

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.53

В. С. ЗАХАРЯН

ОБ ОДНОЙ ОЦЕНКЕ ДЛЯ ПРОИЗВЕДЕНИЯ  
М. М. ДЖРБАШЯНА

1°. Рассмотрим [1] произведение М. М. Джрбашяна

$$B_a(z; z_k) = \prod_{k=1}^{\infty} A_a(z; z_k) \quad (-1 < z < 0), \quad (1)$$

где для  $|z| < 1$  и  $|\zeta| < 1$  положено

$$A_a(z; \zeta) = \left(1 - \frac{z}{\zeta}\right) \exp \{-W_a(z; \zeta)\}, \quad (2)$$

$$W_a(z; \zeta) = \int_{|\zeta|}^1 \frac{(1-x)^a}{x} dx - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(1+a+k)}{\Gamma(1+a) \cdot \Gamma(1+k)} \cdot \left\{ \zeta^{-k} \times \right. \\ \times \left. \int_0^{|\zeta|} (1-x)^a \cdot x^{k-1} dx - \bar{\zeta}^k \int_{|\zeta|}^1 (1-x)^a \cdot x^{-k-1} dx \right\} \cdot z^k. \quad (3)$$

Произведение (1) при условии

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1 - |z_k|)^{1+a} < +\infty \quad (4)$$

равномерно и абсолютно сходится в любом замкнутом круге  $|z| \leq r < 1$  и является естественным аналогом произведения Бляшке

$$B(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{z_k - z}{1 - \bar{z}_k \cdot z} \cdot \frac{|z_k|}{z_k},$$

при этом

$$A_0(z, \zeta) = \frac{\zeta - z}{1 - \bar{\zeta} \cdot z} \cdot \frac{|\zeta|}{\zeta},$$

следовательно  $B_0(z, z_k) \equiv B(z)$ .

В совместной с М. М. Джрбашяном работе автора [2] доказано, что при условии (4) имеет место представление

$$B_a(z, z_k) = B(z) \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S_a(e^{-i\vartheta} \cdot z) d\vartheta(\vartheta) \right\}, \quad (5)$$

где  $\psi(\gamma)$  — некоторая невозрастающая функция ограниченной вариации на  $[0; 2\pi]$ , а

$$S_\alpha(z) = \Gamma(1+\alpha) \cdot \left\{ \frac{2}{(1-z)^{1+\alpha}} - 1 \right\} (|z| < 1).$$

Имея ввиду, что  $\operatorname{Re} S_\alpha(z) \geq 0$ , при  $-1 < \alpha < 0$ , из представления (5) получим неравенство

$$|B_\alpha(z, z_k)| \leq |B(z)|, \quad -1 < \alpha < 0,$$

и в частности

$$|A_\alpha(z; z_k)| \leq |A_0(z; z_k)|, \quad -1 < \alpha < 0. \quad (6)$$

В связи с этим М. М. Джрбашяном был поставлен вопрос: можно ли на единичной окружности получить более точную чем (6) оценку для  $A_\alpha(z, z_k)$  как сверху, так и снизу.

В настоящей заметке дается оценка сверху для  $A_\alpha(z; z_k)$  на единичной окружности, остается открытым вопрос о точности этой оценки и получение для  $A_\alpha(z; z_k)$  оценки снизу.

2°. Уточняя оценку, приведенную в работе [3], докажем следующую лемму.

**Лемма.** Для любых значений  $|z| < 1$ ,  $|\zeta| < 1$  и  $-1 < \alpha < 0$

$$U_\alpha(z, \zeta) \equiv \operatorname{Re} \left\{ W_\alpha(z, \zeta) - W_0(z, \zeta) + \frac{2\alpha}{2+\alpha} \int_{|x|=1} \frac{(1-x)^2 - 1}{x} dx \right\} \geq 0. \quad (7)$$

**Доказательство.** Из разложения (3) функции  $W_\alpha(z, \zeta)$  имеем

$$U_\alpha(z, \zeta) = \frac{a_0(\rho)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(\rho) |\omega|^k \cdot \cos(k \cdot \arg \omega),$$

где  $\rho = |\zeta|$ ,  $\omega = z \cdot \bar{\zeta}$  ( $|\omega| = \rho |z| < 1$ ),

$$a_0(\rho) = \frac{4(1+\alpha)}{2+\alpha} \int_{\rho}^1 \frac{(1-x)^2 - 1}{x} dx \geq 0, \quad (8)$$

$$a_k(\rho) = \frac{1}{k} - \frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{\Gamma(1+\alpha) \cdot \Gamma(1+k)} \cdot \left\{ \rho^{-2\alpha} \int_0^{\rho} (1-x)^2 \cdot x^{k-1} dx - \int_{\rho}^1 (1-x)^2 \cdot x^{k-1} dx \right\} \quad (k=1, 2, 3, \dots). \quad (9)$$

Заметим далее, что достаточно установить выпуклость последовательности  $\{a_k(\rho)\}_{k=0}^{\infty}$ , т. е. справедливость неравенств

$$\varphi_k(\rho) \equiv \Delta^2 a_k(\rho) = a_k(\rho) - 2a_{k+1}(\rho) + a_{k+2}(\rho) \geq 0 \quad (0 < \rho < 1, k \geq 0), \quad (10)$$

чтобы требуемое неравенство (7) непосредственно следовало из известной теоремы о неотрицательных тригонометрических рядах ([4], стр. 100).

Докажем первое из условий (10), т. е. установим, что

$$\varphi_0(\rho) \equiv \Delta^2 a_0(\rho) = a_0(\rho) - 2a_1(\rho) + a_2(\rho) \geq 0 \quad (0 < \rho < 1). \quad (11)$$

С этой целью, пользуясь формулами (8) и (9), как и в работе [3] запишем функцию  $\varphi_0(\rho)$  в раскрытом виде

$$\begin{aligned} \varphi_0(\rho) = & \frac{4(1+\alpha)}{2+\alpha} \int_{\rho}^1 \frac{(1-x)^{\alpha}-1}{x} dx - 2 \left\{ 1 - (1+\alpha) \times \right. \\ & \times \left[ \rho^{-2} \int_0^{\rho} (1-x)^{\alpha} dx - \int_{\rho}^1 (1-x)^{\alpha} \cdot x^{-2} dx \right] \Big\} + \\ & + \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(1+\alpha)(2+\alpha) \left[ \rho^{-4} \int_0^{\rho} (1-x)^{\alpha} \cdot x dx - \int_{\rho}^1 (1-x)^{\alpha} \cdot x^{-3} dx \right] \right\}. \end{aligned} \quad (12)$$

Заметим, что из (12) следует формула

$$\rho \cdot \varphi'_0(\rho) = - \int_0^{\rho} \left\{ \frac{4(1+\alpha)}{2+\alpha} - 4(1+\alpha) \cdot x \cdot \rho^{-2} + (1+\alpha)(2+\alpha)x^2 \cdot \rho^{-4} \right\} d(1-x)^{\alpha},$$

которую можно записать также в виде

$$\frac{\rho}{4(1+\alpha)} \cdot \varphi'_0(\rho) = - \int_0^{\rho} \left[ 1 - (2+\alpha) \cdot x \cdot \rho^{-2} + \frac{(2+\alpha)^2}{4} \cdot x^2 \cdot \rho^{-4} \right] d(1-x)^{\alpha}. \quad (13)$$

При  $-1 < \alpha < 0$  функция  $(1-x)^{\alpha}$  возрастает на  $[0, 1]$ , а

$$1 - (2+\alpha) \cdot x \cdot \rho^{-2} + \frac{(2+\alpha)^2}{4} \cdot x^2 \cdot \rho^{-4} \geq 0.$$

Повтому из (13) заключаем, что  $\varphi'_0(\rho) \leq 0$ . Это значит, что на интервале  $[0, 1]$  функция  $\varphi_0(\rho)$  убывающая, и в частности

$$\varphi_0(\rho) \geq \varphi_0(1) \quad (0 < \rho < 1).$$

Остается заметить, что как следует из (12)  $\varphi_0(1) = 0$ . Итак, утверждение (10) для  $k = 0$  справедливо.

Неравенства (10) для  $k \geq 1$  доказаны в работе [3] (см. теорему 6).

Таким образом, имея в виду представление (2), приходим к следующему утверждению.

**Теорема 1.** При  $-1 < \alpha < 0$

$$|A_{\alpha}(z, \zeta)| \leq \exp \left\{ \frac{2\alpha}{2+\alpha} \int_{|\zeta|}^1 \frac{(1-x)^{\alpha}-1}{x} dx \right\} |A_0(z, \zeta)|. \quad (14)$$

Отсюда, согласно (1), получим также следующую теорему.

**Теорема 2.** При  $-1 < \alpha < 0$

$$|B_\alpha(z, z_k)| \leq \exp \left\{ \frac{2\alpha}{2+\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{|z_k|}^1 \frac{(1-x)^\alpha - 1}{x} dx \right\} |B_0(z, z_k)|. \quad (15)$$

При  $z$  принадлежащем единичной окружности, из неравенства (15) получим при  $-1 < \alpha < 0$

$$|B_\alpha(e^{i\varphi}, z_k)| \leq \exp \left\{ \frac{2\alpha}{2+\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{|z_k|}^1 \frac{(1-x)^\alpha - 1}{x} dx \right\}, \quad (0 < \varphi \leq 2\pi). \quad (16)$$

Замечание 1. Из неравенства (15) следует, что

$$|B_\alpha(z, z_k)| \leq |B_0(z, z_k)|, \quad -1 < \alpha < 0.$$

Замечание 2. В неравенствах (14), (15) и (16) можно иметь в виду, что при  $-1 < \alpha < 0$

$$1 - (1-x)^{-\alpha} \geq -\alpha x \quad (0 \leq x \leq 1)$$

и следовательно

$$\int_p^1 \frac{(1-x)^\alpha - 1}{x} dx \geq -\frac{\alpha}{1+\alpha} (1-p)^{1+\alpha} \quad (0 < p < 1).$$

Например, из теоремы 2 вытекает

Теорема 2'. При  $-1 < \alpha < 0$

$$|B_\alpha(z, z_k)| \leq \exp \left\{ -\frac{2\alpha^2}{(1+\alpha)(2+\alpha)} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (1-|z_k|)^{1+\alpha} \right\} |B_0(z, z_k)|.$$

Замечание 3. Если в неравенстве (7) заменить  $\frac{2\alpha}{2+\alpha}$  на  $\beta$ , то легко проверить, что квадратный трехчлен в равенстве (13) будет неотрицательным только при  $\beta > \frac{2\alpha}{2+\alpha}$ , так что при доказательстве этим методом коэффициент  $\frac{2\alpha}{2+\alpha}$  в неравенствах (14), (15) и (16) наилучший.

Ереванский политехнический  
институт им. К. Маркса

Поступила 2. IV. 1987

## ЛИТЕРАТУРА

1. М. М. Джрбашян. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, М., 1966.
2. М. М. Джрбашян, В. С. Захарян. О факторизации функций  $B_\alpha$ . Мат., заметки, 4, № 1, 1968, 3—10.
3. М. М. Джрбашян, В. С. Захарян. Граничные свойства мероморфных функций класса  $N_\alpha$ . Изв. АН Арм.ССР, «Математика», 2, № 5, 1967, 275—294.
4. Н. Бари. Тригонометрические ряды, М., 1961.