} = k$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) и

$$G(\lambda) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_k} \right).$$

Легко видеть, что $G(\lambda)$ — целая функция порядка $\rho = \frac{1}{2}$ и минимального типа. Пусть далее $n(r)$ означает число нулей функции $G(\lambda)$ в круге $|\lambda| \leq r$, тогда

$$\Delta = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n(r)}{r^{\rho(r)}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{n(\lambda_k)}{\lambda_k^{\rho(\lambda_k)}} = 1$$

и по теореме Б. Я. Левина ([7], стр. 88) имеем

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln |G(-r)|}{r^{\rho(r)}} = \pi.$$

Следовательно

$$|G(-x)| = G(-x) < e^{c \sqrt{x} \eta_1(x)} = x^{-\frac{3}{2}} e^{\sqrt{x} \eta_1(\sqrt{x})}, \quad x \geq 1 \quad (c > \pi).$$

Пусть теперь $\varphi(z) = e^{-a \eta_1^{-1}(z)}$, где $\eta_1^{-1}(z)$ — обратная функция к η_1 . Определим весовую функцию $w(t)$ на полуоси следующим образом: $w(\lambda_k) = A_k$, а в остальных точках полуоси $w(t) = +\infty$, где A_k выбраны так, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\lambda_k^n}{A_k} = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

и чтобы система полиномов не была полна в $C_w[0, \infty[$. Пусть множество E имеет тот же смысл, что и в теореме 2. Тогда $cG(\lambda) \in E$ при любом значении постоянной c , так как $\|G(t)\| = 0$ и $G(\lambda)$ удовлетворяет условию (10). С другой стороны имеем

$$\sup_{\substack{\|\Phi\| < 1 \\ \Phi \in E}} |\Phi(t)| \geq \sup_c |cG(t)| = +\infty.$$

Но отсюда следует, что множество E плотно в $C_w[0, \infty[$. Следовательно, класс

$$f(u) = F[\cos \sqrt{ut}] = \int_0^{+\infty} \cos \sqrt{ut} \frac{dw(t)}{w(t)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{A_k} \cos \sqrt{u \lambda_k}, \quad \sum_1^{\infty} |a_k| < \infty.$$

будет квазианалитическим по отношению к порядку $\varphi(a) = e^{-a^2} \cdot$
 Обозначим $\sqrt[n]{u} = x$, $\sqrt[n]{v_k} = \mu_k$, получим, что класс

$$\tilde{f}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{A_k} \cos \mu_k x, \quad \sum_1 |a_k| = c(\tilde{f}) < \infty$$

квазианалитичен по порядку $\varphi(x)$. Приведенный результат можно рассмотреть как некоторое дополнение к теореме Б. Я. Левина [7, стр. 526—530].

2°. Теперь рассмотрим множество функций вида

$$f(u) = F[E_p(-ut, 1)] = \int_0^{+\infty} E_p(-ut, 1) \frac{dw(t)}{w(t)}, \quad \left(\rho > \frac{1}{2}\right). \quad (13)$$

Из асимптотики (6) функции типа Миттаг—Леффлера, а также асимптотики ее производных следует, что формулой (13) задается класс функций K_{ρ}^+ , определенных в замкнутой области $|\arg u| \leq \pi \left(1 - \frac{1}{2\rho}\right)$, аналитических в области $|\arg u| < \pi \left(1 - \frac{1}{2\rho}\right)$, значения которых на границе $L: \arg u = \pm \pi \left(1 - \frac{1}{2\rho}\right)$ бесконечно дифференцируемы.

В самом деле, имеем

$$E_p(-ut, 1)^n = (-t)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+n+1)}{k! \Gamma\left(\frac{k}{\rho} + \frac{n}{\rho} + 1\right)} (-ut)^k = (-t)_1^n F_1(-ut).$$

[Целая функция

$${}_1F_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+n+1)}{k! \Gamma\left(\frac{k}{\rho} + \frac{n}{\rho} + 1\right)} z^k \quad \left(\rho > \frac{1}{2}\right)$$

имеет асимптотику [8]

$${}_1F_1(z) = \begin{cases} \rho^n z^{n(\rho-1)} e^{z^\rho} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{z^\rho}\right) \right\}, & \text{при } |\arg z| \leq \frac{\pi}{2\rho} - \varepsilon, \\ O\left(\frac{1}{z^{n+1}}\right), & \text{при } \frac{\pi}{2\rho} + \varepsilon \leq |\arg z| \leq \pi \quad (\varepsilon > 0) \\ \rho^n z^{n(\rho-1)} e^{z^\rho} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{z^\rho}\right) \right\} + O\left(\frac{1}{z^{n+1}}\right), & \text{при } \frac{\pi}{2\rho} - \varepsilon < |\arg z| < \frac{\pi}{2\rho} + \varepsilon. \end{cases}$$

Следовательно, можно найти такие постоянные M_1 и M_2 , чтобы имели место неравенства:

а) если $\frac{\pi}{2\rho} - \varepsilon < |\arg z| < \frac{\pi}{2\rho} + \varepsilon$, $|z| \geq 0$, то

$$|{}_1F_1(z)| \leq M_1 (1 + |z|^{n(\rho-1)}) e^{\operatorname{Re} z^\rho} + \frac{M_2}{1 + |z|^{n+1}},$$

б) если $\frac{\pi}{2\rho} + \varepsilon \leq |\arg z| \leq \pi$, $|z| > 0$, то

$$|f_1(z)| \leq \frac{M_2}{1 + |z|^{n+1}}.$$

Поэтому, если $u = re^{\pm i\pi(1-\frac{1}{2\rho})}$, то

$$|[E_\rho(-ut, 1)]^{(n)}| \leq M_1 t^n [1 + (rt)^n (r^{p-1})] + \frac{M_2 t^n}{1 + (rt)^{n+1}} \quad (t > 0),$$

так что дифференцирование под знаком интеграла (13) любое число раз законно.

Квазианалитичность класса $K_{\Sigma, \rho}^+$ определяется как в определении 1. Аналогично теореме 1 доказывается следующая

Теорема 3. Для квазианалитичности класса $K_{\Sigma, \rho}^+$, необходимо и достаточно, чтобы система $\{t^n\}_{n=0}^\infty$ была полна в $C_\Sigma[0, \infty[$.

Пусть теперь класс $K_{\Sigma, \rho}^+$ не квазианалитичен в смысле определения 1. Пусть функция $\varphi(\alpha)$ удовлетворяет тем же условиям, что и в определении 2.

Определение 3. Класс $K_{\Sigma, \rho}^+$ называется квазианалитическим по отношению к порядку $\varphi(\alpha)$, если из условий $f_0(u) \in K_{\Sigma, \rho}^+$ и

$$\int_0^{a^{1/\rho}} |f_0(re^{\pm i\pi(1-\frac{1}{2\rho})})| r^{p-1} dr \leq \varphi(\alpha) \quad (14)$$

следует, что $f_0(u) \equiv 0$, $|\arg u| < \pi(1 - \frac{1}{2\rho})$.

Далее рассмотрим класс A_ρ^+ целых функций $\Phi(z)$, $t\Phi(t) \in C_\Sigma[0, \infty[$ порядка ρ и минимального типа, удовлетворяющих условиям

$$|\Phi(re^{\pm i\frac{\pi}{2\rho}})| \leq \text{const} \cdot r^{-\rho-1} e^{r^\rho \eta(r^\rho)}, \quad r \geq 1, \quad (15)$$

где функция η определяется как и выше (стр. 201—202). Аналогично теореме 2 справедлива следующая

Теорема 4. Пусть $\frac{1}{2} < \rho \leq 1$. Если класс A_ρ^+ целых функций порядка ρ и минимального типа, удовлетворяющих условию (15), плотен в $C_\Sigma[0, \infty[$, то класс $K_{\Sigma, \rho}^+$ квазианалитичен по отношению к порядку $\varphi(\alpha)$.

Доказательство. Пусть некоторая функция $f_0(u)$ из класса $K_{\Sigma, \rho}^+$ удовлетворяет условиям (14), и пусть F_0 — функционал, которым порождается функция $f_0: f_0(u) = F_0[E_\rho(-ut, 1)]$. Воспользовавшись представлением (4) (взяв $\mu = 1$, $\theta = \frac{\pi}{2\rho}$, $\theta = -\frac{\pi}{2\rho}$) и условиями (14

для функции $F_0(z) = F_0\left[\frac{1}{z-t}\right]$ как в доказательстве теоремы 2, получим оценки

$$|F_0(re^{\pm i \frac{\pi}{2p}})| \leq \text{const} \cdot r^{p-1} e^{-r^p}, \quad r \geq 1. \quad (16)$$

Далее, рассматриваем как и в теореме 2 целую функцию порядка ρ и минимального типа $q_\Phi(z)$:

$$q_\Phi(z) = F_0 \left| \frac{\Phi_1(z) - \Phi_1(z)}{z - z} \right|, \quad \Phi_1(z) = (1 + z^2) \Phi(z), \quad \Phi \in A_p^+.$$

Для функции $q_\Phi(z)$ с помощью оценок (15) и (16) получаем ограниченность на лучах $\arg z = \frac{\pi}{2\rho}$ и $\arg z = -\frac{\pi}{2\rho}$, откуда по принципу Фрагмена—Линделёфа и учитывая, что $\rho \leq 1$, получаем ограниченность функции $q_\Phi(z)$ на всей плоскости, т. е. $q_\Phi(z) \equiv \text{const}$. Доказательство заканчивается как в теореме 2.

Отметим частный случай $\rho = 1$ теоремы 3 (с заменой u на iu).

Теорема 3'. Чтобы класс функций, представимых в виде

$$f(u) = \int_0^{+\infty} e^{-iut} \frac{d\sigma(t)}{w(t)}, \quad (17)$$

был квазианалитичен, необходимо и достаточно, чтобы система $\{t^n\}_{n=0}^{\infty}$ была полна в $C_w[0, \infty[$.

Эту теорему можно рассмотреть как некоторое дополнение к теореме Б. Я. Левина: для того, чтобы класс функций, представимых в виде

$$g(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iut} \frac{d\sigma(t)}{w(t)}, \quad (18)$$

был квазианалитичным, необходимо и достаточно, чтобы система $\{t^n\}_{n=0}^{\infty}$ была полна в $C_w[-\infty, +\infty[$. В том случае, когда весовая функция $w(t)$ ($w(t) = w(-t)$) не обеспечивает полноту системы полиномов в $C_w[-\infty, +\infty[$, но обеспечивает полноту в $C_w[0, \infty[$, то тот подкласс неквазианалитического класса (18), который получается из (18), если взять только те меры $d\sigma(t)$, которые равны нулю на полуоси $]-\infty, 0[$, будет квазианалитическим.

Пример. Пусть $\lambda_k = k^p$ ($p > 1$), $k = 0, 1, 2, \dots$, и $G(\lambda) = \lambda \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_k}\right)$. Имеем [7]

$$\ln |G(\pm ir)| \sim \frac{\pi}{2 \sin \frac{\pi}{2p}} r^{1/p} = c(p) r \cdot r^{\frac{1}{p}-1}.$$

Следовательно

$$|G(\pm ir)| \leq e^{\eta(r)},$$

где $\eta(r) = c_1(p) r^{\frac{1}{p}-1}$ и $c_1 > c$ — произвольная постоянная. Соответствующая функция $\varphi(a)$ будет равна

$$\varphi(\alpha) = \exp(-c_2 \alpha^{\frac{1}{p-1}}), \quad c_2 = c_1^{\frac{p}{1-p}}.$$

Определим весовую функцию $w(t)$ на полуоси следующим образом:

$$w(t) = \begin{cases} +\infty, & \lambda_k < t < \lambda_{k+1} \\ A_k, & t = \lambda_k \end{cases} \quad (k=0, 1, 2, \dots),$$

где значения A_k подчинены тем же условиям, что и в предыдущем примере. Пусть множество A_1^+ имеет тот же смысл, что и в теореме 4. Тогда $cG(\lambda) \in A_1^+$ при любом значении постоянной c , так как $\|G(t)\|=0$ и $G(\lambda)$ удовлетворяет условию (15). С другой стороны

$$\sup_{\substack{\|G\| < 1 \\ \Phi \in A_1^+}} |\Phi(i)| \geq \sup_c |cG(i)| = +\infty.$$

Но отсюда следует, что множество A_1^+ плотно в $C_w[0, \infty[$. Следовательно, класс

$$f(u) = F[e^{-ut}] = \int_0^{+\infty} e^{-ut} \frac{d\sigma(t)}{w(t)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{A_k} e^{-\lambda_k u}, \quad \sum_k |a_k| < \infty,$$

$u \in]-i\infty, i\infty[$, неквазианалитический в обычном смысле является квазианалитическим по порядку $\varphi(z)$.

3°. Теперь перейдем к рассмотрению классов, связанных с весовыми приближениями на оси. Пусть $w(t)$ — определенная на $] -\infty, +\infty[$ вещественная измеримая функция, удовлетворяющая условиям

$$w(t) \geq 1, \quad \lim_{|t| \rightarrow +\infty} \frac{t^n}{w(t)} = 0, \quad n=0, 1, 2, \dots$$

Обозначим через $C_w]-\infty, +\infty[$ множество непрерывных на $] -\infty, +\infty[$ функций $f(t)$, для которых

$$\lim_{|t| \rightarrow +\infty} \frac{f(t)}{w(t)} = 0,$$

и определим норму элемента $f \in C_w]-\infty, +\infty[$ как

$$\|f\| = \sup_{-\infty < t < +\infty} \frac{|f(t)|}{w(t)}.$$

Для данного $\rho > 1$ рассмотрим класс $K_{w, \rho}$ функций вида

$$f(u) = F[E_\rho(-iut, 1)] = \int_{-\infty}^{+\infty} E_\rho(-iut, 1) \frac{d\sigma(t)}{w(t)}, \quad (19)$$

где F — произвольный линейный функционал в $C_w]-\infty, +\infty[$, а $E_\rho(z; \mu)$ — функция типа Миттаг—Леффлера (5). Каждая функция этого класса определена на объединении $D = \bar{\Delta}_1 \cup \bar{\Delta}_2$, где

$$\Delta_1 = \left\{ u : |\arg u| < \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{\rho} \right) \right\} \text{ и } \Delta_2 = \left\{ u : |\arg u - \pi| < \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{\rho} \right) \right\},$$

аналитична в областях Δ_1 и Δ_2 , бесконечно дифференцируема на ∂D .

Нас интересует квазианалитичность рассматриваемого класса в следующем смысле:

Определение 4. Класс $K_{w,p}$ назовем квазианалитическим, если из условий $f \in K_{w,p}$ и $f^{(n)}(0) = 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$, следует, что $f(u) \equiv 0$ при $u \in \Delta_1$ (или Δ_2).

Имеет место следующая

Теорема 5. Для того, чтобы класс $K_{w,p}$ был квазианалитическим, необходимо и достаточно, чтобы система $\{t^{(n)}\}_{n=0}^{\infty}$ была полна в $C_w] - \infty, +\infty[$.

Необходимость. Пусть класс $K_{w,p}$ квазианалитичен, F_0 — произвольный линейный функционал, исчезающий на системе $\{t^{(n)}\}_{n=0}^{\infty}$: $F_0[t^n] = 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$.

Рассмотрим функцию $f_0(u)$, порожденную этим функционалом формулой (19): $f_0(u) = F_0[E_p(-iut, 1)]$.

Имеем $f_0^{(n)}(0) = c_n F_0[t^n] = 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$, и так как по предположению класс $K_{w,p}$ квазианалитичен, то $f_0(u) \equiv 0$, $u \in \Delta_1$ ($u \in \Delta_2$), т. е. $F_0[E_p(-iut, 1)] = 0$ при $u \in \Delta_1$ (Δ_2). В частности, беря $u = 1$, получим $F_0[E_p(-it, 1)] = 0$. Таким образом, получили, что произвольный линейный функционал, исчезающий на системе $\{t^{(n)}\}_{n=0}^{\infty}$, исчезает также на функции $E_p(-it, 1)$. Это означает, что функцию $E_p(-it, 1)$, которая является целой функцией порядка p и типа 1 можно приблизить полиномами в метрике $C_w] - \infty, +\infty[$. Но это возможно только в случае, когда система $\{t^{(n)}\}_{n=0}^{\infty}$ полна в $C_w] - \infty, +\infty[$ [9. 10].

Достаточность. Пусть функция $f(u) \in K_{w,p}$ и $f^{(n)}(0) = 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Из (19) имеем $f^{(n)}(0) = c_n F[t^n]$, $c_n \neq 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$, следовательно $F[t^n] = 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$ и так как по предположению система $\{t^{(n)}\}_{n=0}^{\infty}$ полна в $C_w] - \infty, +\infty[$, то $F = 0$ и, следовательно, $f(u) \equiv 0$, $u \in \Delta_1 \cup \Delta_2$.

Перейдем теперь к рассмотрению вопроса квазианалитичности класса $K_{w,p}$ по данному порядку. Пусть класс $K_{w,p}$ не квазианалитичен в смысле определения 3, и пусть $\varphi(z)$ удовлетворяет тем же условиям, что и в определении 2.

Определение 5. Класс $K_{w,p}$ называется квазианалитическим по отношению к порядку $\varphi(z)$, если из условий $f_0(u) \in K_{w,p}$ и

$$\int_0^{1/p} |f_0(re^{+i\frac{\pi}{2}(1 \pm \frac{1}{p})})| r^{p-1} dr \leq \varphi(z) \quad (20)$$

следует, что $f_0(u) \equiv 0$, $u \in \Delta_1 \cup \Delta_2$.

Далее рассмотрим класс A_p целых функций $\Phi(z)$, $t\Phi(t) \in C_w] - \infty, +\infty[$, порядка p и минимального типа, удовлетворяющих условиям:

$$|\Phi(z)| \leq \text{const} \cdot |z|^{-p-1} e^{\gamma|z|^2}, \quad |z| > 1, \quad |\arg z| = \frac{\pi}{2} \pm \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2p} \right), \quad (21)$$

где функция γ определяется как и выше (стр. 201—202). Тогда имеет место следующая

Теорема 6. Пусть $1 \leq \rho \leq 2$. Если множество A_ρ целых функций порядка ρ и минимального типа, удовлетворяющих условию (21), плотно в C_w — ∞ , $+\infty$], то класс $K_{w,\rho}$ квазианалитичен по отношению к порядку $\varphi(x)$.

Доказательство. Пусть некоторая функция $f_0(u)$ из класса $K_{w,\rho}$ удовлетворяет условиям (20), и пусть F_0 — функционал, которым порождается функция $f_0: f_0(u) = F_0[E_\rho(-iut, 1)]$. Воспользовавшись представлением (4) (взяв $\theta = \pm \frac{\pi}{2\rho}$, $\theta_1 = \pm \left(\pi - \frac{\pi}{2\rho}\right)$ и $\mu = 1$) и условиями (20) для функции $F_0(z) = F_0\left[\frac{1}{z-t}\right]$ как в доказательстве теоремы 2, получим оценки

$$|F_0(re^{\pm i \frac{\pi}{2\rho}})| \leq \text{const} \cdot r^{\rho-1} e^{-r^\rho \eta(r^\rho)}, \quad (r \geq 1) \quad (22)$$

$$|F_0(re^{\pm i \pi \left(1 - \frac{1}{2\rho}\right)})| \leq \text{const} \cdot r^{\rho-1} e^{-r^\rho \eta(r^\rho)}.$$

Далее, рассматриваем как и в теореме 2 целую функцию порядка ρ и минимального типа $q_\Phi(z)$:

$$q_\Phi(z) = F_0\left[\frac{\Phi_1(t) - \Phi_1(z)}{t-z}\right], \quad \Phi_1(z) = (z^2 + 1)\Phi(z), \quad \Phi \in A_\rho.$$

С помощью оценок (21) и (22) для функции $q_\Phi(z)$ получаем ограниченность на лучах $\arg z = \pm \frac{\pi}{2\rho}$ и $\arg z = \pm \pi \left(1 - \frac{1}{2\rho}\right)$, откуда по принципу Фрагмена—Линделёфа и учитывая, что $\rho \leq 2$, получаем ограниченность функции $q_\Phi(z)$ на всей плоскости, т. е. $q_\Phi(z) \equiv \text{const}$. Доказательство заканчивается как в теореме 2.

4°. Пусть $w(t)$ — определенная на $L \equiv]-\infty, +\infty[\cup]-\infty, i\infty[$, вещественная измеримая функция, удовлетворяющая условиям:

$$w(t) \geq 1, \quad \lim_{|t| \rightarrow +\infty} \frac{t^n}{w(t)} = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$C_w(L)$ — множество непрерывных на L функций, для которых

$$\lim_{|t| \rightarrow +\infty} \frac{f(t)}{w(t)} = 0.$$

Норма элемента $f \in C_w(L)$ определяется как

$$\|f\| = \sup_{t \in L} \frac{|f(t)|}{w(t)}.$$

Для данного $\rho > 2$ рассмотрим класс $K_{w,\rho}^*$ функций вида

$$f(u) = F[E_\rho(-iut, 1)] = \int_L E_\rho(-iut, 1) \frac{dc(t)}{w(t)}, \quad (23)$$

где F — произвольный линейный функционал в $C_w(L)$.

Каждая функция этого класса определена на объединении $D = \bigcup_{k=1}^4 \bar{\Delta}_k$, где

$$\Delta_k = \left\{ u : \left| \arg u - (2k-1) \frac{\pi}{4} \right| < \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2\rho} \right\}, \quad k=1, 2, 3, 4,$$

аналитична в областях Δ_k ($k=1, 2, 3, 4$) и бесконечно дифференцируема на ∂D .

Определение 6. Класс $K_{\Sigma, \rho}^*$ назовем квазианалитическим, если из условий $f \in K_{\Sigma, \rho}^*$ и $f^{(n)}(0) = 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$ следует, что $f(u) \equiv 0$ при $u \in \Delta_1$ (или $\Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$).

Имеет место следующая

Теорема 7. Для того, чтобы класс $K_{\Sigma, \rho}^*$ был квазианалитическим, необходимо и достаточно, чтобы система $\{t^n\}_{n=0}^\infty$ была полна в $C_\Sigma(L)$.

Доказательство почти не отличается от доказательства теоремы 5 (см. также доказательство теоремы 9). Пусть теперь класс $K_{\Sigma, \rho}^*$ не квазианалитичен в смысле определения 6 и пусть $\varphi(\alpha)$ удовлетворяет тем же условиям, что и в определении 2.

Определение 7. Класс $K_{\Sigma, \rho}^*$ называется квазианалитическим по отношению к порядку $\rho(\alpha)$, если из условий $f_0(u) \in K_{\Sigma, \rho}^*$ и

$$\int_0^{\alpha^{1/\rho}} |f_0(re^{i\gamma_k^{(\pm)}})| r^{\rho-1} dr \leq \varphi(\alpha), \quad k=1, 2, 3, 4, \quad (24)$$

где $\gamma_k^{(\pm)} = (2k-1) \frac{\pi}{4} \pm \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2\rho} \right)$, $k=1, 2, 3, 4$ следует, что $f_0(u) \equiv 0$, $u \in D$.

Далее рассмотрим класс A_ρ^* целых функций $\Phi(z)$ порядка ρ и минимального типа, $t\Phi(t) \in C_\Sigma(L)$, удовлетворяющих условиям

$$|\Phi(z)| \leq \text{const} \cdot |z|^{-\rho-1} e^{|z|^\rho \eta(|z|^\rho)}, \quad |z| \geq 1, \quad |\arg z| = (2k-1) \frac{\pi}{4} \pm \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2\rho} \right), \quad k=1, 2, \quad (25)$$

где функция η определяется как и выше (стр. 201–202).

Тогда имеет место

Теорема 8. Пусть $2 < \rho \leq 4$. Если множество A_ρ^* целых функций порядка ρ и минимального типа, удовлетворяющих условию (25), плотно в $C_\Sigma(L)$, то класс $K_{\Sigma, \rho}^*$ квазианалитичен по отношению к порядку $\varphi(\alpha)$.

Доказательство. Пусть некоторая функция $f_0(u) \in K_{\Sigma, \rho}^*$ удовлетворяет условиям (24). Обозначим через F_0 функционал, которым порождается функция f_0 : $f_0(u) = F_0[E_\rho(-iut, 1)]$. Снова восполь-

зовавшись представлением (4) (взяв $\theta = \pm \frac{\pi}{2\rho}$, $\vartheta = \pm \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2\rho}\right)$, $\theta = \pm \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2\rho}\right)$ и $\mu=1$) и условиями (24) для функции $F_0(z) = F_0\left[\frac{1}{z-t}\right]$, получим оценки

$$|F_0(re^{i\theta})| \leq \text{const} \cdot r^{\rho-1} e^{-r^\rho \eta(r^\rho)}, \quad r \geq 1, \quad |\theta| = (2k-1) \frac{\pi}{4} \pm \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2\rho}\right), \quad k=1, 2. \quad (26)$$

Пусть $\mathfrak{M}_\Phi$ — множество тех функций из A_ρ , для которых выполняется условие $\left\| \frac{\Phi_1(t)}{t+1+i} \right\| \leq 1$ и

$$q_\Phi(z) = F_0 \left[\frac{\Phi_1(t) - \Phi_1(z)}{t-z} \right], \quad \Phi_1(z) = (z^2 - i)\Phi(z).$$

$q_\Phi(z)$ — целая функция порядка ρ и минимального типа. Предполагая что $\Phi \in \mathfrak{M}_\Phi$ и учитывая оценки (25), (26) как в доказательстве теоремы 2 получим, что на лучах $|\arg z| = (2k-1) \frac{\pi}{4} \pm \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2\rho}\right)$, ($k=1, 2$) функция $q_\Phi(z)$ ограничена. Применяя принцип Фрагмена—Линделёфа и учитывая, что $\rho \leq 4$, получим, что $q_\Phi(z) \equiv \text{const}$. Доказательство заканчивается как в теореме 2.

5°. Теперь рассмотрим класс $K_{w,2}^*$ функций вида

$$f(u) = F(E_2(-iut, 1)) = \int_1^\infty E_2(-iut, 1) \frac{d\tau(t)}{w(t)}, \quad (27)$$

где F — произвольный линейный функционал в $C_w(L)$. Каждая функция этого класса определена на лучах $\arg u = (2k-1) \frac{\pi}{4}$, $k=1, 2, 3, 4$ и бесконечно дифференцируема.

Определение 8. Класс $K_{w,2}^*$ назовем квазианалитическим, если из условий $f \in K_{w,2}^*$ и $f^{(n)}(0) = 0$, $n=0, 1, 2, \dots$, следует, что $f(u) \equiv 0$ при $\arg u = (2k-1) \frac{\pi}{4}$ ($k=1, 2, 3, 4$). Справедлива следующая

Теорема 9. Для того, чтобы класс $K_{w,2}^*$ был квазианалитическим, необходимо и достаточно, чтобы система $\{t^n\}_{n=0}^\infty$ была полной в $C_w(L)$.

Необходимость. Пусть класс $K_{w,2}^*$ квазианалитичен, и F_0 — произвольный линейный функционал, исчезающий на системе $\{t^n\}_{n=0}^\infty$: $F_0[t^n] = 0$, $n=0, 1, 2, \dots$. Рассмотрим функцию $f_0(u)$, порожденную этим функционалом формулой (27): $f_0(u) = F_0[E_2(-iut, 1)]$. Имеем $f_0^{(n)}(0) = c_n F_0[t^n] = 0$, $n=0, 1, 2, \dots$ и так как по предположению класс $K_{w,2}^*$ квазианалитичен, то $f_0(u) \equiv 0$ при $\arg u = (2k-1) \frac{\pi}{4}$.

т. е. $F_0[E_2(-iut, 1)] \equiv 0$ при $\arg u = (2k-1)\frac{\pi}{4}$ ($k=1, 2, 3, 4$). Это означает, что функция $E_2(-iut, 1)$ для произвольного значения u , $\arg u = (2k-1)\frac{\pi}{4}$ ($k=1, 2, 3, 4$) допускает приближение полиномами в $C_w(L)$. Отсюда следует, что система $\{t^n\}_{n=0}^\infty$ полна в $C_w(L)$. В самом деле, в противном случае множество полиномов $\mathfrak{M} \left(P \in \mathfrak{M}, \text{ если } \left\| \frac{P(t)}{t+1+i} \right\| \leq 1 \right)$ составило бы нормальное семейство хотя бы в одном из квадрантов [10, 11]. Пусть это — первый квадрант. Пусть D_1 означает угловую область, стороны которой параллельны координатным осям и замыкание которой лежит в первом квадранте. Обозначим через $\psi(z) = \sup_{P \in \mathfrak{M}} |P(z)|$, будем иметь [5]

$$\int_{\partial D_1} \ln \psi(\zeta) \frac{\partial G(\zeta, z)}{\partial n} ds < +\infty, \quad z \in D_1,$$

где G — функция Грина задачи Дирихле области D_1 . Далее из неравенства

$$\ln \psi(z) \leq \int_{\partial D_1} \ln \psi(\zeta) \frac{\partial G(\zeta, z)}{\partial n} ds, \quad z \in D_1$$

следует, что $\ln \psi(z)$ имеет порядок роста $\rho=2$ и минимальный тип в D_1 . Тогда любая функция, принадлежащая замыканию системы полиномов в метрике $C_w(L)$, на границе первого квадранта совпадает со значениями аналитической в этом квадранте функции, которая в D_1 имеет порядок роста $\rho=2$ и минимальный тип. Но функция $E_2(-iuz, 1)$ при $u = e^{i\frac{\pi}{4}}$ не удовлетворяет этому требованию. Следовательно,

функция $E_2(-ie^{i\frac{\pi}{4}}t, 1)$ может быть приближена полиномами в метрике $C_w(L)$ только в том случае, когда система полиномов полна в $C_w(L)$.

Достаточность. Пусть функция $f(u) \in K_{w,2}^*$ и $f^{(n)}(0) = 0$, $n=0, 1, 2, \dots$. Из (27) имеем $f^{(n)}(0) = c_n F[t^n]$, $c_n \neq 0$, $n=0, 1, 2, \dots$, следовательно $F[t^n] = 0$, $n=0, 1, 2, \dots$ и так как по предположению система $\{t^n\}_{n=0}^\infty$ полна в $C_w(L)$, то $F=0$ и, следовательно, $f(u) \equiv 0$.

Определение 9. Класс $K_{w,2}^*$ называется квазианалитическим по отношению к порядку $\varphi(z)$, если из условий $f_0(u) \in K_{w,2}^*$ и

$$\int_0^{\sqrt{a}} |f_0(re^{i(2k-1)\frac{\pi}{4}})| r dr \leq \varphi(a), \quad k=1, 2, 3, 4 \quad (28)$$

следует, что $f_0(u) \equiv 0$ при $\arg u = (2k-1)\frac{\pi}{4}$, $k=1, 2, 3, 4$. Далее

рассматривается класс A_2^* целых функций $\Phi(z)$ второго порядка и минимального типа, $i\Phi(t) \in C_w(L)$, удовлетворяющих условиям

$$|\Phi(z)| \leq \text{const} \cdot |z|^{-2} e^{[z]^2 \eta(|z|^2)}, \quad |z| \geq 1, \quad |\arg z| = (2k-1) \frac{\pi}{4}, \quad k=1, 2. \quad (29)$$

Справедлива следующая

Теорема 10. Если множество A_2^* целых функций второго порядка и минимального типа, удовлетворяющих условию (29), плотно в $C_w(L)$, то класс $K_{w,2}$ квазианалитичен по отношению к порядку $\varphi(\alpha)$.

Доказательство. Пусть некоторая функция $f_0(u)$ из класса $K_{w,2}$ удовлетворяет условиям (28), и пусть F_0 — функционал, которым порождается функция f_0 : $f_0(u) = F_0[E_2(-iut, 1)]$. Воспользовавшись представлением (4) (взяв $\theta = \pm \frac{\pi}{4}$, $\theta = \pm \frac{3}{4}\pi$ и $\mu = 1$) и условиями

(28) для функции $F_0(z) = F_0 \left| \frac{1}{z-t} \right|$ получим оценки

$$\begin{aligned} |F_0(re^{\pm i \frac{\pi}{4}})| &\leq \text{const} \cdot re^{-r^2 \eta(r^2)}, & (r \geq 1) \\ |F_0(re^{\pm i \frac{3\pi}{4}})| &\leq \text{const} \cdot re^{-r^2 \eta(r^2)}. \end{aligned} \quad (30)$$

Далее рассматриваем целую функцию второго порядка и минимального типа $q_\Phi(z)$:

$$q_\Phi(z) = F_0 \left| \frac{\Phi_1(t) - \Phi_1(z)}{t-z} \right|, \quad \Phi_1(z) = (z^2 - i)\Phi(z), \quad \Phi \in A_2^*.$$

Для функции $q_\Phi(z)$ с помощью оценок (29) и (30) получаем ограниченность на лучах $|\arg z| = (2k-1) \frac{\pi}{4}$, $k=1, 2$, откуда по принципу Фрагмена—Линделёфа получаем ограниченность функции $q_\Phi(z)$ на всей плоскости, т. е. $q_\Phi(z) \equiv \text{const}$.

Доказательство заканчивается как в теореме 2.

Авторы выражают искреннюю благодарность М. М. Джрбешяну и Б. Я. Левину за обсуждение работы и ценные советы.

Арм. государственный педагогический
институт им. Х. Абовяна,
Ереванский государственный
университет

Поступила 3. XI. 1986

Ի. Հ. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ, Ս. Ա. ԱԿՈՊՅԱՆ. Միտտագ-Լեֆլերի կոնֆորմով ինտեգրով ձևափոխությամբ ներկայացվող ֆունկցիաների գվադանալիտիկ դասեր (ամփոփում)

Հոդվածում քննարկվում է անվերջ դիֆերենցիալ ֆունկցիաների որոշ դասերի գվադանալիտիկության հարցը: Այդ դասերը մտցված են Միտտագ-Լեֆլերի կոնֆորմով ինտեգրով ներկայացումների օգնությամբ: Գվադանալիտիկության հայտանիշները տրված են բազմանդամների համակարգի կամ ամբողջ ֆունկցիաների որոշ դասերի լրիվության տերմիններով տարրեր ֆունկցիոնալ տարածություններում: Նման դրվածքով խնդիրն առաջինը դիտարկել է Բ. Ցա. Ակերը Ֆրեդհոլմի կոնֆորմով ներկայացվող դասերի համար:

Ներկա աշխատանքի մի շարք թեորեմներում մենք հենվում ենք համալիր տիրույթում ինտեգրալ նկարագրելիությունների Մ. Մ. Զրբաշյանի տեսության որոշ արդյունքների վրա:

I. H. KHACHATRIAN, S. A. HAKOBIAN. *Quasianalytical classes of functions representable by integrals with Mittag-Leffler kernels (summary)*

The quasianalyticity of some classes of infinitely differentiable functions is established. These classes are introduced by means of integral representations with Mittag-Leffler kernel. Quasianalyticity criteria for these classes are given in terms of completeness of systems of polynomials or entire functions in different spaces.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. М. Джрбашян. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, М., 1966.
2. И. О. Хачатрян. Квазианалитические классы, связанные с весовыми приближениями в комплексной области, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», 21, № 6, 1986.
3. А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. Элементы теории функций и функционального анализа, М., 1976.
4. М. М. Джрбашян. Некоторые вопросы взвешенно-полиномиальных приближений в комплексной области, Мат. сборник, 36, № 3, 1955, 353—440.
5. И. О. Хачатрян. О взвешенном приближении целых функций нулевой степени многочленами на действительной оси, Записки мех.-мат. фак-а и Харьковского матем. об-ва, серия 4, том 29, 1963, 129—142.
6. Б. Я. Левин, М. С. Лифшиц. О квазианалитических классах функций, представленных рядами Фурье, Мат. сборник, 9 (51):3 (1941), 693—710.
7. Б. Я. Левин. Распределение корней целых функций, М., 1956.
8. E. M. Wright. The asymptotic expansion of the generalized hypergeometric function. The Journal of The London Mathematical Society, vol. X, 1935, 286—293.
9. Н. И. Ахиезер. О взвешенном приближении непрерывных функций многочленами на всей числовой оси, УМН, XI, вып. 4 (70), 1956, 2—43.
10. С. Н. Мерелян. Весовые приближения многочленами, УМН, XI, вып. 5 (71), 1956, 107—152.
11. И. О. Хачатрян. О взвешенно-равномерном приближении непрерывных функций полиномами на двух лучах, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», 3, №№ 4, 5, 1968, 301—326.