

УДК 517.518

А. М. АРАМЯН

О ПРОДОЛЖЕНИИ НУЛЕМ ФУНКЦИЙ ИЗ ПРОСТРАНСТВ

$$C^{\vec{l}}(\Omega) \text{ и } W_p^{\vec{l}}(\Omega)$$

Проблеме продолжения на все пространство и плотности гладких или гладких финитных функций в различных функциональных пространствах посвящены работы многих авторов. В частности, для пространства С. Л. Соболева $W_p^{\vec{l}}(\Omega)$ плотность гладких или гладких финитных в Ω функций при различных предположениях на характер области Ω доказана С. Л. Соболевым [1], Е. Гальярдо [2] и В. П. Ильиным [3]. Для пространства $W_p^{\vec{l}}(\Omega)$, где $\vec{l}$ — вектор, Ω — выпуклая ограниченная область, плотность гладких финитных в Ω функций доказана С. М. Никольским в [4]. Для этого же пространства, когда область допускает «локальный сдвиг», эта плотность установлена Г. Г. Казаряном в [5]; В. И. Буренковым в [6], [7] получены условия, при которых функции из $C^r(\Omega)$ и $W_p^{\vec{l}}(\Omega)$ можно продолжить нулем вне Ω и приблизить функциями из $C_0^\infty(\Omega)$ для произвольного открытого множества Ω . Г. Г. Казаряном установлена плотность множества бесконечно дифференцируемых финитных в Ω функций ($C_0^\infty(\Omega)$) в более общих функциональных пространствах $\mathcal{X}_0(\Omega)$, порожденных дифференциальными выражениями (см., например, [8]). Отметим также работы В. И. Буренкова [9]—[11], Б. Л. Файна [12], [13] и С. М. Никольского о продолжении дифференцируемых функций. Подробную историю вопроса и более полную литературу можно найти в монографиях [15—17].

В настоящей работе результаты, полученные различными авторами для изотропных функциональных пространств, переносятся на анизотропные пространства. Мы будем пользоваться результатами и методами этих авторов и прежде всего методами, развитыми в работах В. И. Буренкова (см. [6—7], [9—11]).

Будем пользоваться следующими обозначениями: E_n — n -мерное евклидово пространство точек $x = (x_1, \dots, x_n)$ и $\Omega \subset E_n$ — произвольное открытое множество с границей Γ . N_+^n — множество мультииндексов, т. е. векторов $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ с целыми неотрицательными компонентами. Если $x \in E_n$, $\alpha \in N_+^n$, то положим: $|x| = \sum_{j=1}^n \alpha_j$, $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$.

Пусть $A = \{\alpha^1, \dots, \alpha^N\}$, $\alpha^j \in N_+^n$ ($j = 1, \dots, N$).

Определение 1. Характеристическим многогранником (х.м.) или многогранником Ньютона множества мультииндексов A назовем

наименьший выпуклый многогранник $N = N(A)$ в E_n , содержащий все точки A .

Определение 2. Многогранник N назовем полным, если начало координат N_+^1 является вершиной N и N имеет вершины на каждой оси координат N_+^n , отличные от начала координат.

Определение 3. Полный многогранник N назовем правильным, если внешние нормали $(n-1)$ -мерных некоординатных граней N имеют только неотрицательные координаты.

Пусть N — правильный многогранник с вершинами из N_+^n .

Будем говорить, что функция $f \in C^N(\Omega)$, если в Ω существуют и непрерывны частные производные $D^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} f$ для всех $\alpha \in N \cap N_+^n$ и конечна норма

$$\|f\|_{C^N(\Omega)} = \sum_{\alpha \in N} \|D^\alpha f\|_{C(\Omega)}. \quad (1)$$

Функция $f \in \tilde{C}^N(\Omega)$, если $f \in C^N(\Omega)$ и для любых $x \in \Gamma(\Omega)$, $\alpha \in N$

$$\lim_{\substack{y \rightarrow x \\ y \in \Omega}} D^\alpha f(y) = 0. \quad (2)$$

Будем говорить, что функция $f \in W_p^N(\Omega)$, если в Ω существуют обобщенные по С. Л. Соболеву производные $D^\alpha f$, $\alpha \in N \cap N_+^n$, принадлежащие $L_p(\Omega)$ и конечна норма

$$\|f\|_{W_p^N(\Omega)} = \sum_{\alpha \in N} \|D^\alpha f\|_{L_p(\Omega)}. \quad (3)$$

При $N = \{\alpha : |\alpha| \leq 1\}$, где $|\alpha| \in N_+^n$ — выше определенные функциональные пространства $C^N(\Omega)$ и $W_p^N(\Omega)$, будут обозначены $\tilde{C}^1(\Omega)$ и $W_p^1(\Omega)$, соответственно.

Пусть $x \in \Omega$, положим

$$\rho(x, \Gamma(\Omega)) = \inf_{y \in \Gamma(\Omega)} |x - y|, \quad \Omega_\delta = \{x \in \Omega; \rho(x, \Gamma(\Omega)) > \delta\}.$$

Обозначим через $K(x, \delta)$ открытый шар с центром в точке x и радиусом δ . Для каждого $i = 1, \dots, n$ введем следующие обозначения:

$$\Omega_{i, \delta} = \{x \in \Omega; \inf_{\substack{y \in \Gamma \\ y_j = x_j \\ j \neq i}} |x_i - y_i| > \delta\}, \quad (4)$$

$$K_i(x, \delta) = K(x, \delta) \cap (\Omega - \Omega_{i, \delta}).$$

Пусть $x \in \Omega$ для любого вектора $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ с положительными компонентами и числа $\delta > 0$ обозначим

$$\rho_\mu(x, y) = \left(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^{\frac{2}{\mu_i}} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \rho_\mu(x, \Gamma) = \inf_{y \in \Gamma} \rho_\mu(x, y),$$

$$\rho_{i, \mu}(x, \Gamma) = \inf_{\substack{y \in \Gamma \\ y_j = x_j \\ j \neq i}} |x_i - y_i|^{\frac{1}{\mu}}, \quad \Omega_\mu^i = \{x \in \Omega; \rho_{i, \mu}(x, \Gamma) > \delta\},$$

$$K_\mu(x, \delta) = \{y \in E_n; \rho_\mu(x, y) < \delta\}.$$

Пусть $\alpha \in N_+^n$, положим

$$\gamma \alpha = \{\beta \in N_+^n; \beta_i \leq \alpha_i, i = 1, \dots, n\}.$$

Теорема 1. Пусть $\alpha \in N_+^n$, $\Omega \subset E_n$, $f \in C^{(\gamma \alpha)}(\Omega)$. Тогда для любого $\delta > 0$

$$\|f\|_{C(\Omega - \Omega_n, \delta)} \leq \frac{\delta^{\alpha_n}}{\alpha_n!} \left\| \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} f \right\|_{C(\Omega - \Omega_n, \delta)}, \quad (5)$$

$$\left\| \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} f \right\|_{C(\Omega - \Omega_{(n-1)}, \delta)} \leq \frac{\delta^{\alpha_{n-1}}}{\alpha_{n-1}!} \left\| \frac{\partial^{\alpha_{n-1} + \alpha_{n-1}}}{\partial x_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \partial x_n^{\alpha_{n-1}}} f \right\|_{C(\Omega - \Omega_{(n-1)}, \delta)}$$

$$\left\| \frac{\partial^{|\alpha| - \alpha_1}}{\partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} f \right\|_{C(\Omega - \Omega_1, \delta)} \leq \frac{\delta^{\alpha_1}}{\alpha_1!} \|D^\alpha f\|_{C(\Omega - \Omega_1, \delta)}$$

Доказательство. Пусть $y \in \Omega - \Omega_n$. Тогда существует точка $x \in \Gamma(\Omega)$, для которой $x_j = y_j$, $j = 1, \dots, n-1$ и $|x_n - y_n| \leq \delta$. Возьмем произвольную точку x' такую, что $x'_j = x_j$, $j = 1, \dots, n-1$ и $\min(x_n, y_n) < x'_n < \max(x_n, y_n)$. Так как функция f на Ω имеет по n -ой переменной непрерывные производные до порядка α_n включительно, то рассматривая ее как функцию одной переменной x_n , можно функцию $f(x)$ разлагать по формуле Тейлора в окрестности точки x'

$$f(y) = f(x') + f'_{x_n}(x') (y_n - x'_n) + \dots + \frac{1}{(\alpha_n - 1)!} f_{x_n}^{(\alpha_n - 1)}(x') (y_n - x'_n)^{\alpha_n - 1} + \quad (6)$$

$$+ \frac{1}{(\alpha_n - 1)!} \int_{x'_n}^{y_n} \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} f(z) (y_n - z_n)^{\alpha_n - 1} dz_n, \quad z_j = x'_j, \quad j \neq n.$$

Перейдем в равенстве (6) к пределу при $x'_n \rightarrow x_n$. Так как по условию теоремы $f \in C^{(\gamma \alpha)}(\Omega)$, то из (6) имеем

$$f(y) = \frac{1}{(\alpha_n - 1)!} \cdot \int_{x_n}^{y_n} \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} f(z) (y_n - z_n)^{\alpha_n - 1} dz_n.$$

Следовательно

$$\|f\|_{C(\Omega - \Omega_n, \delta)} \leq \frac{1}{(\alpha_n - 1)!} \left\| \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} f \right\|_{C(\Omega - \Omega_n, \delta)} \cdot \left| \int_{x_n}^{y_n} (y_n - z_n)^{\alpha_n - 1} dz_n \right| =$$

$$= \frac{1}{\alpha_n!} |y_n - x_n|^{2n} \cdot \left\| \frac{\partial^{2n}}{\partial x_n^{2n}} f \right\|_{C(\Omega - \Omega_n, \delta)} \leq \frac{1}{\alpha_n!} \delta^{2n} \left\| \frac{\partial^{2n}}{\partial x_n^{2n}} f \right\|_{C(\Omega - \Omega_n, \delta)},$$

откуда имеем

$$\|f\|_{C(\Omega - \Omega_n, \delta)} \leq \frac{\delta^{2n}}{\alpha_n!} \left\| \frac{\partial^{2n}}{\partial x_n^{2n}} f \right\|_{C(\Omega - \Omega_n, \delta)}.$$

Пусть $y \in \Omega - \Omega_{(n-1), \delta}$. Существует точка $x \in \Gamma(\Omega)$, для которой $x_j = y_j$, $j \neq n-1$ и $|x_{n-1} - y_{n-1}| \leq \delta$. Возьмем произвольную точку x' такую, что $x'_j = x_j$, $j \neq n-1$ и $\min(x_{n-1}, y_{n-1}) < x'_{n-1} < \max(x_{n-1}, y_{n-1})$.

Так как функция $\frac{\partial^{2n}}{\partial x_n^{2n}} f$ на Ω имеет по $(n-1)$ -ой переменной непрерывные производные до порядка α_{n-1} включительно, то рассматривая ее как функцию одной переменной x_{n-1} и, поступая как и выше, получим второе из неравенств (5). Продолжая этот процесс, мы придем к доказательству всех неравенств (5). Теорема 1 доказана.

Следствие. Пусть выполняются условия теоремы 1, тогда для произвольной точки $x \in \Gamma$

$$\begin{aligned} \|f\|_{C(K_n(x, \delta))} &\leq \frac{\delta^{2n}}{\alpha_n!} \left\| \frac{\partial^{2n}}{\partial x_n^{2n}} f \right\|_{C(K_n(x, 2\delta))}, \\ \left\| \frac{\partial^{2n}}{\partial x_n^{2n}} f \right\|_{C(K_{n-1}(x, \delta))} &\leq \frac{\delta^{2n-1}}{\alpha_{n-1}!} \left\| \frac{\partial^{2n+2n-1}}{\partial x_{n-1}^{2n-1} \partial x_n^{2n}} f \right\|_{C(K_{n-1}(x, 2\delta))}, \\ \left\| \frac{\partial^{|\alpha|-2n}}{\partial x_2^{2n} \dots \partial x_n^{2n}} f \right\|_{C(K_1(x, \delta))} &\leq \frac{\delta^{2n}}{\alpha_1!} \|D^\alpha f\|_{C(K_1(x, 2\delta))}. \end{aligned} \quad (7)$$

Лемма 1. Пусть выполнены условия теоремы 1 и

$$\Phi(x) = \begin{cases} f(x), & x \in \Omega \\ 0, & x \notin \Omega, \end{cases}$$

тогда для всех $\beta \in \Gamma_\alpha$

$$D^\beta \Phi \in C(E_n). \quad (8)$$

Доказательство. Если $x \in \Omega$ или $x \notin \bar{\Omega}$, то существование и непрерывность производных $D^\beta \Phi$ очевидно. Пусть $x \in \Gamma$, тогда $\Phi(x) = 0$ и

$$\frac{\partial}{\partial x_n} \Phi(x) = \lim_{\Delta x_n \rightarrow 0} \frac{\Phi(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n + \Delta x_n) - \Phi(x)}{\Delta x_n}.$$

Рассмотрим следующие два взаимоисключающих случая:

$$1) \bar{x} \equiv (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n + \Delta x_n) \notin \Omega, \quad 2) \bar{x} \in \Omega.$$

В первом случае очевидно, что $\frac{\partial}{\partial x_n} \Phi(x) = 0$, а во втором случае, в силу (7) при $\delta = 2\Delta x_n$, $\Delta x_n \rightarrow 0$

$$\Phi(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n + \Delta x_n) = f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n + \Delta x_n) = o(\delta^{2n}).$$

И следовательно на Γ существуют производные $\frac{\partial^k}{\partial x_n^k} \Phi$ и $\frac{\partial^k}{\partial x_n^k} \Phi|_{\Gamma} = 0$,
 $k = 1, \dots, \alpha_n$.

Имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{\alpha_n+1}}{\partial x_{n-1} \partial x_n^{\alpha_n}} \Phi(x) &= \frac{\partial}{\partial x_{n-1}} \left(\frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} \Phi(x) \right) = \\ &= \lim_{\Delta x_{n-1} \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} \Phi(x_1, \dots, x_{n-1} + \Delta x_{n-1}, x_n) - \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} \Phi(x)}{\Delta x_{n-1}}. \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь следующие два возможных случая:

1) $\tilde{x} = (x_1, \dots, x_{n-1} + \Delta x_{n-1}, x_n) \in \Omega$, 2) $\tilde{x} \in \Omega$. В первом случае очевидно, что $\frac{\partial^{\alpha_n+1}}{\partial x_{n-1} \partial x_n^{\alpha_n}} \Phi(x) = 0$, во втором случае при $\delta = 2\Delta x_{n-1}$, $\Delta x_{n-1} \rightarrow 0$, в силу неравенства (7)

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} \Phi(x_1, \dots, x_{n-1} + \Delta x_{n-1}, x_n) = \\ &= \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} f(x_1, \dots, x_{n-1} + \Delta x_{n-1}, x_n) = o(\delta^{\alpha_n-1}). \end{aligned}$$

И следовательно, на Γ существуют производные $\frac{\partial^{\alpha_n+k}}{\partial x_{n-1}^k \partial x_n^{\alpha_n}} \Phi$, при этом

$$\frac{\partial^{\alpha_n+k}}{\partial x_{n-1}^k \partial x_n^{\alpha_n}} \Phi|_{\Gamma} = 0, \quad k = 1, \dots, \alpha_{n-1}.$$

Продолжая эти рассуждения, мы докажем существование производных $D^{\beta} \Phi \in \cap \alpha$ на Γ и тот факт, что $D^{\beta} \Phi|_{\Gamma} = 0$. Докажем, что функции $D^{\beta} \Phi \in \cap \alpha$ непрерывны на Γ . На самом деле, при $x \in \Gamma$, из (2) и из доказанного выше факта следует, что

$$\lim_{\substack{y \rightarrow x \\ y \in \Omega}} D^{\beta} \Phi(y) = 0 = D^{\beta} \Phi(x) = \lim_{\substack{y \rightarrow x \\ y \in \Omega}} D^{\beta} \Phi(y).$$

Последнее равенство завершает доказательство леммы.

Следствие. Пусть $f \in \tilde{C}^N(\Omega)$, где Ω — произвольное открытое множество

$$\Phi(x) = \begin{cases} f(x), & x \in \Omega \\ 0, & x \notin \Omega. \end{cases}$$

Тогда

$$\Phi \in C^N(E_n). \quad (9)$$

Будем говорить, что множество Ω удовлетворяет условию (*), если существует число $a > 0$, такое, что для любой точки $x \in \Omega$ существует индекс $i_0: 1 \leq i_0 \leq n$, так что

$$\rho_{\mu}(x, \Gamma) \geq a \rho_{k, \mu}(x, \Gamma). \quad (*)$$

Теорема 2. Пусть $\bar{l} \in N_+^n$, $f \in \bar{C}^{\bar{l}}(\Omega)$, где Ω — открытое множество, удовлетворяющее условию (*) при $\mu = \frac{1}{\bar{l}} \left(\mu_i = \frac{1}{l_i}, i=1, \dots, n \right)$.

Тогда для любого числа $\delta > 0$ существует число $c > 0$ такое, что

$$\|f\|_{C(\Omega - \Omega_\delta^\mu)} \leq c \delta \max_{|\alpha, \mu|=1} \|D^\alpha f\|_{C(\Omega - \Omega_\delta^\mu)}. \quad (10)$$

Доказательство. Обозначим

$$A_i = \{x \in \Omega - \Omega_\delta^\mu, \rho_\mu(x, \Gamma) > a \rho_{l_i, \mu}(x, \Gamma)\}.$$

Из условия (*) следует, что

$$\Omega - \Omega_\delta^\mu = \bigcup_{i=1}^n A_i.$$

Пусть $y \in A_i$, тогда из условия (*) следует существование точки $x \in \Gamma(\Omega)$, для которой $x_j = y_j$, $j \neq i$, $j = 1, \dots, n$. Возьмем произвольную точку x' такую, что $x'_j = x_j$, $j \neq i$ и $\min(x_i, y_i) < x'_i < \max(x_i, y_i)$. Так как функция f на Ω имеет по i -ой переменной непрерывные производные до порядка l_i включительно, то рассматривая ее как функцию одной переменной x_i , можно функцию $f(x)$ разложить по формуле Тейлора в окрестности точки x'

$$\begin{aligned} f(y) = f(x') + f'_{x_i}(x') (y_i - x'_i) + \dots + \frac{1}{(l_i-1)!} f^{(l_i-1)}_{x_i}(x') (y_i - x'_i)^{l_i-1} + \\ + \frac{1}{l_i!} f^{(l_i)}_{x_i}(\xi) (x'_i - y_i)^{l_i}, \quad \xi_j = x'_j, \quad j \neq i. \end{aligned} \quad (11)$$

Перейдем в равенстве (11) к пределу при $x' \rightarrow x$ с учетом того, что $f \in \bar{C}^{\bar{l}}(\Omega)$, получим

$$f(y) = \frac{1}{l_i!} f^{(l_i)}_{x_i}(\xi) (x_i - y_i)^{l_i}.$$

Следовательно, имея в виду еще условие (*) на Ω , получим

$$\begin{aligned} |f(y)| &\leq \frac{1}{l_i!} \max_{\substack{|\alpha, \mu|=1 \\ x \in \Omega - \Omega_\delta^\mu}} |D^\alpha f(z)| \cdot |x_i - y_i|^{l_i} = \max_{|\alpha, \mu|=1} \|D^\alpha f\|_{C(\Omega - \Omega_\delta^\mu)} \times \\ &\times \frac{\rho_{l_i, \mu}(x, y)}{l_i!} \leq \frac{1}{a l_i!} \max_{|\alpha, \mu|=1} \|D^\alpha f\|_{C(\Omega - \Omega_\delta^\mu)} \cdot \rho_\mu(y, \Gamma) \leq \\ &\leq c \delta \max_{|\alpha, \mu|=1} \|D^\alpha f\|_{C(\Omega - \Omega_\delta^\mu)}. \end{aligned}$$

Таким образом, получаем неравенство

$$\|f\|_{C(\Omega - \Omega_\delta^\mu)} \leq c \delta \max_{|\alpha, \mu|=1} \|D^\alpha f\|_{C(\Omega - \Omega_\delta^\mu)},$$

что и требовалось доказать.

Следствие. Пусть выполняются условия теоремы 2, тогда при $\delta \rightarrow 0$

$$\|f\|_{C(\Omega - \Omega_\delta^k)} = o(\delta). \quad (12)$$

Теорема 3. Пусть Ω — открытое множество, удовлетворяющее условию (*), $\bar{l} \in N_+^n$, $f \in C^{\bar{l}}(\Omega)$. Тогда для того, чтобы существовала последовательность $\varphi_s \in G_0^{\bar{l}}(\Omega)$ такая, что

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \|f - \varphi_s\|_{C^{\bar{l}}(\Omega)} = 0, \quad (13)$$

необходимо и достаточно, чтобы $f \in \tilde{C}^{\bar{l}}(\Omega)$ и в случае неограниченного открытого множества Ω

$$\lim_{\substack{y \rightarrow \infty \\ y \in \Omega}} D^\alpha f(y) = 0, \quad |\alpha : \bar{l}| \leq 1. \quad (14)$$

Доказательство. Необходимость. Пусть для функции $f \in C^{\bar{l}}(\Omega)$ существует последовательность $\{\varphi_s\}$ из $C_0^{\bar{l}}(\Omega)$, удовлетворяющая соотношению (13). Для заданного $\varepsilon > 0$ выберем функцию φ_s так, чтобы $\|f - \varphi_s\|_{C^{\bar{l}}(\Omega)} < \varepsilon$, тогда для $y \in \Omega$, $|\alpha : \bar{l}| \leq 1$

$$|D^\alpha f(y)| \leq |D^\alpha f(y) - D^\alpha \varphi_s(y)| + |D^\alpha \varphi_s(y)| < \varepsilon + |D^\alpha \varphi_s(y)|.$$

Пусть $x \in \Gamma$ и $|y - x| < \rho$, где ρ — расстояние от x до носителя функции $\varphi_s(x)$. Тогда $D^\alpha \varphi_s(y) = 0$. Следовательно $|D^\alpha f(y)| < \varepsilon$, т. е. при $|\alpha : \bar{l}| \leq 1 \lim_{\substack{y \rightarrow x \\ y \in \Omega}} D^\alpha f(y) = 0$. Это значит, что $f \in \tilde{C}^{\bar{l}}(\Omega)$.

Если Ω — неограниченное открытое множество, то выберем число $R > 0$ так, чтобы шар K_R радиуса R с центром в начале координат содержал носитель функции φ_s : $K_R \supset \text{supp } \varphi_s$. Тогда

$$\|f\|_{C^{\bar{l}}(\Omega - K_R)} \leq \|f - \varphi_s\|_{C^{\bar{l}}(\Omega - K_R)} \leq \|\varphi_s - f\|_{C^{\bar{l}}(\Omega)} < \varepsilon,$$

откуда следует (14).

Достаточность. Пусть сначала Ω ограничена. Положим

$$f_b^k(x) = \frac{1}{\delta^{|\mu|}} \int_{\substack{x-\delta\delta \\ -2\delta\delta}}^{\substack{x-\delta\delta \\ \delta\delta}} \omega\left(\frac{x-y}{\delta^k}\right) f(y) dy,$$

где $\omega(z) \in C^\infty(E_n)$, $\omega(z) = 0$, если $|z_\mu| \geq 1$, $\int \omega(z) dz = 1$, $b = 2^{\frac{2}{\min \mu_i} - 1}$.

Функции $f_b^k(x) \in C_0^{\bar{l}}(\Omega)$. Докажем, что

$$\lim_{b \rightarrow 0} \|f - f_b^k\|_{C^{\bar{l}}(\Omega)} = 0.$$

Прежде всего

$$\|f - f_{\delta}^{\mu}\|_{C^{\bar{t}}(\Omega)} \leq \|f - f_{\delta}^{\mu}\|_{C^{\bar{t}}(\Omega_{d\delta}^{\mu})} + \|f\|_{C^{\bar{t}}(\Omega - \Omega_{d\delta}^{\mu})} + \|f_{\delta}^{\mu}\|_{C^{\bar{t}}(\Omega - \Omega_{d\delta}^{\mu})},$$

где $d = (2b+1)b$. Так как для $x \in \Omega_{d\delta}^{\mu}$ справедливо равенство $f_{\delta}^{\mu}(x) = [\Phi(x)]_{\delta}^{\mu}$ и в силу следствия леммы 1 $\Phi \in C^{\bar{t}}(E_n)$, то при $\delta \rightarrow 0$ в силу свойств усреднений функции

$$\|f - f_{\delta}^{\mu}\|_{C^{\bar{t}}(\Omega_{d\delta}^{\mu})} = \|\Phi - [\Phi]_{\delta}^{\mu}\|_{C^{\bar{t}}(\Omega_{d\delta}^{\mu})} \leq \|\Phi - [\Phi]_{\delta}^{\mu}\|_{C^{\bar{t}}(E_n)} \rightarrow 0.$$

Очевидно, что при $\delta \rightarrow 0$

$$\|f\|_{C^{\bar{t}}(\Omega - \Omega_{d\delta}^{\mu})} \rightarrow 0.$$

Так как

$$D^{\alpha} f_{\delta}^{\mu}(x) = \frac{1}{\delta^{|\mu| + |\alpha|}} \int_{\Omega_{2b\delta}^{\mu}} D^{\alpha} \omega\left(\frac{x-y}{\delta^{\mu}}\right) f(y) dy,$$

то, учитывая, что $\omega\left(\frac{x-y}{\delta^{\mu}}\right) = 0$ при $\left|\frac{x-y}{\delta^{\mu}}\right|_{\mu} = \frac{|x-y|_{\mu}}{\delta} > 1$, получим для $x \in \Omega - \Omega_{d\delta}^{\mu}$

$$\begin{aligned} |D^{\alpha} f_{\delta}^{\mu}(x)| &\leq \sup_{\substack{y \in \Omega_{2b\delta}^{\mu} \\ |x-y|_{\mu} \leq \delta}} f(y) \frac{1}{\delta^{|\mu| + |\alpha|}} \int_{\substack{|x-y|_{\mu} \leq \delta \\ |x-y|_{\mu} \leq \delta}} |D^{\alpha} \omega\left(\frac{x-y}{\delta^{\mu}}\right)| dy = \\ &= \frac{1}{\delta^{|\alpha| + |\mu|}} \|f\|_{C(\Omega_{2b\delta}^{\mu} K_{\mu}(x, \delta))} \int_{|z|_{\mu} \leq 1} |D^{\alpha} \omega(z)| dz \leq \frac{C_{\alpha}}{\delta^{|\alpha| + |\mu|}} \|f\|_{C(\Omega K_{\mu}(x, \delta))}. \end{aligned}$$

Таким образом

$$\|D^{\alpha} f_{\delta}^{\mu}\|_{C(\Omega - \Omega_{d\delta}^{\mu})} \leq \frac{C_{\alpha}}{\delta^{|\alpha| + |\mu|}} \|f\|_{C(\Omega - \Omega_{m\delta}^{\mu})}, \quad (15)$$

где $m = b + d$.

Из (15) и следствия теоремы 2 вытекает, что при $\delta \rightarrow 0$

$$\|f_{\delta}^{\mu}\|_{C^{\bar{t}}(\Omega - \Omega_{d\delta}^{\mu})} \leq \frac{C'}{\delta^{m|\alpha| + |\mu|}} \|f\|_{C(\Omega - \Omega_{m\delta}^{\mu})} \leq \frac{o(\delta)}{\delta} \rightarrow 0.$$

Тем самым соотношение (13) для ограниченных Ω доказано.

Если Ω неограничена, то рассмотрим сначала последовательность функций $f_s(x) = f(x) \psi\left(\frac{|x|}{s}\right)$, где $\psi \in C^{\infty}(E_1)$, $\psi(y) = 1$ для $|y| \leq 1$, $\psi(y) = 0$ для $|y| \geq 2$.

Нетрудно убедиться в том, что $f_s(x) \in C^{\bar{t}}(\Omega K_{2s})$ и что из (14) следует равенство

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \|f - f_s\|_{C^{\bar{t}}(\Omega)} = 0.$$

Отсюда и из доказанной выше части теоремы для ограниченных множеств следует справедливость теоремы и в общем случае. Теорема 3 доказана.

Замечание. Необходимость условий теоремы можно доказать для произвольного открытого множества Ω .

Теорема 4. Пусть Ω — произвольное ограниченное открытое множество, удовлетворяющее условиям (*) и условию

$$\Gamma(\Omega) = \Gamma(\bar{\Omega}), \quad (16)$$

$f \in \bar{C}^1(\Omega)$. Тогда для того, чтобы существовала последовательность $\{\varphi_s\}$ из $C_0^\infty(\Omega)$ такая, что

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \|f - \varphi_s\|_{\bar{C}^1(\Omega)} = 0$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\Phi \in \bar{C}^1(E_n),$$

где

$$\Phi(x) = \begin{cases} f(x), & x \in \Omega \\ 0, & x \in \bar{\Omega}. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть соотношение (13) выполняется, тогда при $s, t \rightarrow \infty$

$$\|\varphi_s - \varphi_t\|_{\bar{C}^1(E_n)} = \|\varphi_s - \varphi_t\|_{\bar{C}^1(\Omega)} \rightarrow 0.$$

Из полноты пространства $\bar{C}^1(E_n)$ следует существование функции $F \in \bar{C}^1(E_n)$ такой, что $\|F - \varphi_s\|_{\bar{C}^1(E_n)} \rightarrow 0$ при $s \rightarrow \infty$. Если $x \in \Omega$, то из

(13) вытекает, что $F(x) = f(x)$. Если $x \in \bar{\Omega}$, то $F(x) = 0$, так как для любого s $\varphi_s(x) = 0$ и при $s \rightarrow \infty$

$$|F(x)| = |F(x) - \varphi_s(x)| \leq \|F - \varphi_s\|_{\bar{C}^1(E_n)} \rightarrow 0.$$

Таким образом, $F(x) = \Phi(x)$.

Достаточность. Известно (см. [6]), что условие (16) эквивалентно следующему условию: для любой точки $x \in \Gamma(\Omega)$ и любой окрестности U_x точки x существует шар K такой, что $K \subset U_x$ и $K \cap \Omega = \emptyset$.

Пусть выполнено (9) и $x \in \Gamma(\Omega) = \Gamma(\bar{\Omega})$. Тогда существует последовательность $y_n \rightarrow x$ такая, что $D^a \Phi(y_n) = 0$. Следовательно, при

$$|\alpha : \bar{l}| \leq 1$$

$$\lim_{\substack{y \rightarrow x \\ y \in \Omega}} D^a f(y) = \lim_{y \rightarrow x} D^a \Phi(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} D^a \Phi(y_n) = 0,$$

т. е. $f \in \bar{C}^1(\Omega)$. Теперь достаточно воспользоваться теоремой 3.

Теорема 5. Пусть Ω — произвольное ограниченное открытое множество, удовлетворяющее условию (*) и $f \in C^{\vec{l}}(\Omega)$. Для того, чтобы выполнялось условие (13), необходимо и достаточно, чтобы для любого $|\alpha: \vec{l}| \leq 1$

$$\Phi_{\alpha}(x) \in C(E_n), \quad (17)$$

где

$$\Phi_{\alpha}(x) = \begin{cases} D^{\alpha} f(x), & x \in \Omega \\ 0, & x \in \bar{\Omega}. \end{cases}$$

Доказательство. Необходимость была доказана в предыдущей теореме. Из (17) следует, что для $x \in \Gamma$

$$\lim_{\substack{y \rightarrow x \\ y \in \Omega}} D^{\alpha} f(y) = 0, \quad |\alpha: \vec{l}| \leq 1.$$

Таким образом из теоремы 3 следует, что условие (17) достаточно для выполнения условия (13). Теорема 5 доказана.

Теорема 6. Пусть $f \in W_p^{\vec{l}}(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$. Если для любого компакта S при $\delta \rightarrow 0$

$$\|f\|_{L_1(S; \Omega - \Omega_{\delta}^{\vec{l}})} = o(\delta), \quad (18)$$

то

$$\Phi \in W_p^{\vec{l}}(E_n), \quad (19)$$

где как обычно Φ — продолжение нулем вне Ω функции f .

Доказательство. Достаточно показать существование обобщенных производных $D^{\alpha} \Phi$ при $|\alpha: \vec{l}| \leq 1$, где

$$D^{\alpha} \Phi(x) = \begin{cases} D^{\alpha} f(x), & x \in \Omega \\ 0, & x \in \bar{\Omega}. \end{cases}$$

Пусть $\varphi \in C_0^{\infty}(E_n)$, причем $\varphi(x) = 0$ вне компакта S .

Нужно доказать, что

$$\int_{E_n} \Phi D^{\alpha} \varphi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{E_n} D^{\alpha} \Phi \varphi \, dx,$$

т. е. что

$$\int_{\Omega \cap S} f D^{\alpha} \varphi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega \cap S} D^{\alpha} f \varphi \, dx. \quad (20)$$

Пусть S — произвольный компакт из E_n . Если $\Omega \cap S = \emptyset$ или $\Omega \cap S = S$, то равенство (20) очевидно.

Пусть $\Omega \cap S \neq \emptyset$ и $\Omega \cap S \neq S$. Через $\chi_{\Omega \cap S}^{\mu}$ обозначим μ -усреднение характеристической функции множества $\Omega \cap S$ с радиусом усредне-

ния δ , где $b = 2^{\frac{2}{\min_{1 \leq l \leq n} l_i}}$ ($\mu_l = \frac{1}{l_i}$, $i=1, \dots, n$). Имеем $\chi_\delta^\mu \in C_0^\infty(\Omega)$, причем $\chi_\delta^\mu(x) = 0$ вне Ω_δ^μ и $\chi_\delta^\mu(x) = 1$ в $\Omega_{d\delta}^\mu$, где $d = (2b+1)b$. Ясно, что

$$\int_{\Omega} f D^\alpha \varphi \, dx = \int_{\Omega} f D^\alpha (\varphi \chi_\delta^\mu) \, dx + \int_{\Omega} f D^\alpha [\varphi (1 - \chi_\delta^\mu)] \, dx.$$

Так как $\varphi \chi_\delta^\mu \in C_0^\infty(\Omega)$, то

$$\int_{\Omega} f D^\alpha (\varphi \chi_\delta^\mu) \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} D^\alpha f \varphi \chi_\delta^\mu \, dx.$$

Учитывая, что

$$D^\alpha [\varphi (1 - \chi_\delta^\mu)] = (1 - \chi_\delta^\mu) D^\alpha \varphi - \sum_{\substack{k \leq \alpha \\ |k| > 0}} c_\alpha^k D^{\alpha-k} \varphi D^k \chi_\delta^\mu,$$

имеем

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f D^\alpha \varphi \, dx &= (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} D^\alpha f \varphi \chi_\delta^\mu \, dx + \int_{(\Omega - \Omega_{d\delta}^\mu) \cap S} f D^\alpha \varphi (1 - \chi_\delta^\mu) \, dx - \\ &- \sum_{\substack{k \leq \alpha \\ |k| > 0}} c_\alpha^k \int_{(\Omega - \Omega_{d\delta}^\mu) \cap S} f D^{\alpha-k} \varphi D^k \chi_\delta^\mu \, dx. \end{aligned} \quad (21)$$

Перейдем в равенстве (21) к пределу при $\delta \rightarrow 0$. Так как

$$\left| \int_{\Omega} D^\alpha f \varphi (1 - \chi_\delta^\mu) \, dx \right| \leq \int_{(\Omega - \Omega_{d\delta}^\mu) \cap S} |D^\alpha f| \cdot |\varphi| \, dx \leq c \int_{(\Omega - \Omega_{d\delta}^\mu) \cap S} |D^\alpha f| \, dx \rightarrow 0,$$

то при $\delta \rightarrow 0$

$$\int_{\Omega} D^\alpha f \varphi \chi_\delta^\mu \, dx \rightarrow \int_{\Omega} D^\alpha f \varphi \, dx.$$

Так же доказывается, что при $\delta \rightarrow 0$

$$\int_{(\Omega - \Omega_{d\delta}^\mu) \cap S} f D^\alpha \varphi (1 - \chi_\delta^\mu) \, dx \rightarrow 0,$$

при этом с некоторой постоянной $c_1 > 0$

$$\left| \int_{(\Omega_{m\delta}^\mu - \Omega_{d\delta}^\mu) \cap S} f D^{\alpha-k} \varphi D^k \chi_\delta^\mu \, dx \right| \leq c_1 \int_{(\Omega_{m\delta}^\mu - \Omega_{d\delta}^\mu) \cap S} |f D^k \chi_\delta^\mu| \, dx.$$

Из $k \leq \alpha$ следует, что $|k: \bar{l}| \leq 1$. Следовательно в силу условия (18), при $\delta \rightarrow 0$ имеем

$$\left| \int_{(\Omega_{m\delta}^k - \Omega_{d\delta}^k) \cap S} f D^{s-k} \varphi D^k \gamma_{\delta}^k dx \right| \leq \frac{C_2}{\delta^{k, \nu}} \int_{(\Omega_{m\delta}^k - \Omega_{d\delta}^k) \cap S} |f| dx \rightarrow 0.$$

Таким образом, из (21) при $\delta \rightarrow 0$ следует (20), что и требовалось доказать. Теорема 6 доказана.

Лемма 2. Пусть Ω — любое открытое множество в E_n , $1 \leq p < \infty$, $f \in W_p^N(\Omega)$, где N — произвольный полный многогранник. Если существует последовательность φ_s такая, что

$$\varphi_s \in C_0^\infty(\Omega), \lim_{s \rightarrow \infty} \|\varphi_s - f\|_{W_p^N(\Omega)} = 0, \quad (22)$$

то $\Phi \in W_p^N(E_n)$, где Φ — продолжение нулем вне Ω функции f .

Доказательство. Прежде всего имеем при $s, t \rightarrow \infty$

$$\|\varphi_s - \varphi_t\|_{W_p^N(E_n)} = \|\varphi_s - \varphi_t\|_{W_p^N(\Omega)} \leq \|\varphi_s - f\|_{W_p^N(\Omega)} + \|f - \varphi_t\|_{W_p^N(\Omega)} \rightarrow 0.$$

Из полноты пространства $W_p^N(E_n)$ следует существование функции $F \in W_p^N(E_n)$ такой, что

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \|\varphi_s - F\|_{W_p^N(E_n)} = 0.$$

В частности

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \|\varphi_s - F\|_{L_p(E_n)} = 0,$$

откуда следует, что

$$\|F\|_{L_p(E_n - \Omega)} = 0, \|F - f\|_{L_p(\Omega)} = 0,$$

т. е. $F(x) = \Phi(x)$ почти всюду. Лемма доказана.

Лемма 3. Пусть Ω — открытое множество, удовлетворяющее условию (*). Для любой функции $f \in C_0^\infty(\Omega)$ справедливо неравенство

$$\|f\|_{L_p(\Omega - \Omega_\delta^k)} \leq c \delta \sum_{|a|, |b|=1} |D^a f|_{L_p(\Omega - \Omega_\delta^k)}.$$

Доказательство проводится аналогично теореме 2.

Теорема 7. Пусть Ω — открытое множество, удовлетворяющее условию (*), $f \in W_p^1(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$. Для того, чтобы существовала последовательность φ_s , удовлетворяющая соотношению (22), необходимо и достаточно, чтобы при $\delta \rightarrow 0$

$$\|f\|_{L_p(\Omega - \Omega_\delta^k)} = o(\delta). \quad (23)$$

Доказательство. Необходимость следует из леммы 3.

Достаточность. Пусть сначала Ω — ограниченное открытое множество. Положим

$$f_\delta^\mu(x) = \frac{1}{\delta^{|\mu|}} \int_{\Omega_{2\delta}^\mu} \omega\left(\frac{x-y}{\delta^\mu}\right) f(y) dy,$$

где функция ψ выбрана как при доказательстве теоремы 3 и $b=2$.
 Ясно, что $f_\delta^\mu \in C_0^\infty(\Omega)$. Докажем, что при выполнении условия (23)

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \|f - f_\delta^\mu\|_{W_p^l(\Omega)} = 0.$$

Прежде всего имеем

$$\|f - f_\delta^\mu\|_{W_p^l(\Omega)} \leq \|f - f_\delta^\mu\|_{W_p^l(\Omega - \Omega_{d\delta}^\mu)} + \|f\|_{W_p^l(\Omega - \Omega_{d\delta}^\mu)} + \|f_\delta^\mu\|_{W_p^l(\Omega - \Omega_{d\delta}^\mu)},$$

где $d = (2b + 1)b$.

Так как $f_\delta^\mu(x) = [f(x)]_\delta^\mu = [\Phi(x)]_\delta^\mu$ при $x \in \Omega_{d\delta}^\mu$ и в силу теоремы 6 $\Phi \in W_p^l(E_n)$, то при $\delta \rightarrow 0$

$$\|f - f_\delta^\mu\|_{W_p^l(\Omega_{d\delta}^\mu)} = \|\Phi - [\Phi]_\delta^\mu\|_{W_p^l(\Omega_{d\delta}^\mu)} \leq \|\Phi - [\Phi]_\delta^\mu\|_{W_p^l(E_n)} \rightarrow 0.$$

Очевидно, что при $\delta \rightarrow 0$

$$\|f\|_{W_p^l(\Omega - \Omega_{d\delta}^\mu)} \rightarrow 0.$$

Применяя рассуждения, проведенные при доказательстве теоремы 3, получим для всех α , $|\alpha| \leq l$

$$\|D^\alpha f_\delta^\mu\|_{L_p(\Omega - \Omega_{d\delta}^\mu)} \leq \frac{C_\alpha}{\delta^{|\alpha|, \mu}} \|f\|_{L_p(\Omega - \Omega_{m, \delta}^\mu)},$$

где $m = b + d$.

Отсюда в силу (23) имеем при $\delta \rightarrow 0$

$$\|f_\delta^\mu\|_{W_p^l(\Omega - \Omega_{d\delta}^\mu)} \leq \frac{C'}{\delta^{\max|\alpha|, \mu}} \|f\|_{L_p(\Omega - \Omega_{m, \delta}^\mu)} \leq C \frac{o(\delta)}{\delta} \rightarrow 0.$$

Это доказывает теорему для ограниченных Ω . Если область Ω неограничена, то вместо функции $f_\delta^\mu(x)$ рассмотрим функцию $f_\delta^\mu(x) \psi_\delta(x)$, где $\psi_\delta(x) = \psi(\delta x)$, $\psi \in C^\infty(E_n)$, $\psi(u) = 1$ при $|u| \leq 1$, $\psi(u) = 0$ при $|u| \geq 2$.

Замечание. Часть теоремы, относящейся к достаточности можно доказать для произвольного открытого множества Ω .

Ереванский государственный
университет

Поступила 16. XII. 1985 и 14. XI. 1986

Ա. Մ. ԱՐԱՄՅԱՆ. $C^l(\Omega)$ և $W_p^l(\Omega)$ տարածությունների ֆունկցիաների զրոյով շարժման-
ըլիս մասին (ամփոփում)

[1]—[7] և շատ ուրիշ հեղինակների աշխատանքներում ուսումնասիրված է Սերգևի տա-
րածություններում ֆունկցիաների շարժմանության և այդպիսի ֆունկցիաների ռդրկ ֆինկտ
ֆունկցիաներով մոտարկման հարցերը: Այս աշխատանքում բնութագրվում է նույնատիպ:

խնդիրը ավելի ընդհանուր անիզոտրոպ ֆունկցիոնալ տարածությունների համար. տվյալ ֆունկցիայի համար գտնվում են անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ այն բանի համար, որպեսզի նրան հնարավոր լինի զրոյով շարունակել ամբողջ տարածության վրա և մոտարկել հարթ ֆինիտ ֆունկցիաներով:

A. M. ARAMIAN. On zero continuation of functions from the spaces $C^1(\Omega)$ and $\dot{W}_p^1(\Omega)$ (summary)

The problem of continuation of functions in Sobolev spaces and of approximation of such functions by smooth finite functions have been considered by many authors. In the presents paper a similar problem is investigated for more general anisotropic functional spaces. Necessary and sufficient conditions are found enabling a function to have a zero continuation in the whole space and for the possibility of approximation by finite smooth functions.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. А. Соболев. Некоторые замечания функционального анализа в математической физике, Новосибирск, 1962, 255 с.
2. E. Gagliardo. Proprietà di alcune classi di funzioni in più variabili, *Ricerche di mat.*, 1958, 7, № 1, 102—137.
3. В. П. Ильин. Свойства дифференцируемых функций многих переменных, заданных в n -мерной области, *Труды МИ АН СССР*, 1962, 66, 227—363.
4. С. М. Никольский. Доказательство единственности классического решения первой краевой задачи, *Изв. АН СССР, сер. матем.*, 1963, 27, № 5, 1113—1134.
5. Г. Г. Казарян. О плотности гладких финитных функций в $\dot{W}_p^1(\Omega)$, *Матем. заметки*, 1967, 2, № 1, 45—52.
6. В. И. Буренков. О приближении функций из пространства $C^r(\Omega)$ финитными функциями для произвольного открытого множества Ω , *Труды МИ АН СССР*, 1972, 117, 62—74.
7. В. И. Буренков. О приближении функций из пространства Соболева финитными функциями в случае произвольного открытого множества, *ДАН СССР*, 1972, 202, № 2, 259—262.
8. Г. Г. Казарян. Вариационная задача для нерегулярного уравнения и единственность классического решения, *Диф. уравн.* XVIII, 1982, 1907—1917.
9. В. И. Буренков. Об одном способе продолжения дифференцируемых функций, *Труды МИ АН СССР*, 1976, 140, 27—67.
10. В. И. Буренков, Б. А. Файн. О продолжении функций из анизотропных пространств с сохранением класса, *ДАН СССР*, 1976, 228, № 3, 525—528.
11. В. И. Буренков. О продолжении функций с сохранением полунормы, *ДАН СССР*, 1976, 228, № 4, 779—782.
12. Б. А. Файн. Об одном способе продолжения дифференцируемых функций. *Деп. № 3352-83-РЖ Мат.*, 1983, реф. 12 Б 64.
13. Б. А. Файн. О продолжении функций из анизотропных пространств Соболева, *Труды МИ АН СССР*, 1984, 170, 248—272.
14. С. М. Никольский. Об устойчивых граничных значениях дифференцируемых функций многих переменных, *Мат. сб.*, 1963, 61 (103), № 2, 224—252.
15. О. В. Бесов, В. П. Ильин и С. М. Никольский. Интегральные представления функций и теоремы вложения, М., «Наука», 1975.
16. С. М. Никольский. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, М., «Наука», 1977.
17. С. В. Успенский, Г. В. Демиденко и В. Г. Перепелкин. Теоремы вложения и приложения к дифференциальным уравнениям, Новосибирск, «Наука», 1984, 223 с.