

УДК 519.6

Р. А. ХАЧАТРЯН

О ПЕРЕСЕЧЕНИИ ШАТРОВ В ГИЛЬБЕРТОВОМ
ПРОСТРАНСТВЕ И НЕОБХОДИМЫХ УСЛОВИЯХ
ЭКСТРЕМУМА ДЛЯ НЕГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ

Наиболее распространенным в литературе методом получения необходимых условий экстремума является метод шатров, основные положения которого сформулированы в работе [5]. В работах [3, 4] показано, что метод шатров является удобным аппаратом исследования не только гладких экстремальных задач, но и негладких конечномерных задач оптимизации с ограничениями типа равенств.

В настоящей работе теория шатров распространяется на бесконечномерные гильбертовы пространства, получены необходимые условия экстремума в бесконечномерных задачах оптимизации с ограничениями типа равенств.

§ 1. Определения и обозначения

Пусть X — гильбертово пространство, $\langle x, y \rangle$ — скалярное произведение элементов $x, y \in X$. $\text{con } M$ — коническая оболочка множества M .

Определение 1. Пересечение всех замкнутых подпространств, содержащих M — x_0 , где x_0 любая точка выпуклого множества M , называется несущим подпространством множества M и обозначается $\text{Lin } M$.

Определение 2. Точка x называется относительно внутренней точкой выпуклого множества M , если

$$x + \text{Lin } M \cap B(0, \varepsilon) \subseteq M,$$

т. е. x содержится в M вместе с шаром радиуса $\varepsilon > 0$, лежащим в $\text{Lin } M$. Множество точек выпуклого множества, внутренних относительно его несущего подпространства, называется относительной внутренностью и обозначается $\text{ri } M$.

Лемма 1. Пусть M — выпуклое множество X , $x \in \text{ri } M$ и $y \in M$. Тогда $(1 - \lambda)x + \lambda y$ принадлежит $\text{ri } M$ при $0 \leq \lambda < 1$.

Доказательство. Мы должны доказать, что

$$(1 - \lambda)x + \lambda y + \text{Lin } M \cap B(0, \varepsilon) \subseteq M$$

при некотором $\varepsilon > 0$. Поскольку $y \in M$, то мы имеем $y \in M + \text{Lin } M \cap B(0, \varepsilon)$ для любого $\varepsilon > 0$. Значит, для любого $\varepsilon > 0$

$$(1 - \lambda)x + \lambda y + \text{Lin } M \cap B(0, \varepsilon) \subseteq (1 - \lambda)x + \lambda(M + \text{Lin } M \cap B(0, \varepsilon)) + \text{Lin } M \cap B(0, \varepsilon) = (1 - \lambda)[x + (1 + \lambda)(1 - \lambda)^{-1} B(0, \varepsilon) \cap \text{Lin } M] + \lambda M.$$

Но последнее множество содержится в $(1 - \epsilon)M + \epsilon M = M$, если ϵ достаточно мало, ибо $x \in \text{ri}M$ согласно предположению. Лемма доказана.

Лемма 2. Если выпуклые множества $M_1, M_2 \subseteq X$ обладают тем свойством, что

$$\text{ri}M_1 \cap \text{ri}M_2 \neq \emptyset,$$

то несущее подпространство множества $M_1 \cap M_2$ совпадает с пересечением несущих подпространств множеств M_1, M_2 и справедливо соотношение

$$\text{ri}(M_1 \cap M_2) = \text{ri}M_1 \cap \text{ri}M_2.$$

Доказательство. Без ограничения общности предположим, что $0 \in \text{ri}M_1 \cap \text{ri}M_2$. Так как $M_1 \subseteq \text{Lin}M_1$, $M_2 \subseteq \text{Lin}M_2$, то $M_1 \cap M_2 \subseteq \text{Lin}M_1 \cap \text{Lin}M_2$ и поэтому $\text{Lin}(M_1 \cap M_2) \subseteq \text{Lin}M_1 \cap \text{Lin}M_2$.

Далее, если $x \in \text{ri}M_1 \cap \text{ri}M_2$, то все достаточно близкие к x точки подпространства $\text{Lin}M_1$ принадлежат множеству M_1 , а все достаточно близкие к x точки подпространства $\text{Lin}M_2$ принадлежат M_2 . Следовательно, все достаточно близкие к x точки подпространства $\text{Lin}M_1 \cap \text{Lin}M_2$ принадлежат множеству $M_1 \cap M_2$. Отсюда следует, что

$$\text{Lin}M_1 \cap \text{Lin}M_2 \subseteq \text{Lin}(M_1 \cap M_2)$$

и, следовательно

$$\text{Lin}M_1 \cap \text{Lin}M_2 = \text{Lin}(M_1 \cap M_2).$$

Из сказанного выше вытекает, что $x \in \text{ri}(M_1 \cap M_2)$, т. е.

$$\text{ri}M_1 \cap \text{ri}M_2 \subseteq \text{ri}(M_1 \cap M_2).$$

Остается доказать обратное включение. Пусть произвольная точка $y \in \text{ri}(M_1 \cap M_2)$ и по-прежнему $x \in \text{ri}M_1 \cap \text{ri}M_2$. Тогда $x \in M_1 \cap M_2$ и поэтому существует такая точка $z \in M_1 \cap M_2$, что y будет внутренней точкой отрезка $[x, z]$. Так как $[x, z] \subseteq M_1$ и $x \in \text{ri}M_1$, то согласно лемме 1 $y \in \text{ri}M_1$. Точно так же $y \in \text{ri}M_2$. Таким образом

$$\text{ri}(M_1 \cap M_2) \subseteq \text{ri}M_1 \cap \text{ri}M_2.$$

Определение 3. [5]. Выпуклый конус K называется шатром множества M в точке x , если существуют отображение $r(\bar{x}): X \rightarrow X$, определенное в окрестности нуля и $\epsilon > 0$ такие, что

$$1. \quad r(\bar{x})\|\bar{x}\| \rightarrow 0, \quad \text{при } \bar{x} \rightarrow 0,$$

$$2. \quad x + \bar{x} + r(\bar{x}) \in M \text{ для } \bar{x} \in K \cap B(0, \epsilon).$$

Шатер K называется компактным, если $r(x)$ есть непрерывное отображение, которое переводит каждое ограниченное множество в предкомпактное множество пространства X . Шатер K называется гладким, если $r(\cdot)$ есть непрерывно-дифференцируемое по Фреше отображение.

Определение 4. [5]. Выпуклый конус K называется локальным шатром множества M в точки $x \in M$, если для каждого направления $\bar{x}_0 \in \text{ri}K$ существует шатер Q такой, что

$$\bar{x}_0 \in \text{ri}Q, \quad \text{Lin}Q = \text{Lin}K, \quad Q \subseteq K.$$

Замечание. В отличие от определения В. Г. Болтянского отображение $r(\bar{x})$ может быть и не непрерывным.

Отметим, что если K является шатром множества M , то заведомо K есть локальный шатер.

В дальнейшем используются следующие обозначения:

K^* — конус, сопряженный к конусу K ;

$H^\perp$ — ортогональное дополнение к подпространству H .

Лемма 3. Пусть H_1, H_2 — замкнутые подпространства из X и выполнены следующие предположения:

$$1) H_1 + H_2 = X,$$

$$2) H_1^\perp \text{ — конечномерное подпространство.}$$

Тогда существуют линейные непрерывные операторы $P_1: X \rightarrow H_1, P_2: X \rightarrow H_2$ такие, что любой вектор $y \in X$ представляется в виде $y = P_1 y + P_2 y$.

Доказательство. Положим

$$H_3 = H_1 \cap H_2, H_4 = (H_1 \cap H_2)^\perp \cap H_2.$$

Покажем, что любой вектор $y \in X$ единственным образом представляется в виде

$$y = y_1 + y_2, \text{ где } y_1 \in H_1, y_2 \in H_4.$$

Действительно, так как $X = H_1 + H_2$, то для любого $y \in X$ существуют векторы $x_1 \in H_1, x_2 \in H_2$ такие, что $y = x_1 + x_2$. С другой стороны, поскольку $H_2 = H_3 + H_4$, то существуют векторы $x_3 \in H_3, x_4 \in H_4$ такие, что $x_2 = x_3 + x_4$.

Положим $y_1 = x_1 + x_3, y_2 = x_4$. Очевидно, что $y_1 \in H_1, y_2 \in H_4$. Существование доказано. Единственность же представления следует из того факта, что

$$H_1 \cap H_4 = \{0\}.$$

Теперь определим операторы P_1 и P_2 таким образом: для любого $y \in X$ положим

$$P_1 y = y_1, P_2 y = y_2.$$

Очевидно, что операторы P_1 и P_2 линейны. Покажем их непрерывность. Для этого сначала докажем, что подпространство H_4 конечномерно. Пусть это не так. Выберем $n+1$ линейно независимых элементов h_i из H_4 , где n — размерность пространства $H_1^\perp$. Тогда существуют векторы $h_i \in H_1^\perp, h_i \in H_1$ такие, что

$$h_i = h_i' + h_i'', i = 1, 2, \dots, n+1.$$

Так как размерность пространства $H_1^\perp$ равна n , то существуют числа $\alpha_i, i = 1, 2, \dots, n+1$, не все равные нулю одновременно, такие, что

$$\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i h_i' = 0.$$

Следовательно

$$\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i h_i = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i h_i''.$$

Так как векторы h_i линейно независимы, то

$$\sum_{i=1}^{n+1} a_i h_i \neq 0.$$

Значит $H_1 \cap H_2 \neq \{0\}$, а это противоречие. Следовательно, конечномерность доказана. Пусть теперь $y_i \rightarrow y_0$, при $i \rightarrow \infty$. Имеем $y_i = P_1 y_i + P_2 y_i$.

Предположим, что $\|P_2 y_i\| \rightarrow \infty$ и придем к противоречию. Из этого предположения следует, что $y_i / \|P_2 y_i\| \rightarrow 0$. И так как H_1 конечномерно, то, без ограничения общности, можно считать, что

$$\frac{P_2 y_i}{\|P_2 y_i\|} \rightarrow z_0, \text{ при } i \rightarrow \infty.$$

Очевидно, что $\|z_0\| = 1$ и $z_0 \in H_1$. Значит

$$\frac{P_1 y_i}{\|P_2 y_i\|} \rightarrow -z_0 \in H_1.$$

Тогда $z_0 \in H_1 \cap H_2$, а это противоречие.

Пусть теперь последовательность $F_2 y_i$ ограничена, и y_0^* — предельная точка последовательности $P_2 y_i$. Тогда существует подпоследовательность $\{y_{i_k}\}$ такая, что

$$F_2 y_{i_k} \rightarrow y_0^*, \quad P_1 y_{i_k} \rightarrow y_0^*.$$

Следовательно, $y_0 = y_0^* + y_0^*$. С другой стороны $y_0 = P_1 y_0 + P_2 y_0$, так как представление вектора единственно, то

$$P_1 y_0 = y_0^*, \quad P_2 y_0 = y_0^*.$$

Это означает, что операторы P_1 и P_2 непрерывны. Лемма доказана.

§ 2. Теоремы о пересечении шатров

В этом параграфе доказываются теоремы о пересечении шатров в бесконечномерном гильбертовом пространстве. Соответствующие результаты известны [5] лишь в конечномерных пространствах.

Теорема 1. Пусть выпуклые конусы K_1, K_2 являются компактными локальными шатрами для M_1 и M_2 в точке $x \in M_1 \cap M_2$.

Пусть, далее

$$1) \operatorname{ri} K_1 \cap \operatorname{ri} K_2 \neq \emptyset,$$

$$2) \operatorname{Lin} K_1 + \operatorname{Lin} K_2 = X,$$

$$3) (\operatorname{Lin} K_1)^\perp \text{ есть конечномерное подпространство в } X.$$

Тогда конус $K = K_1 \cap K_2$ является локальным шатром множества $M = M_1 \cap M_2$ в точке x .

Доказательство. Не ограничивая общности предположим, что $x = 0$. Пусть теперь $\bar{x}_0 \in \operatorname{ri} K$. Тогда согласно лемме 2 $\bar{x}_0 \in \operatorname{ri} K_i, i=1, 2$.

Так как $K_i, i=1, 2$ — компактные локальные шатры для $M_i, i=1, 2$, в точке нуль, то существуют конусы $Q_i, i=1, 2$ и компактные отображения $r_i(\bar{x})$ такие, что

$$а) \bar{x}_0 \in \text{ri} Q_i, \text{Lin} Q_i = \text{Lin} K_i, Q_i \subseteq K_i,$$

б) $\Psi_i(\bar{x}) = \bar{x} + r_i(\bar{x}) \in M_i$ для $\bar{x} \in Q_i \cap B(0, \varepsilon)$, где ε — достаточно малое положительное число.

Положим

$$H = (\text{Lin} K_1 \cap \text{Lin} K_2)^\perp \cap \text{Lin} K_2.$$

Рассмотрим уравнение

$$g(\bar{x}, y) = \Psi_1(\bar{x} + y_1) - \Psi_2(\bar{x} - y_2) = 0,$$

где

$$y = y_1 + y_2, y_1 \in \text{Lin} K_1, y_2 \in H.$$

Согласно лемме 3 $y_1 = P_1 y, y_2 = P_2 y$.

Положим

$$r(\bar{x}, y) = r_1(\bar{x} + P_1 y) - r_2(\bar{x} - P_2 y).$$

Очевидно, что при фиксированном $\bar{x}$ $r(\bar{x}, \cdot)$ является компактным отображением. Действительно, так как отображения $r_1(\cdot), r_2(\cdot), P_1$ и P_2 непрерывны, то $r(\bar{x}, \cdot)$ также является непрерывным отображением. Пусть теперь G — ограниченное множество из X . Так как операторы P_1 и P_2 линейны и непрерывны, то множества $P_1 G$ и $P_2 G$ ограничены. Поэтому множества $r_1(\bar{x} + P_1 G)$ и $r_2(\bar{x} - P_2 G)$ предкомпактны в X . Следовательно, $r(\bar{x}, G)$ также является предкомпактным множеством.

Рассмотрим отображение $f(\bar{x}, y) = y - g(\bar{x}, y)$. Имеем $f(\bar{x}, y) = r(\bar{x}, y)$.

Заметим, что

$$\frac{r_1(\bar{x} + y_1)}{\sqrt{\|\bar{x}\|^2 + \|y\|^2}} \rightarrow 0, \frac{r_2(\bar{x} - y_2)}{\sqrt{\|\bar{x}\|^2 + \|y\|^2}} \rightarrow 0, \text{ если } \bar{x} \rightarrow 0, y \rightarrow 0.$$

Поэтому

$$\|f(\bar{x}, y)\| = \|r(\bar{x}, y)\| \leq \bar{r}(\sqrt{\|\bar{x}\|^2 + \|y\|^2}),$$

где $\bar{r}(\lambda)/\lambda \rightarrow 0$, если $\lambda \rightarrow 0$.

Без ограничения общности можно считать, что $\bar{r}(\lambda)$ не убывает по λ . В самом деле, в случае, если это не так, заменим функцию $\bar{r}(\lambda)$ на функцию

$$\omega(\lambda) = \sup \{\bar{r}(t), 0 \leq t \leq \lambda\}.$$

Можно показать, что $\omega(\lambda)$ — неубывающая функция и $\omega(\lambda)/\lambda \rightarrow 0$.

Пусть теперь

$$\tau(\bar{x}) = \inf \{\tau : \bar{r}(\sqrt{\|\bar{x}\|^2 + \tau^2}) \leq \tau\}.$$

При достаточно малых $\bar{x}$ выполняется неравенство $\tau(\bar{x}) \leq \|\bar{x}\|$. Кроме того, по определению точной нижней грани для каждого $\bar{x}$ существует такое $\tau^*(\bar{x})$, что

$$\tau(\bar{x}) \leq \tau^*(\bar{x}) \leq \tau(\bar{x}) + \|\bar{x}\|^2,$$

$$\bar{r}(\sqrt{\|\bar{x}\|^2 + (\tau^*(\bar{x}))^2}) \leq \tau^*(\bar{x}).$$

Покажем, что тогда $\tau(\bar{x})/\|\bar{x}\| \rightarrow 0$. По определению $\tau(\bar{x})$ имеем

$$\tau(\bar{x}) - \|\bar{x}\|^2 < \bar{r}(\sqrt{\|\bar{x}\|^2 + ((\tau(\bar{x}) - \|\bar{x}\|^2)^2)}) \leq \bar{r}(\|\bar{x}\| + |\tau(\bar{x}) - \|\bar{x}\|^2|),$$

где использовано, что $\bar{r}(l)$ — неубывающая функция и

$$\sqrt{a^2 + b^2} \leq a + b, \quad a > 0, \quad b > 0.$$

Далее, так как $\tau(\bar{x}) \leq \|\bar{x}\|$ для достаточно малых $\bar{x}$, то

$$\bar{r}(\|\bar{x}\| + |\tau(\bar{x}) - \|\bar{x}\|^2|) \leq \bar{r}(2\|\bar{x}\|),$$

откуда

$$\tau(\bar{x}) - \|\bar{x}\|^2 \leq \bar{r}(2\|\bar{x}\|)$$

или

$$\frac{\tau(\bar{x})}{\|\bar{x}\|} \leq \frac{2\bar{r}(2\|\bar{x}\|)}{2\|\bar{x}\|} + \|\bar{x}\|$$

то есть $\tau(\bar{x})/\|\bar{x}\| \rightarrow 0$. Следовательно, $\tau^*(\bar{x})/\|\bar{x}\| \rightarrow 0$. Если теперь $\|y\| \leq \tau^*(\bar{x})$, то справедливы неравенства

$$\|f(\bar{x}, y)\| \leq \bar{r}(\sqrt{\|\bar{x}\|^2 + \|y\|^2}) \leq \tau^*(\bar{x}).$$

Отсюда следует, что компактное отображение $f(\bar{x}, \cdot)$ отображает шар $\|y\| \leq \tau^*(\bar{x})$ в себя. На основании теоремы Шаудера [12] отображение $f(\bar{x}, \cdot)$ имеет неподвижную точку в этом шаре, т. е. существует отображение $y(\bar{x})$ такое, что

$$f(\bar{x}, y(\bar{x})) = y(\bar{x}), \quad \|y(\bar{x})\| \leq \tau^*(\bar{x}).$$

Следовательно, $y(\bar{x})/\|\bar{x}\| \rightarrow 0$ при $\bar{x} \rightarrow 0$.

Таким образом, $g(\bar{x}, y(\bar{x})) = 0$. Положим $\Psi(\bar{x}) = \Psi_1(\bar{x} + y_1(\bar{x}))$. Тогда $\Psi(\bar{x}) = \Psi_2(\bar{x} - y_2(\bar{x}))$.

Поскольку $y_1(\bar{x}) = P_1 y(\bar{x})$ и $y_2(\bar{x}) = P_2 y(\bar{x})$, то

$$\frac{y_1(\bar{x})}{\|\bar{x}\|} \rightarrow 0, \quad \frac{y_2(\bar{x})}{\|\bar{x}\|} \rightarrow 0, \quad \text{при } \bar{x} \rightarrow 0.$$

Имеем

$$\Psi(\bar{x}) = \bar{x} + y_1(\bar{x}) + r_1(\bar{x} + y_1(\bar{x})).$$

Положим

$$r(\bar{x}) = y_1(\bar{x}) + r_1(\bar{x} + y_1(\bar{x})).$$

Покажем, что $r(\bar{x})/\|\bar{x}\| \rightarrow 0$ при $\bar{x} \rightarrow 0$. Действительно, имеем

$$\frac{\|r(\bar{x})\|}{\|\bar{x}\|} \leq \frac{\|y_1(\bar{x})\|}{\|\bar{x}\|} + \left(\frac{\|r_1(\bar{x} + y_1(\bar{x}))\|}{\|\bar{x} + y_1(\bar{x})\|} \cdot \frac{\|\bar{x} + y_1(\bar{x})\|}{\|\bar{x}\|} \right).$$

$$\text{Так как } \frac{y_1(\bar{x})}{\|\bar{x}\|} \rightarrow 0, \frac{r_1(\bar{x})}{\|\bar{x}\|} \rightarrow 0, \text{ то } \frac{r(\bar{x})}{\|\bar{x}\|} \rightarrow 0$$

при $\bar{x} \rightarrow 0$. Теперь предположим, что $\bar{x}_0 \neq 0$. Так как $\bar{x}_0 \in \text{ri } Q_i$, то существует число $\varepsilon_0 > 0$ такое, что

$$\bar{x}_0 + \text{Lin } Q_i \cap B(0, \varepsilon_0) \subseteq Q_i.$$

Введем конус

$$K_i = \{\bar{x} \in X : \langle \bar{x}, \bar{x}_0 \rangle \gg \|\bar{x}\| \|\bar{x}_0\| (1 - \delta^2/2 \|\bar{x}_0\|^2)\}.$$

Нетрудно видеть, что если $\bar{x} \in K_i$, то

$$\left\| \frac{\bar{x}}{\|\bar{x}\|} \cdot \|\bar{x}_0\| - \bar{x}_0 \right\| < \delta.$$

Действительно, имеем

$$\left\| \frac{\bar{x}}{\|\bar{x}\|} \cdot \|\bar{x}_0\| - \bar{x}_0 \right\|^2 = 2 \|\bar{x}_0\|^2 - 2 (\|\bar{x}_0\|^2 / \|\bar{x}\|) < \|\bar{x}_0\|^2,$$

$$\bar{x} > < 2 \|\bar{x}_0\|^2 - 2 \|\bar{x}_0\| / \|\bar{x}\| \cdot \|\bar{x}_0\| \|\bar{x}\| (1 - \delta^2/2 \|\bar{x}_0\|^2) = \delta^2.$$

Поэтому, если

$$\bar{x} \in \text{Lin } Q_i \cap K_{\varepsilon_0}, \text{ то } (\|\bar{x}_0\| / \|\bar{x}\|) \bar{x} = \bar{x}_0 + ((\|\bar{x}_0\| / \|\bar{x}\|) \bar{x} - \bar{x}_0) \in \\ \in \bar{x}_0 + \text{Lin } Q_i \cap B(0, \varepsilon_0)$$

и, следовательно, $\bar{x} \in Q_i$.

Рассмотрим конус

$$Q = Q_1 \cap Q_2 \cap K_{(1/2)\varepsilon_0}.$$

Положим

$$z_1(\bar{x}) = \bar{x} + y_1(\bar{x}), \quad z_2(\bar{x}) = \bar{x} - y_2(\bar{x}).$$

Имеем $z_i(\bar{x}) \in \text{Lin } Q_i$, если $\bar{x} \in \text{Lin } Q_i$.

Выберем $\varepsilon_1 > 0$ настолько малым, чтобы из условий $\|\bar{x}\| < \varepsilon_1$, $\bar{x} \in Q$ следовало, что $|z_i(\bar{x})| < \varepsilon$, $z_i(\bar{x}) \in K_{\varepsilon_0}$. Тогда для $\bar{x} \in Q \cap B(0, \varepsilon_1)$ выполняется включение $z_i(\bar{x}) \in \text{Lin } Q_i \cap K_{\varepsilon_0}$. Значит $z_i(\bar{x}) \in Q_i \cap B(0, \varepsilon)$.

Таким образом, $\Psi_i(z_i(\bar{x})) \in M_i$, $\Psi(\bar{x}) \in M_1 \cap M_2$.

Если $\bar{x}_0 = 0$, то $\text{Lin } Q_i \cap B(0, \varepsilon_0) \subseteq Q$ при достаточно малом $\varepsilon_0 > 0$, а отсюда следует, что $Q_i = \text{Lin } Q_i$, т. е. Q_i подпространство, причем, так как $\text{Lin } Q_i = \text{Lin } K_i$, то $Q_i = \text{Lin } K_i = K_i$.

Положим $Q = Q_1 \cap Q_2 = \text{Lin } Q_1 \cap \text{Lin } Q_2$ и выберем $\varepsilon_1 > 0$ настолько малым, чтобы из $\|\bar{x}\| < \varepsilon_1$ следовало неравенство $\|z_i(\bar{x})\| < \varepsilon$. Тогда для $\bar{x} \in Q \cap B(0, \varepsilon)$ выполняется включение

$$z_i(\bar{x}) \in Q_i \cap B(0, \varepsilon), \quad i = 1, 2.$$

Значит $\Psi_1(z_1(\bar{x})) \in M_1$ и

$$\Psi(\bar{x}) = \Psi_1(z_1(\bar{x})) = \Psi_2(z_2(\bar{x})) \in M_1 \cap M_2.$$

Теорема доказана.

Замечание. Отображение $r(\bar{x}) = y_1(\bar{x}) + r_1(\bar{x} + y_1(\bar{x}))$ может и не быть компактным и поэтому K , вообще говоря, не является компактным локальным шатром для M в точке x .

В случае гладких локальных шатров имеет место следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть выпуклые конусы K_i , $i=1, 2$, являются гладким локальными шатрами, соответственно, для M_1 и M_2 в точке $x \in M_1 \cap M_2$. Далее, пусть выполнены предположения 1) — 3) теоремы 1. Тогда конус K является гладким локальным шатром множества $M = M_1 \cap M_2$ в точке x .

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.

§3. Построение шатров для негладких ограничений типа равенств

Пусть X — гильбертово пространство, а f — некоторая функция, обращающаяся в нуль в точке x_0 . Нас будет интересовать построение шатра к множеству $M = \{x \in X : f(x) = 0\}$ в точке x_0 .

Пусть $f_i(x)$, $i \in I$ — дифференцируемые по Фреше функции в некоторой окрестности точки x_0 , где I — конечное множество индексов. Положим

$$\varphi(x) = \max_{i \in I} f_i(x).$$

Пусть

$$\varphi(x_0) = 0, \quad I(x_0) = \{i \in I : \varphi(x_0) = f_i(x_0)\}.$$

Теорема 3. Пусть выполнены следующие предположения:

1) существует вектор w такой, что $\varphi'(x_0, w) < 0$ где $\varphi'(x_0, w)$ — производная функция φ в точке x_0 по направлению w .

2) $\varphi'(x, w)$ — полунепрерывна сверху по x в точке x_0 . Тогда для любого $i \in I(x_0)$ выпуклый конус

$$K_i = \{\bar{x} \in X : \varphi'(x_0, \bar{x}) \leq 0, \langle -f_i(x_0), \bar{x} \rangle \leq 0\}$$

является компактным шатром к множеству $M = \{x \in X : \varphi(x) = 0\}$ в точке x_0 .

Доказательство. Фиксируем некоторый индекс $i \in I(x_0)$. Можно показать, что существуют функции $r_1(\bar{x})$ и $r_2(\bar{x})$ такие, что

$$\varphi(x_0 + \bar{x}) \leq \varphi(x_0) + \varphi'(x_0, \bar{x}) + r_1(\bar{x}),$$

$$-\varphi(x_0 + \bar{x}) \leq -\varphi(x_0) + \langle -f_i(x_0), \bar{x} \rangle + r_2(\bar{x}),$$

$$r_i(\bar{x})/\|\bar{x}\| \rightarrow 0, \quad i=1, 2.$$

Положим

$$\omega_1(\lambda) = \sup \{r_1(\bar{x}) : \|\bar{x}\| \leq \lambda\}.$$

Ясно, что $\omega_1(\lambda)$ монотонно не убывает и $\omega_1(\lambda)/\lambda \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow 0$ и $r_1(\bar{x}) \leq \omega_1(\|\bar{x}\|)$.

Поэтому для $\bar{x} \in K_l$ и $\mu > 0$ имеем

$$\begin{aligned} \varphi(x_0 + \bar{x} + \mu \|\bar{x}\| w) &\leq \varphi'(x_0, \bar{x} + \mu \|\bar{x}\| w) + \\ &+ \omega_1(\|\bar{x}\| (1 + \mu \|w\|)) = \|\bar{x}\| [\mu \varphi'(x_0, w) + \\ &+ \omega_1(\|\bar{x}\| (1 + \mu \|w\|) / \|\bar{x}\|). \end{aligned}$$

Выберем теперь $\delta_\mu^1 > 0$ настолько малым, чтобы выражение, выделенное в квадратные скобки, было меньше $1/2 \varphi'(x_0, w)$ при $\|\bar{x}\| \leq \delta_\mu^1$.

Тогда

$$\varphi(x_0 + \bar{x} + \mu \|\bar{x}\| w) \leq 1/2 \mu \varphi'(x_0, w) < 0.$$

Аналогично можно показать, что

$$-\varphi(x_0 + \bar{x} - \mu \|\bar{x}\| w) < 0, \text{ если } \|\bar{x}\| \leq \delta_\mu^2, \bar{x} \in K_l.$$

Рассмотрим теперь функцию

$$q(a) = \varphi(x_0 + \bar{x} + a \|\bar{x}\| w).$$

Имеем

$$q(\mu) < 0, \quad q(-\mu) > 0.$$

Так как $\varphi(\bar{x})$ непрерывна в окрестности точки x_0 , то при достаточно малых $\bar{x}$ непрерывной будет и функция $q(a)$. Следовательно, на отрезке $[-\mu, +\mu]$ существует точка $a(\bar{x})$ такая, что

$$q(a(\bar{x})) = \varphi(x_0 + \bar{x} + \|\bar{x}\| a(\bar{x}) w) = 0,$$

$$|a(\bar{x})| \leq \mu, \quad \|\bar{x}\| \leq \delta_\mu = \min\{\delta_\mu^1, \delta_\mu^2\}.$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} &\lim_{\Delta \downarrow 0} [(q(a + \Delta) - q(a))/\Delta] \leq \\ &\leq \lim_{\Delta \downarrow 0} [(\varphi(x_0 + \bar{x} + (a + \Delta) \|\bar{x}\| w) - \varphi(x_0 + \bar{x} + a \|\bar{x}\| w))/\Delta] = \\ &= \varphi'(x_0 + \bar{x} + a \|\bar{x}\| w, w) \cdot \|\bar{x}\|. \end{aligned}$$

Поэтому в силу полунепрерывности сверху $\varphi'(x, w)$ в точке x_0 и условия $\varphi'(x_0, w) < 0$ имеем

$$\lim_{\Delta \downarrow 0} (q(a + \Delta) - q(a))/\Delta < 0$$

при достаточно малых $\bar{x}$. Отсюда получаем, что $q(a)$ монотонно убывает, поэтому $a(\bar{x})$ для достаточно малых $\bar{x}$ определяется однозначно. Так как

$$|a(\bar{x})| \leq \mu, \quad \|\bar{x}\| \leq \delta_\mu, \text{ то } a(\bar{x}) \rightarrow 0, \bar{x} \rightarrow 0.$$

Можно показать, что $a(\bar{x})$ непрерывна в некоторой окрестности точки 0.

Итак, показано, что в малой окрестности нуля функция $a(\bar{x})$ непрерывна по $\bar{x}$ и $a(\bar{x}) \rightarrow 0$, кроме того имеет место равенство

$$\varphi(x_0 + \bar{x} + \alpha(\bar{x}) \|\bar{x}\| w) = 0, \bar{x} \in K_l.$$

Пусть $\Pi(\bar{x})$ — проекция точки $\bar{x}$ на множество K_l .

Так как пространство X гильбертово, а K_l — выпуклый замкнутый конус, то $\Pi(\bar{x})$ существует и $\|\Pi(\bar{x})\| \leq \|\bar{x}\|$.

Положим $r(\bar{x}) = \Pi(\alpha(\bar{x}) \|\bar{x}\| w)$. Так как $\Pi(\bar{x})$ — непрерывное отображение по $\bar{x}$, то и функция $\alpha(\Pi(\bar{x}))$ также непрерывна в окрестности точки 0. Следовательно, отображение $r(\bar{x})$ компактно и

$$\varphi(x_0 + \bar{x} + r(\bar{x})) = 0, \bar{x} \in K \cap B(0, \varepsilon)$$

при некотором $\varepsilon > 0$. Теорема доказана.

Следствие. Пусть $\hat{f}(x)$ — дифференцируемая по Фреше функция в окрестности точки x_0 . Пусть существует вектор w такой, что

- 1) $\langle f'(x_0), w \rangle < 0$,
- 2) функция $F(x) = \langle f'(x), w \rangle$ непрерывна в точке x_0 ,
- 3) $x_0 \in M = \{x \in X : f(x) = 0\}$.

Тогда подпространство $K = \{\bar{x} \in X : \langle f'(x_0), \bar{x} \rangle = 0\}$ является компактным шатром для M в точке x_0 .

Замечание. Если градиент функции $\hat{f}$ непрерывен в окрестности точки x_0 , то известно [5], что K является гладким шатром для M в x_0 . При наших предположениях градиент $\hat{f}'(x)$ может и не быть непрерывным по x . Действительно, выберем функцию двух переменных

$$f(x, y) = x^2 \sin \frac{1}{x^2} (y^2 + 1) + y.$$

Легко показать, что f — дифференцируемая по Фреше функция в точке $(0, 0)$, а функция $F_1(x) = \langle f'(x), w_1 \rangle$, где $w_1 = (0, 1)$, непрерывна в точке $(0, 0)$. Однако $F_2(x) = \langle f'(x), w_2 \rangle$, где $w_2 = (1, 0)$ не является непрерывной в нуле. Отметим, что $f(x, y)$ не является локально липшицевой в окрестности точки $(0, 0)$.

Обратимся теперь к классу локально липшицевых функций. В работе [9] Ф. Кларком была введена обобщенная производная для локально липшицевых функций:

$$F(x, \bar{x}) = \lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ h \rightarrow 0}} (f(x + \lambda \bar{x} + h) - f(x + h)) / \lambda.$$

Из свойства верхнего предела следует, что $F(x, \bar{x})$ выпуклый, положительно однородный функционал по $\bar{x}$. Поэтому существует такой слабый компакт $\partial f(x)$, что

$$F(x, \bar{x}) = \max_{x^* \in \partial f(x)} \langle x^*, \bar{x} \rangle.$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 4. Пусть $f(x)$ — локально липшицева и $f(x_0) = 0$. Пусть, далее, $\partial f(x_0)$ является компактным множеством и $0 \notin \partial f(x_0)$. Тогда подпространство

$$K = \{\bar{x} \in X : F(x_0, \bar{x}) \leq 0, F(x_0, -\bar{x}) \leq 0\}$$

является компактным шатром множества $M = \{x \in X : f(x) = f(x_0) = 0\}$ в точке x_0 .

§ 4. Необходимые условия экстремума

В этом параграфе на основе полученных результатов строим необходимые условия экстремума для некоторых задач с двумя негладкими ограничениями типа равенств. Из-за экономии места при описании примеров в основном формулируется окончательный результат.

Задача 1. Пусть требуется найти

$$\min_x |f_0(x) : f_1(x) = 0, f_2(x) = 0|,$$

где

$f_0(x)$ — дифференцируемая по Фреше функция в точке x_0 , а функции $f_i(x)$, $i = 1, 2$, удовлетворяют всем условиям следствия теоремы 3. Тогда подпространства

$$K_1 = \{\bar{x} \in X : \langle f'_1(x_0), \bar{x} \rangle = 0\},$$

$$K_2 = \{\bar{x} \in X : \langle f'_2(x_0), \bar{x} \rangle = 0\}$$

являются компактными шатрами, соответственно, для множеств

$$M_1 = \{x \in X : f_1(x) = 0\} \text{ и } M_2 = \{x \in X : f_2(x) = 0\}.$$

Имеем

$$\text{ri} K_1 = K_1, \text{ri} K_2 = K_2, 0 \in \text{ri} K_1 \cap \text{ri} K_2.$$

Пусть $K_1 + K_2 = X$. В этом случае согласно теореме 1 подпространство $K = K_1 \cap K_2$ есть локальный шатер для $M = M_1 \cap M_2$ в x_0 . Поэтому, если точка x_0 является решением нашей задачи, то выпуклый конус $T = \{\bar{x} \in X : \langle f'_2(x_0), \bar{x} \rangle \leq 0\}$ не пересекается с конусом K . Следовательно, существуют не равные нулю одновременно векторы x_1^*, x_2^* такие, что

$$x_1^* + x_2^* = 0, x_1^* \in T^*, x_2^* \in K^*.$$

Так как

$$T^* = -\text{con } f_0(x_0), K^* = \text{Lin } f'_1(x_0) + \text{Lin } f'_2(x_0),$$

то существуют числа λ_1, λ_2 такие, что

$$f_0(x_0) + \lambda_1 f'_1(x_0) + \lambda_2 f'_2(x_0) = 0.$$

Пусть теперь $K_1 + K_2 \subset X$. Тогда, в силу замкнутости подпространства $K_1 + K_2$, существует ненулевой вектор y^* такой, что $y^* \in (K_1 + K_2)^\perp$. Значит существуют не равные нулю числа λ_1, λ_2 такие, что

$$\lambda_1 f'_1(x_0) + \lambda_2 f'_2(x_0) = 0.$$

Окончательно получим правило множителей Лагранжа: если x_0 — решение задачи, то существуют не все одновременно равные нулю числа $\lambda_0 \geq 0, \lambda_1, \lambda_2$ такие, что

$$\lambda_0 f'_0(x_0) + \lambda_1 f'_1(x_0) + \lambda_2 f'_2(x_0) = 0.$$

З а м е ч а н и е. Функции $f_i(x)$, $i=0, 1, 2$, при вышеуказанных предположениях, вообще говоря, не являются локально липшицевыми. Поэтому, используя вариационный принцип Экланда, нельзя получить правило множителей Лагранжа.

С другой стороны, методика, рассматриваемая в этой работе, позволяет установить правило множителей только в случае двух негладких ограничений в бесконечномерном гильбертовом пространстве.

Задача 2. Пусть $x_0 \in X$ — точка минимума функции $f_0(x)$ при дополнительных условиях

$$\varphi_1(x) = \max_{i \in I_1} f_i(x) = 0,$$

$$\varphi_2(x) = \max_{i \in I_2} g_i(x) = 0.$$

Здесь $f_0(x)$ — дифференцируемая по Фреше функция в точке x_0 , а φ_1 и φ_2 удовлетворяют всем требованиям теоремы 3. Тогда для любых $i_0 \in I_1(x_0)$, $j_0 \in I_2(x_0)$ многогранные конусы

$$K_{i_0} = \{\bar{x} \in X : \varphi'_1(x_0, \bar{x}) \leq 0, \langle -f'_{i_0}(x_0), \bar{x} \rangle \leq 0\},$$

$$K_{j_0} = \{\bar{x} \in X : \varphi'_2(x_0, \bar{x}) \leq 0, \langle -g'_{j_0}(x_0), \bar{x} \rangle \leq 0\}$$

являются компактными шатрами, соответственно, для

$$M_1 = \{x \in X : \varphi_1(x) = 0\}, \quad M_2 = \{x \in X : \varphi_2(x) = 0\}.$$

Пусть существует вектор $w_1 \in X$ такой, что

$$\langle f'_i(x_0), w_1 \rangle < 0, \quad i \in I_1(x_0) \setminus i_0, \quad \langle f'_{i_0}(x_0), w_1 \rangle = 0.$$

Тогда $w_1 \in \text{ri}K_{i_0}$, т. е. $\text{ri}K_{i_0} \neq \emptyset$. В этом случае

$$\text{Lin}K_{i_0} = \{\bar{x} \in X : \langle f'_{i_0}(x_0), \bar{x} \rangle = 0\}.$$

Аналогично, если существует вектор w_2 , удовлетворяющий условиям

$$\langle g'_j(x_0), w_2 \rangle < 0, \quad j \in I_2(x_0) \setminus j_0, \quad \langle g'_{j_0}(x_0), w_2 \rangle = 0,$$

$$\text{то } \text{ri}K_{j_0} \neq \emptyset, \quad \text{Lin}K_{j_0} = \{\bar{x} \in X : \langle g'_{j_0}(x_0), \bar{x} \rangle = 0\}.$$

Рассмотрим несколько случаев. Пусть $\text{ri}K_{i_0} \cap \text{ri}K_{j_0} = \emptyset$. В этом случае существуют не равные нулю одновременно числа λ_i , $i \in I_1(x_0)$, μ_j , $j \in I_2(x_0)$ такие, что

$$\sum_{i \in I_1(x_0)} \lambda_i f'_i(x_0) + \sum_{j \in I_2(x_0)} \mu_j g'_j(x_0) = 0,$$

причем

$$\lambda_i > 0, \quad i \in I_1(x_0) \setminus i_0, \quad \mu_j \geq 0, \quad j \in I_2(x_0) \setminus j_0.$$

Пусть

$$\text{ri}K_{i_0} \cap \text{ri}K_{j_0} \neq \emptyset, \quad \text{Lin}K_{i_0} + \text{Lin}K_{j_0} = X.$$

В этом случае конус $K = K_{i_0} \cap K_{j_0}$, в силу теоремы 1, есть локальный шатер для $M = M_1 \cap M_2$ в точке x_0 . Так как x_0 — точка минимума,

то конус $T = \{\bar{x} \in X: \langle f_0(x_0), \bar{x} \rangle < 0\}$ не пересекается с конусом $\text{ri}K$. Значит, существуют числа λ_i, μ_j такие, что

$$f_0(x_0) = \sum_{i \in I_1} \lambda_i f_i(x_0) + \sum_{j \in I_2} \mu_j g_j(x_0) = 0.$$

Если теперь $\text{Lin}K_{I_1} + \text{Lin}K_{I_2} \subset X$, то существует ненулевой вектор

$$y^* \in [\text{Lin}(K_{I_1} + K_{I_2})]^\perp.$$

Наконец, если $\text{ri}K_{I_1} = \emptyset$, то существуют не все одновременно равные нулю числа λ_i такие, что

$$\sum_{i \in I_1(x_0) \setminus I_0} \lambda_i f_i(x_0) + \lambda_{I_1} f_{I_1}(x_0) = 0, \lambda_i \geq 0, i \in I_1(x_0) \setminus I_0.$$

Окончательно получим следующий результат.

Теорема 5. Пусть имеют место вышеуказанные предположения. Тогда для любых $i_0 \in I_1(x_0), j_0 \in I_2(x_0)$ существуют числа $\lambda_0, \lambda_i, i \in I_1, \mu_j, j \in I_2$, не все одновременно равные нулю, такие, что

$$\lambda_0 f_0(x_0) + \sum_{i \in I_1} \lambda_i f_i(x_0) + \sum_{j \in I_2} \mu_j g_j(x_0) = 0,$$

причем

$$\lambda_0 \geq 0, \lambda_i \geq 0, \text{ для } i \in I_1 \setminus i_0, \mu_j \geq 0 \text{ для } j \in I_2 \setminus j_0.$$

Замечание. Так как функции φ_1 и φ_2 могут и не быть локально липшицевыми, то их субдифференциалы, вообще говоря, не являются полунепрерывными сверху многозначными отображениями. Из-за этого принцип Экланда в рассматриваемой задаче не позволяет получить правило множителей. Полученный результат указывает на то, что множители Лагранжа определяются не единственным образом и, кроме того, указывает на то, какие из них взяты с положительными знаками.

Используя результаты теоремы 1, можно доказать следующее утверждение.

Теорема 6. Пусть x_0 есть точка минимума функции $f_0(x)$ при ограничениях $f_1(x) = 0, f_2(x) = 0$, где $f_0(x)$ — дифференцируема по Фреше в точке $x_0, f_i(x), i=1, 2$, локально липшицевы, причем $\partial f_2(x_0)$ — компакт, а $\text{Lin} \partial f_1(x_0)$ конечномерно.

Тогда существуют число $\lambda \geq 0$ и векторы

$$x_i^* \in \overline{\{\text{con } \partial f_i(x_0) - \text{con } \partial f_1(x_0)\}}, i = 1, 2,$$

такие, что

$$\lambda f_0(x_0) + x_1^* + x_2^* = 0, \lambda + \|x_1^*\| + \|x_2^*\| \neq 0.$$

Автор выражает глубокую благодарность Б. Н. Пшеничному за обсуждение результатов.

Ք. Ա. ԽԱՉԱՏՐԻԱՆ. Վրանների հատման մասին ճիշդացված տարածություններում և էքստրեմումի անհրաժեշտ պայմանները ոչ ռդրկ ֆունկցիաների համար (ամփոփում):

Այս հոդվածում ընդհանրացվում է «Վրանների» [5] տեսությունը հիլբերտյան տարածություններում: Աշխատանքում ստացվել են մինիմալի անհրաժեշտ պայմաններ մաթեմատիկական ծրագրավորման այն խնդիրներում, երբ սահմանափակումները տրվում են ոչ դիֆերենցելի ֆունկցիաներով:

Հավասարումների տիպի սահմանափակումները տրվում են, ընդհանրապես ասած, ոչ լոկալ լիպշիցյան ֆունկցիաների միջոցով:

Մասնավորապես ընդհանրացվում է Յ. Կլարկի [10] արդյունքները:

R. A. KHASHATRIAN, *On intersection of tents in Hilbert distances and the necessary conditions of extremum for planar functions (summary)*

The article considers the necessary conditions for extremum in problems of mathematical programming, where restrictions are given by non differentiable functions. The restrictions of equality type are given by functions, which are not locally Lipschitz. The well-known results of Clark [10] are generalized.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. Н. Пшеничный. Необходимые условия экстремума, М., «Наука», 1982.
2. Б. Н. Пшеничный. Выпуклый анализ и экстремальные задачи, М., «Наука», 1980.
3. Б. Н. Пшеничный, Р. А. Хачатрян. Ограничения типа равенства в негладких задачах оптимизации, Экономика и математ. методы, № 6, 1982, 1133—1140.
4. Б. Н. Пшеничный, Р. А. Хачатрян. О необходимых условиях экстремума для негладких функций, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», XVIII, № 4, 1983, 318—325.
5. В. Г. Болтянский. Метод шатров в теории экстремальных задач, УМН, 30, № 6, 1975, 3—55.
6. Демьянов, Л. Н. Полякова. Условия минимума квазидифференцируемой функции на квазидифференцируемом множестве, ЖВМ и МФ, 4, № 20, 1980, 849—856.
7. А. Я. Кругер, Б. Ш. Мордухович. Экстремальные точки — уравнения Эйлера в негладких задачах оптимизации, ДАН БССР, 24, № 8, 684—687.
8. В. М. Алексеев, В. М. Тихомиров, С. В. Фомин. Оптимальное управление, М., «Наука», 1979.
9. I. Ekeland. On the variational Principle, Math. Anal., Appl., 47, № 2, 1974, 324—353.
10. F. H. Clarke. A new approach to Lagrange multipliers, Math. Oper. Res., 1, № 2, 1976, 165—174.
11. Р. Рокаффеллер. Выпуклый анализ, М., «Мир», 1973.
12. В. А. Треногин. Функциональный анализ, М., «Наука», 1980.