

УДК 517.53

М. М. ДЖРБАШЯН, С. Г. РАФАЕЛЯН

ОСОБЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ, ПОРОЖДАЮЩИЕ
СИСТЕМЫ ТИПА ФУРЬЕ

В работе авторов [1] и [2], в частности, были построены специальные биортогональные системы, образующие базис Рисса в пространстве $L_1(0, \sigma)$ ($0 < \sigma < +\infty$).

В настоящей статье устанавливается, что указанные базисные системы одновременно представляют собой системы собственных функций для особых классов краевых задач для модельных интегродифференциальных операторов дробного порядка.

Таким образом, данная работа по существу является существенным дополнением к статье [1] авторов.

§ 1. Предварительные сведения

(а) Приведем определение и ряд свойств операторов интегродифференцирования в смысле Римана—Лиувилля (более подробно эти свойства с доказательствами изложены в монографии [3], гл. IX).¹

Пусть $f(x) \in L_1(0, \sigma)$ ($0 < \sigma < +\infty$). Интегралом от $f(x)$ порядка α ($0 < \alpha < +\infty$) с началом в точке $x=0$ называют функцию

$$D_0^{-\alpha} f(x) \equiv D^{-\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad 0 < x < \sigma, \quad (1.1)$$

где $\Gamma(\alpha)$ — гамма-функция Эйлера.

Соответственно интегралом порядка $\alpha > 0$ от $f(x)$ с концом в точке $x=\sigma$ называют функцию

$$D_{\sigma}^{-\alpha} f(x) \equiv \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^{\sigma} (t-x)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad 0 < x < \sigma. \quad (1.1')$$

Отметим следующие свойства интегральных операторов $D^{-\alpha}$ и $D_{\sigma}^{-\alpha}$.

1. Если $f \in L_1(0, \sigma)$, то функции $D^{-\alpha} f(x)$ и $D_{\sigma}^{-\alpha} f(x)$ определены почти всюду на $(0, \sigma)$ и принадлежат классу $L_1(0, \sigma)$.

2. В каждой точке Лебега функции $f(x)$ и, следовательно, почти всюду

$$\lim_{\alpha \rightarrow +0} D^{-\alpha} f(x) = \lim_{\alpha \rightarrow +0} D_{\sigma}^{-\alpha} f(x) = f(x), \quad 0 < x < \sigma. \quad (1.2)$$

Поэтому естественно полагать, что

$$D^{-0} f(x) = D_{\sigma}^{-0} f(x) = f(x) \quad (1.2')$$

почти всюду на $(0, \sigma)$.

3. Если $f(x) \in L_1(0, \sigma)$ и $a_k > 0$ ($k=1, 2$), то почти всюду на $(0, \sigma)$

$$D^{-a_2} \{D^{-a_1} f(x)\} = D^{-a_1} \{D^{-a_2} f(x)\} = D^{-(a_1+a_2)} f(x), \quad (1.3)$$

$$D_{\sigma}^{-a_2} \{D_{\sigma}^{-a_1} f(x)\} = D_{\sigma}^{-a_1} \{D_{\sigma}^{-a_2} f(x)\} = D_{\sigma}^{-(a_1+a_2)} f(x), \quad (1.3')$$

Перейдем теперь к определению и свойствам производной произвольного порядка.

Пусть α ($0 < \alpha < +\infty$) и целое число $p \geq 1$ определяется из условия $p-1 < \alpha \leq p$. Если для $f(x) \in L_1(0, \sigma)$ почти всюду на $(0, \sigma)$ существует (не обязательно суммируемая) функция

$$D_0^{\alpha} f(x) \equiv D^{\alpha} f(x) \equiv \frac{d^p}{dx^p} [D^{-(p-\alpha)} f(x)], \quad (1.4)$$

то последнюю назовем производной порядка α от функции $f(x)$ с началом в точке $x=0$. Аналогично формулой

$$D_{\sigma}^{\alpha} f(x) \equiv (-1)^p \frac{d^p}{dx^p} \{D_{\sigma}^{-(p-\alpha)} f(x)\} \quad (1.4')$$

определяется производная порядка α от функции $f(x)$ с концом в точке $x=\sigma$.

Отметим, что функции (1.4) и (1.4') при целом $\alpha = p > 0$ являются обычными производными функции $f(x)$ порядка α .

Из свойств операторов интегро-дифференцирования отметим следующие.

4. Пусть $f(x) \in L_1(0, \sigma)$, тогда почти всюду на $(0, \sigma)$

1) при $\alpha_2 \geq \alpha_1 \geq 0$

$$D^{\alpha_1} D^{-\alpha_2} f(x) = D^{-(\alpha_2-\alpha_1)} f(x), \quad (1.5)$$

$$D_{\sigma}^{\alpha_1} D_{\sigma}^{-\alpha_2} f(x) = D_{\sigma}^{-(\alpha_2-\alpha_1)} f(x), \quad (1.6)$$

2) при $\alpha_1 > \alpha_2 \geq 0$, в предположении, что $D^{\alpha_1-\alpha_2} f(x)$ существует почти всюду на $(0, \sigma)$

$$D^{\alpha_1} D^{-\alpha_2} f(x) = D^{\alpha_1-\alpha_2} f(x), \quad (1.7)$$

$$D_{\sigma}^{\alpha_1} D_{\sigma}^{-\alpha_2} f(x) = D_{\sigma}^{\alpha_1-\alpha_2} f(x). \quad (1.8)$$

5. Пусть $f(x) \in L_1(0, \sigma)$ и существует производная $D^{\beta} f(x) \in L_1(0, \sigma)$, причем $0 < \beta \leq 1$. Тогда для любого $\alpha \geq 0$

$$D^{-\alpha} D^{\beta} f(x) = D^{\beta-\alpha} f(x) - [D^{-(1-\beta)} f(x)]_{x=0} \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}. \quad (1.9)$$

6. Если $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$, то

$$D^{\alpha} D^{\beta} f(x) = \frac{d}{dx} [D^{\alpha+\beta-1} f(x) - [D^{-(1-\beta)} f(x)]]_{x=0} \frac{x^{\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}. \quad (1.10)$$

Из определений (1.1), (1.1'), и (1.4), (1.4') получим

7. При любом $\gamma \in (-1, +\infty)$ и $\alpha \in (-\infty, +\infty)$

$$D^{\alpha} \left\{ \frac{x^{\gamma}}{\Gamma(1+\gamma)} \right\} = \frac{x^{\gamma-\alpha}}{\Gamma(1+\gamma-\alpha)}, \quad (1.11)$$

$$D_z^\alpha \left\{ \frac{(z-x)^{\gamma-1}}{\Gamma(1+\gamma)} \right\} = \frac{(z-x)^{\gamma-\alpha}}{\Gamma(1+\gamma-\alpha)}. \quad (1.11')$$

Пусть

$$E_{1/2}(z; \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\mu+2k)} \quad (1.12)$$

— целая функция типа Миттаг—Леффлера порядка $\rho = \frac{1}{2}$ и типа $\alpha = 1$.

Из (1.11) и (1.12) следует

8. Если $y_\mu(x; \lambda) = E_{1/2}(-\lambda x^2; \mu) x^{\mu-1}$ ($\mu > 0$), то для $x \in (-\infty, \infty)$

$$\begin{aligned} D^\alpha y_\mu(x; \lambda) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-\lambda)^k D^\alpha \left\{ \frac{x^{2k+\mu-1}}{\Gamma(\mu+2k)} \right\} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-\lambda)^k \frac{x^{2k+\mu-1-\alpha}}{\Gamma(\mu+2k-\alpha)} = E_{1/2}(-\lambda x^2; \mu-\alpha) x^{\mu-\alpha-1}, \end{aligned}$$

т. е.

$$D^\alpha y_\mu(x; \lambda) = y_{\mu-\alpha}(x; \lambda). \quad (1.13)$$

Аналогично будем иметь

$$D_\sigma^\alpha y_\mu(\sigma-x, \lambda) = y_{\mu-\alpha}(\sigma-x; \lambda). \quad (1.13')$$

(6) Пусть $\{\gamma_k\}_0^3$ — произвольная совокупность чисел, подчиненных пока лишь условию

$$0 < \gamma_k \leq 1 \quad (0 \leq k \leq 3). \quad (1.14)$$

Для функции $y(x)$, определенной на интервале $(0, \sigma)$ ($0 < \sigma < +\infty$), введем в рассмотрение следующие интегродифференциальные операторы

$$\begin{aligned} L_0 y(x) &= D^{-(1-\gamma_0)} y(x), \quad L_1 y(x) = D^{-(1-\gamma_1)} D^{\gamma_0} y(x), \\ L_2 y(x) &= D^{-(1-\gamma_2)} D^{\gamma_1} D^{\gamma_0} y(x), \\ L_3 y(x) &= L y(x) = D^{-(1-\gamma_3)} D^{\gamma_2} D^{\gamma_1} D^{\gamma_0} y(x). \end{aligned} \quad (1.15)$$

Отметим, что при $\gamma_j = 1$ ($0 \leq j \leq 3$) будем иметь

$$L_j y(x) = y^{(j)}(x) \quad (0 \leq j \leq 3).$$

Положив, далее, что параметры $\{\gamma_j\}$ кроме (1.14) подчинены также условию

$$\sum_{j=0}^3 \gamma_j = 3, \quad (1.16)$$

введем в рассмотрение функции

$$y_r(x; \lambda) = y_{\mu_r}(x; \lambda) = E_{1/2}(-\lambda x^2; \mu_r) x^{\mu_r-1}, \quad (1.17)$$

где

$$\mu_r = \sum_{j=0}^r \gamma_j \quad (0 \leq r \leq 2).$$

Справедливо такое предложение (см. [4]):

9. Если для некоторого r ($0 \leq r \leq 2$, $\mu_r > \max \left\{ 1 - \gamma_2; \frac{1}{2} \right\}$), то задача типа Коши

$$\begin{aligned} Ly + \lambda y &= 0, \quad x \in (0, \sigma) \\ L_k y(x) &= \begin{cases} 1, & \text{при } k=r \\ 0, & \text{при } k \neq r \quad (0 \leq k \leq 2) \end{cases} \end{aligned} \quad (1.18)$$

в классе $L_2(0, \sigma)$ имеет единственное решение $y(x) = y_r(x; \lambda)$.

Отметим, что кроме утверждения единственности это предложение легко установить с помощью формул (1.13).

(в) Введем в рассмотрение целую функцию

$$G_\sigma(z; \nu) = E_{1,2}(-\sigma^2 z; 1 + \nu), \quad \nu > 0 \quad (1.19)$$

порядка $\rho = \frac{1}{2}$ и типа σ . Для частных значений параметра $\nu = 0$ или $\nu = 1$ будем иметь

$$G_\sigma(z; 0) = \cos \sigma \sqrt{z}, \quad G_\sigma(z; 1) = \frac{\sin \sigma \sqrt{z}}{\sigma \sqrt{z}}.$$

Приведем необходимые нам сведения о распределении корней функции $G_\sigma(z; \nu)$ (см. [5]).

10. Все корни функции $G_\sigma(z; \nu)$ при $0 \leq \nu < 2$ положительные и простые.

11. Пусть $\{\lambda_k\}_1^\infty$ ($0 < \lambda_k < \lambda_{k+1}$) — последовательность всех корней функции $G_\sigma(z; \nu)$. При $\nu = 0$ и $0 < \nu < 1$, соответственно, будем иметь

$$\lambda_k = \left(\frac{\pi}{\sigma} k - \frac{\pi}{2\sigma} \right)^2, \quad \lambda_k \in \left(\left(\frac{\pi}{\sigma} k - \frac{\pi}{2\sigma} \right)^2, \left(\frac{\pi}{\sigma} k + \frac{\pi}{2\sigma} \right)^2 \right) \quad (k \geq 1).$$

При $\nu = 1$ и $1 < \nu < 2$ соответственно

$$\lambda_k = \left(\frac{\pi}{\sigma} k \right)^2, \quad \lambda_k \in \left(\left(\frac{\pi}{\sigma} k \right)^2, \left(\frac{\pi}{\sigma} k + \frac{\pi}{\sigma} \right)^2 \right) \quad (k \geq 1).$$

Отсюда, в частности, следует оценка

$$|\lambda_k| \asymp (1 + k)^2, \quad k \geq 1, \quad (1.20)$$

Пусть $\{\lambda_k\}_1^\infty$ — нули функции $G_\sigma(z; \nu)$ ($0 \leq \nu < 2$). На интервале $(0, \sigma)$ определим следующие две системы функций:

$$\{E_{1,2}(-\lambda_k x^2; \mu) x^{\mu-1}\}_1^\infty \equiv \{y_\mu(x; \lambda_k)\}_1^\infty, \quad (1.21)$$

$$\left\{ \frac{x^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)} \right\}, \{y_\mu(x; \lambda_k)\}_1^\infty \equiv \{y_\mu(x; \lambda_k)\}_0^\infty \quad (\lambda_0 = 0), \quad (1.22)$$

а также, соответственно, следующие системы:

$$\left\{ -\frac{2\lambda_k \sigma^{-\nu}}{G_\sigma(\lambda_k; \nu-1)} E_{1,2}(-\lambda_k(\sigma-x)^2; \bar{\mu}) (\sigma-x)^{\bar{\mu}-1} \right\}_1^\infty \equiv \{Z_{-\mu}(x, \lambda_k)\}_1^\infty, \quad (1.23)$$

где $\bar{\mu} = 3 + \nu - \mu$,

$$\sigma^{-\nu} \frac{\Gamma(1+\nu)}{\Gamma(\mu^*)} (\sigma-x)^{\mu^*-1}, \left\{ -\frac{1}{\lambda_k} Z_{\mu^*}^{\sim}(x; \lambda_k) \right\}_1^{\infty} \equiv [Z_{\mu^*}^{\sim}(x; \lambda_k)]_0^{\infty}, \quad (1.24)$$

где $\mu^* = 1 + \nu - \mu$.

В работе [1] авторов были установлены следующие теоремы.

12. Системы функций (1.21) и (1.22), а также (1.23) и (1.24) би-ортогональны на $(0, \sigma)$. Иными словами

$$\int_0^{\sigma} y_{\mu}(x; \lambda_k) Z_{\mu}^{\sim}(x; \lambda_n) dx = \begin{cases} \delta_{n,k}; & n, k=1, 2, \dots \\ \delta_{n,k}; & n, k=0, 1, \dots \end{cases} \quad (1.25)$$

В заключение параграфа приведем формулировки двух основных теорем, установленных авторами в работе [1]. В следующем параграфе мы покажем, что эти же теоремы одновременно являются теоремами разложений по собственным функциям для особого рода краевых задач.

13. Пусть параметры μ и ν удовлетворяют условиям

$$\frac{1}{2} < \mu < \frac{5}{2}, \quad -\frac{3}{2} < \nu - \mu < -\frac{1}{2}. \quad (1.26)$$

Тогда

1) В метрике $L_2(0, \sigma)$ ряды вида

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k Z_{\mu}^{\sim}(x; \lambda_k) \quad (1.27)$$

осуществляют взаимно-однозначное и непрерывное отображение всего пространства $l^{2, 2(\mu-1)}$ последовательностей $\{a_k\}_1^{\infty}$ с конечной нормой

$$\|\{a_k\}_1^{\infty}\|_{2(\mu-1)} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} (1+k)^{2(\mu-1)} |a_k|^2 \right)^{1/2} < +\infty \quad (1.28)$$

на все пространство функций $\varphi \in L_2(0, \sigma)$. При этом коэффициенты ряда (1.27) определяются по формулам

$$a_k = \int_0^{\sigma} \varphi(x) y_{\mu}(x, \lambda_k) dx, \quad k=1, 2, \dots, \quad (1.29)$$

и имеет место двойная оценка

$$\|\varphi\|_{L_2(0, \sigma)} \asymp \|\{a_k\}_1^{\infty}\|_{2(\mu-1)}. \quad (1.30)$$

2) В метрике $L_2(0, \sigma)$ ряды вида

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k y_{\mu}(x; \lambda_k) \quad (1.31)$$

дают такое же отображение $l^{2, 2(1-\mu)}$ на пространство функций $\varphi \in L_2(0, \sigma)$. При этом имеют место формулы

$$b_k = \int_0^{\sigma} \varphi(x) Z(x; \lambda_k) dx, \quad k=0, 1, \dots \quad (1.32)$$

и двойная оценка

$$\|\varphi\|_{L_2(0, \sigma)} \asymp \|b_k\|_{\bar{L}_2(1-\mu)} \quad (1.33)$$

14. Все утверждения теоремы 13 останутся в силе и для биортогональных систем (1.23) и (1.24), если только на параметры μ и ν взамен (1.26) накладывать ограничения

$$1/2 < \mu < 5/2, \quad -1/2 < \nu - \mu < 1/2. \quad (1.34)$$

§ 2. Особая краевая задача

2.1. (а) Пусть дана совокупность чисел $\{\gamma_k\}_0^3$, подчиненных условиям $0 < \gamma_k \leq 1$ ($0 \leq k < 3$) и $\sum_{k=0}^3 \gamma_k = 3$. Введем в рассмотрение (как и выше) следующие интегродифференциальные операторы:

$$\begin{aligned} L_0 y(x) &= D^{-(1-\gamma_0)} y(x), \quad L_1 y(x) = D^{-(1-\gamma_1)} D^{\gamma_0} y(x), \\ L_2 y(x) &= D^{-(1-\gamma_2)} D^{\gamma_1} D^{\gamma_0} y(x), \\ Ly(x) &= D^{-(1-\gamma_3)} D^{\gamma_2} D^{\gamma_1} D^{\gamma_0} y(x). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Предполагая, что $1/2 < \mu < 5/2$, условимся полагать

$$\begin{aligned} \mu &= \mu_0 = \gamma_0, \quad \text{при } \mu \in \Delta_0 = (1/2, 1], \\ \mu &= \mu_1 = \gamma_0 + \gamma_1, \quad \text{при } \mu \in \Delta_1 = (1, 2], \\ \mu &= \mu_2 = \gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2, \quad \text{при } \mu \in \Delta_2 = (2, 5/2). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Ввиду принятых нами обозначений (2.1) и (2.2) предложение 9° можно сформулировать в виде такой теоремы.

Теорема 2.1. Для значений параметра $\mu \in \Delta_r$ ($0 \leq r \leq 2$) функция

$$y_\mu(x; \lambda) = E_{1/2}(-\lambda x^2; \mu) x^{\mu-1} \quad (2.3)$$

в классе $L_2(0, \sigma)$ является единственным решением следующей задачи типа Коши:

$$\begin{aligned} Ly + \lambda y &= 0 \\ L_k y(x)|_{x=0} &= \delta_{k,r} = \begin{cases} 1, & k=r \\ 0, & k \neq r \end{cases} \quad (0 \leq k \leq 2). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Полагая, что параметры $\{\gamma_k\}_0^3$ те же, что и выше, перейдем к постановке двух краевых задач.

(I) Пусть $\mu \in \Delta_r$ и параметр ν удовлетворяет условию

$$\max(\mu - 3/2, 0) < \nu < \mu - 1/2 \quad (0 \leq \nu < 2). \quad (2.5)$$

На отрезке $[0, \sigma]$ определить решения задачи типа Коши (2.4) из класса $L_2(0, \sigma)$, которые на конце $x = \sigma$ удовлетворяют краевому условию

$$D^{\mu-\nu-1} y(x)|_{x=\sigma} = 0. \quad (2.6)$$

(II) Пусть параметр ν удовлетворяет условию

$$\mu - \frac{1}{2} < \nu < \min\left(\mu + \frac{1}{2}, 2\right), \quad (\mu \in \Delta_r, 0 \leq \nu < 2). \quad (2.7)$$

В классе $L_2(0, \sigma)$ определить решения задачи типа Коши (2.4), удовлетворяющие условиям

$$D^{1-\nu} D^\mu y(x)|_{x=\sigma} = 0. \quad (2.8)$$

Каждое нетривиальное решение этих задач назовем собственной функцией, а соответствующее значение параметра λ — собственным значением.

2.1 (6) Наряду с операторами L_k ($0 \leq k \leq 3$) введем в рассмотрение аналогичные операторы дробного интегриродифференцирования с концом в точке $x = \sigma$. Положим

$$\begin{aligned} \tilde{L}_0 z(x) &= D_\sigma^{-(1-\gamma_2)} z(x), \quad \tilde{L}_1 z(x) = D_\sigma^{-(1-\gamma_2)} D_\sigma^{\gamma_2} z(x), \\ \tilde{L}_2 z(x) &= D_\sigma^{-(1-\gamma_1)} D_\sigma^{\gamma_1} D_\sigma^{\gamma_2} z(x), \\ \tilde{L} z(x) &= D_\sigma^{-(1-\gamma_0)} D_\sigma^{\gamma_0} D_\sigma^{\gamma_2} z(x). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Предполагая, что $\sum_{i=0}^3 \gamma_i = 3$, $1/2 < \tilde{\mu} < 5/2$, условимся считать

$$\begin{aligned} \tilde{\mu} &= \tilde{\mu}_0 = \gamma_2, & \text{при } \tilde{\mu} \in \Delta_0 = (1/2, 1], \\ \tilde{\mu} &= \tilde{\mu}_1 = \gamma_2 + \gamma_3, & \text{при } \tilde{\mu} \in \Delta_1 = (1, 2], \\ \tilde{\mu} &= \tilde{\mu}_2 = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 & \text{при } \tilde{\mu} \in \Delta_2 = (2, 5/2]. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Теперь рассмотрим следующую задачу Коши, в определенном смысле ассоциированную с задачей (2.4).

Определить решение $z = z(x, \lambda)$ уравнения

$$\tilde{L} z + \lambda z = 0,$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$\tilde{L}_k z(x)|_{x=\sigma} = \delta_{k,r} \quad (0 \leq k, r \leq 2).$$

На основании предложения 9 (§ 1) и теоремы 2.1, путем замены переменной $x = \sigma - x'$, приходим к следующей теореме.

Теорема 2.2. Для значений параметра $\tilde{\mu} \in \Delta_r$ ($0 \leq r \leq 2$) функция

$$z_{\tilde{\mu}}(x; \lambda) = E_{1/2}(-\lambda(\sigma - x)^2; \tilde{\mu}) (\sigma - x)^{\tilde{\mu}-1}$$

в классе $L_2(0, \sigma)$ является единственным решением следующей задачи типа Коши:

$$Lz + \lambda z = 0,$$

$$\tilde{L}_k z(x)|_{x=\sigma} = \delta_{k,r} \quad (0 \leq k \leq 2). \quad (2.11)$$

Естественно в данном случае поставить краевые задачи, аналогичные задачам (I) и (II).

(I*) Пусть $\bar{\mu} \in \Delta_r$ и параметр ν удовлетворяет условию

$$\max(\bar{\mu} - 3/2, 0) < \nu < \bar{\mu} - 1/2 \quad (0 \leq \nu < 2). \quad (2.5')$$

В классе $L_2(0, \sigma)$ определить решения задачи типа Коши (2.11), удовлетворяющие условию

$$D_{\sigma}^{\bar{\mu}-\nu-1} z(x)|_{x=0} = 0. \quad (2.6')$$

(II*) Пусть параметр ν удовлетворяет условию

$$\bar{\mu} - 1/2 < \nu < \min(\bar{\mu} + 1/2, 2) \quad (\bar{\mu} \in \Delta_r, 0 \leq r \leq 2). \quad (2.7')$$

В классе $L_2(0, \sigma)$ определить решения задачи типа Коши (2.11), удовлетворяющие условию

$$D_{\sigma}^{1-\nu} D_{\sigma}^{\bar{\mu}} z(x)|_{x=0} = 0. \quad (2.8')$$

2.2. Теперь перейдем к изучению поведения собственных функций и собственных значений наших краевых задач (I), (II) и (I*), (II*).

Теорема 2.3. 1) Множество собственных значений задач (I) и (I*) совпадает с последовательностью чисел $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, т. е. с множеством всех корней функции $G_{\sigma}(z; \nu) = E_{1/2}(-\sigma^2 z; 1 + \nu)$, причем все они простые.

2) Множество собственных значений задач (II) и (II*) совпадает с множеством всех корней $\{\lambda_k\}_{k=0}^{\infty}$ ($\lambda_0 = 0$), т. е. с множеством всех корней функции $zG_{\sigma}(z; \nu) = zE_{1/2}(-\sigma^2 z; 1 + \nu)$.

Доказательство. 1) Согласно теореме 2.1 для любого значения λ задача типа Коши (2.4) в классе $L_2(0, \sigma)$ имеет единственное решение $y_{\mu}(x; \lambda)$. Но из формулы (1.13) следует тождество

$$D^{\bar{\mu}-\nu-1} y_{\mu}(x; \lambda)|_{x=\sigma} = y_{\nu+1}(x; \lambda)|_{x=\sigma} = E_{1/2}(-\sigma^2; 1 + \nu)\sigma^{\nu}.$$

Поэтому решение задачи (2.4) удовлетворяет условию (2.6) т. е. задача (I) имеет решение лишь для значений $\lambda = \lambda_k$ ($k \geq 1$), являющихся нулями целой функции $G_{\sigma}(z; \nu)$.

Для задачи (I*) аналогично приходим к тому же заключению.

2) В этом случае функции $y_{\mu}(x; \lambda)$ должны удовлетворять условию (2.8). Поэтому, пользуясь формулами (1.13), будем иметь

$$\begin{aligned} D^{1-\nu} D^{\bar{\mu}} y_{\mu}(x; \lambda)|_{x=\sigma} &= D^{1-\nu} y_0(x; \lambda)|_{x=\sigma} = \\ &= -\lambda D^{1-\nu} y_1(x; \lambda)|_{x=\sigma} = -\lambda E_{1/2}(-\lambda\sigma^2; 1 + \nu)\sigma^{\nu} = 0. \end{aligned}$$

А это означает, что собственные числа краевой задачи (II) совпадают с множеством всех нулей целой функции $zG_{\sigma}(z; \nu)$, т. е. с числами $\{\lambda_k\}_{k=0}^{\infty}$ ($\lambda_0 = 0$). Для задачи (II*) аналогично приходим к тому же факту.

Теорема 2.4. 1) Краевые задачи (I) и (I*) имеют, соответственно, следующие системы собственных функций:

$$\{E_{1/2}(-\lambda_k x^2; \mu) x^{\bar{\mu}-1}\}_{k=1}^{\infty} \equiv \{y_{\mu}(x; \lambda_k)\}_{k=1}^{\infty}, \quad (2.12)$$

$$\{E_{1/2}(-\lambda_k(\sigma-x)^2; \bar{\mu})(\sigma-x)^{\bar{\mu}-1}\}_{k=1}^{\bar{\mu}-1} \equiv \{z_{\bar{\mu}}(x; \lambda_k)\}_{k=1}^{\bar{\mu}}. \quad (2.13)$$

2) Краевые задачи (II) и (II*) имеют, соответственно, следующие системы собственных функций

$$\left\{ \frac{x^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)}, \{y_{\mu}(x; \lambda_k)\}_{k=1}^{\bar{\mu}-1} \right\} \equiv \{y_{\mu}(x; \lambda_k)\}_{k=0}^{\bar{\mu}}, \quad (2.14)$$

$$\{(\sigma-x)^{\bar{\mu}-1}/\Gamma(\bar{\mu}), \{z_{\bar{\mu}}(x; \lambda_k)\}_{k=1}^{\bar{\mu}-1}\} \equiv \{z_{\bar{\mu}}(x; \lambda_k)\}_{k=0}^{\bar{\mu}}. \quad (2.15)$$

Доказательства непосредственно следуют из теорем 2.1—2.3, если учесть, что все собственные числа $\{\lambda_k\}$ — суть простые корни их характеристических функций.

2.3. Введем в рассмотрение две последовательности функций $\{Z_{\bar{\mu}}(x; \lambda_k)\}_{k=1}^{\bar{\mu}-1}$ и $\{Z_{\mu}^*(x; \lambda_k)\}_{k=0}^{\bar{\mu}-1}$ посредством формул

$$\begin{aligned} Z_{\bar{\mu}}(x; \lambda_k) &= -\frac{2\lambda_k\sigma^{-1}}{G_{\sigma}(\lambda_k; \nu-1)} z_{\bar{\mu}}(x; \lambda_k), \quad k=1, 2, \dots, \\ Z_{\bar{\mu}}^*(x; \lambda_0) &= \Gamma(1+\nu)\sigma^{-\nu}/\Gamma(\bar{\mu})(\sigma-x)^{\bar{\mu}-1}, \\ Z_{\bar{\mu}}^*(x; \lambda_k) &= -\frac{1}{\lambda_k} Z_{\bar{\mu}}(x; \lambda_k), \quad k=1, 2, \dots. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Легко видеть, что эти системы совпадают с биортогональными системами (1.23) и (1.24) и теорем 12—14 (§ 1).

Систему $\{Z_{\bar{\mu}}(x; \lambda_k)\}$ (или $\{Z_{\bar{\mu}}^*(x; \lambda_k)\}_{k=0}^{\bar{\mu}-1}$) снова будем называть системой собственных функций задачи (II) (или задачи (II*)).

Теперь теорема 12 (§ 1) переформулируется так.

Теорема 2.5. Системы собственных функций задач (I) и (I*)

$$\{y_{\mu}(x; \lambda_k)\}_{k=1}^{\bar{\mu}-1}, \{Z_{\bar{\mu}}(x; \lambda_k)\}_{k=1}^{\bar{\mu}-1} \quad (2.18)$$

при условии $\bar{\mu} = 3 + \nu - \mu$ ($0 \leq \nu \leq 2$), а также задач (II) и (II*)

$$\{y_{\mu}(x; \lambda_k)\}_{k=0}^{\bar{\mu}-1}, \{Z_{\bar{\mu}}^*(x; \lambda_k)\}_{k=0}^{\bar{\mu}-1}, \quad (2.19)$$

при условии $\bar{\mu} = 1 + \nu - \mu$ биортогональны на $(0, \sigma)$, т. е.

$$\int_0^{\sigma} y_{\mu}(x; \lambda_k) Z_{\bar{\mu}}(x; \lambda_n) dx = \begin{cases} \delta_{k,n}; & k, n=1, 2, \dots \\ \delta_{k,n}; & k, n=0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (2.20)$$

Теорема 2.6. Пусть $\{y_{\mu}(x; \lambda_k)\}_{k=1}^{\bar{\mu}}$ и $\{Z_{\bar{\mu}}(x; \lambda_k)\}_{k=1}^{\bar{\mu}}$ ($\mu \in \Delta_r$, $\bar{\mu} = 3 + \nu - \mu$) — суть, соответственно, системы собственных функций задач (I) и (I*), и пусть параметр ν удовлетворяет условию

$$\max(\mu - 3/2, 0) < \nu < \mu - 1/2 \quad (0 \leq \nu < 2). \quad (2.21)$$

Тогда

1) любая функция $\varphi(x) \in L_2(0, \sigma)$ разлагается в ряд

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k y_{\mu}(x; \lambda_k), \quad (2.22)$$

сходящийся в метрике $L_2(0, \sigma)$. При этом коэффициенты ряда (2.22) определяются по формулам

$$a_k = \int_0^{\sigma} \varphi(x) Z_{\mu}(x, \lambda_k) dx, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (2.23)$$

и имеет место двойная оценка

$$\|\varphi\|_{L_2(0, \sigma)} \asymp \|a_k\|_1 \|Z_{\mu}\|_{2(1-\mu)}^{-1}, \quad (2.24)$$

2) в метрике $L_2(0, \sigma)$ $\varphi(x)$ разлагается в ряд

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k Z_{\mu}(x, \lambda_k), \quad (2.25)$$

где

$$b_k = \int_0^{\sigma} \varphi(x) y_{\mu}(x, \lambda_k) dx, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.26)$$

и, кроме того

$$\|\varphi\|_{L_2(0, \sigma)} \asymp \|b_k\|_1 \|Z_{\mu}\|_{2(1-\mu)}. \quad (2.27)$$

Доказательство. 1) Теорема 2.3 показывает, что собственные значения краевой задачи (I) — суть корни целой функции $G_{\nu}(z; \nu)$, и если $\{\lambda_k\}_1^{\infty}$ — множество собственных значений задачи (1) то по теореме 2.4, семейством ее собственных функций будет $\{y_{\mu}(x, \lambda_k)\}_1^{\infty}$. Но согласно предложению 13 (§ 1), при условии (2.21) справедливы разложения (2.22), а также формулы (2.23) и оценка (2.24).

2) Доказывается аналогично.

Теорема 2.7. Все утверждения теоремы 2.6 останутся в силе и для систем собственных функций (II) и (II*), если только на параметры μ и ν взамен (2.21) накладывать ограничения

$$\mu - \frac{1}{2} < \nu < \min\left(\mu + \frac{1}{2}, 2\right), \quad (2.28)$$

$$(0 \leq \nu < 2, \mu = 1 + \nu - \mu).$$

По поводу теоремы 2.6 отметим, что разложение (2.25) можно записать также как разложение по системе (2.13) — настоящих собственных функций задачи (I*), изменив лишь коэффициенты $\{b_k\}_1^{\infty}$. Сказанное относится также к теореме 2.7.

2.4. В некоторых случаях поставленные нами краевые задачи могут быть записаны в более явной форме. Эти формы приводят нас к специаль-

ным системам собственных функций, в том числе и к $\sin$ - и $\cos$ -системам Фурье.

(а) Лемма 2.1. Пусть существует $y''(x)$, $x \in [0, \sigma]$ и параметры $\{\gamma_j\}_0^3$ удовлетворяют условиям

$$0 < \gamma_j < 1, \quad \sum_0^3 \gamma_j = 3. \quad (2.29)$$

Тогда справедливы тождества

$$\begin{aligned} Ly(x) &\equiv D^{-(1-\gamma_0)} D^{\gamma_1} D^{\gamma_2} D^{\gamma_3} y(x) = \\ &= y'' - m_0 \frac{x^{\gamma_0-3}}{\Gamma(\gamma_0-2)} - m_1 \frac{x^{-\gamma_2-\gamma_3}}{\Gamma(1-\gamma_2-\gamma_3)} - m_2 \frac{x^{-\gamma_3}}{\Gamma(1-\gamma_3)}, \end{aligned} \quad (2.30)$$

где постоянные m_j ($0 \leq j \leq 2$) определяются из формул

$$\begin{aligned} m_0 &= D^{-(1-\gamma_0)} y(x)|_{x=0} \equiv L_0 y(x)|_{x=0}, \\ m_1 &= D^{-(1-\gamma_1)} D^{\gamma_0} y(x)|_{x=0} \equiv L_1 y(x)|_{x=0}, \\ m_2 &= D^{-(1-\gamma_2)} D^{\gamma_1} D^{\gamma_0} y(x)|_{x=0} \equiv L_2 y(x)|_{x=0}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Доказательство. Согласно формуле (1.9), положив $\alpha = 1 - \gamma_3$, $= \gamma_2$ и $f(x) = D^{\gamma_1} D^{\gamma_0} y(x)$, будем иметь

$$Ly = D^{\gamma_2+\gamma_3-1} D^{\gamma_1} D^{\gamma_0} y(x) - [D^{-(1-\gamma_2)} D^{\gamma_1} D^{\gamma_0}]_{x=0} \frac{x^{-\gamma_3}}{\Gamma(1-\gamma_3)}.$$

Положив здесь $m_2 = D^{-(1-\gamma_2)} D^{\gamma_1} D^{\gamma_0} y(x)|_{x=0}$ и два раза применив формулу (1.10), в силу условий (2.29) и наших обозначений (2.31), получим

$$\begin{aligned} Ly &= \frac{d}{dx} \left\{ D^{1-\gamma_1} D^{\gamma_0} y(x) - [D^{-(1-\gamma_1)} D^{\gamma_0} y(x)]_{x=0} \times \right. \\ &\quad \times \frac{x^{1-\gamma_2-\gamma_3}}{\Gamma(2-\gamma_2-\gamma_3)} - m_2 \frac{x^{-\gamma_3}}{\Gamma(1-\gamma_3)} = \\ &= \frac{d}{dx} \left\{ \frac{d}{dx} \left[y(x) - m_0 \frac{x^{\gamma_0-1}}{\Gamma(\gamma_0)} - m_1 \frac{x^{-\gamma_2-\gamma_3}}{\Gamma(1-\gamma_2-\gamma_3)} - m_0 \frac{x^{-\gamma_3}}{\Gamma(1-\gamma_3)} \right] \right\}, \end{aligned}$$

откуда и следует формула (2.30).

Аналогично доказывается

Лемма 2.2. Пусть $\{\gamma_j\}_0^3$ удовлетворяют условиям (2.29). Тогда справедливы тождества

$$\begin{aligned} \tilde{L}z(x) &\equiv D^{-(1-\gamma_0)} D^{\gamma_1} D^{\gamma_2} D^{\gamma_3} z(x) = z'' - m_0 \frac{(\sigma-x)^{\gamma_0-3}}{\Gamma(\gamma_0-2)} - \\ &- \tilde{m}_1 \frac{(\sigma-x)^{-\gamma_2-\gamma_3}}{\Gamma(1-\gamma_2-\gamma_3)} - \tilde{m}_2 \frac{(\sigma-x)^{-\gamma_3}}{\Gamma(1-\gamma_3)}, \end{aligned} \quad (2.32)$$

где постоянные $\tilde{m}_j$ ($0 \leq j \leq 2$) определяются из формул

$$\begin{aligned}
\bar{m}_0 &= D_\sigma^{-(1-\gamma_2)} z(x)|_{x=\sigma} \equiv \bar{L}_0 z(x)|_{x=\sigma}, \\
\bar{m}_1 &= D_\sigma^{-(1-\gamma_2)} D_\sigma^{\gamma_2} z(x)|_{x=\sigma} \equiv \bar{L}_1 z(x)|_{x=\sigma}, \\
\bar{m}_2 &= D_\sigma^{-(1-\gamma_1)} D_\sigma^{\gamma_1} D_\sigma^{\gamma_2} z(x)|_{x=\sigma} \equiv \bar{L}_2 z(x)|_{x=\sigma}.
\end{aligned} \quad (2.33)$$

Для удобства обозначим

$$q_0(x) = \frac{x^{\gamma_0-2}}{\Gamma(\gamma_0-2)}, \quad q_1(x) = \frac{x^{-\gamma_2-\gamma_3}}{\Gamma(1-\gamma_2-\gamma_3)}, \quad q_2(x) = \frac{x^{-\gamma_2}}{\Gamma(1-\gamma_2)} \quad (2.34)$$

и соответственно

$$\bar{q}_0(x) = \frac{(\sigma-x)^{\gamma_3-2}}{\Gamma(\gamma_3-2)}, \quad \bar{q}_1(x) = \frac{(\sigma-x)^{-\gamma_0-\gamma_1}}{\Gamma(1-\gamma_0-\gamma_1)}, \quad \bar{q}_2(x) = \frac{(\sigma-x)^{-\gamma_0}}{\Gamma(1-\gamma_0)}. \quad (2.35)$$

На основании этих лемм, легко видеть, что теоремы 2.1 и 2.2 принимают такой вид:

Теорема 2.1'. Для любого r ($0 \leq r \leq 2$) задачи типа Коши

$$\begin{aligned}
y'' - q_r(x) + \lambda y &= 0, \\
L_k y(x)|_{x=0} &= \delta_{k,r},
\end{aligned} \quad (2.36)$$

в классе $L_2(0, \sigma)$ имеет единственное решение

$$y_\mu(x, \lambda) = E_{1/2}(-\lambda x^2; \mu) x^{\mu-1},$$

где $\mu = \mu_r \in \Delta_r$.

Теорема 2.2'. Для любого r ($0 \leq r \leq 2$) задача типа Коши

$$\begin{aligned}
z'' - \bar{q}_r(x) + \lambda z &= 0, \\
\bar{L}_k z(x)|_{x=\sigma} &= \delta_{k,r} \quad (0 \leq k \leq 2),
\end{aligned} \quad (2.37)$$

в классе $L_2(0, \sigma)$ имеет единственное решение

$$z_\mu(x; \lambda) = E_{1/2}(-\lambda(\sigma-x)^2; \bar{\mu}) (\sigma-x)^{\bar{\mu}-1},$$

где

$$\bar{\mu} = \bar{\mu}_r \in \bar{\Delta}_r.$$

При этом, как и в теоремах 2.1 и 2.2, параметр μ_r и интервал Δ_r определяются по формулам (2.2).

Теперь краевые задачи (I) и (I*) (или (II) и (II*)) примут следующие простые формы:

$$\begin{aligned}
(I_1) \quad & y'' - q_r(x) + \lambda y = 0, \\
& L_k y(x)|_{x=0} = \delta_{k,r} \quad (0 \leq k \leq 2),
\end{aligned} \quad (2.38)$$

$$\begin{aligned}
(I_1) \quad & D^{\mu-\gamma-1} y(x)|_{x=\sigma} = 0, \\
& z'' - \bar{q}_r(x) + \lambda z = 0, \\
& \bar{L}_k z(x)|_{x=\sigma} = \delta_{k,r} \quad (0 \leq k \leq 2), \\
& D_\sigma^{\bar{\mu}-\gamma-1} z(x)|_{x=0} = 0,
\end{aligned} \quad (2.39)$$

$$\begin{aligned}
 (\text{II}_1) \quad & y'' - q_r(x) + \lambda y = 0, \\
 & L_k y(x)|_{x=0} = \delta_k, \quad r \quad (0 \leq k \leq 2), \\
 & D_\sigma^{1-\nu} D_\sigma^\mu y(x)|_{x=\sigma} = 0,
 \end{aligned} \tag{2.40}$$

$$\begin{aligned}
 (\text{II}_1^*) \quad & z'' - \tilde{q}_r(x) + \lambda z = 0, \\
 & \tilde{L}_k z(x)|_{x=\sigma} = \delta_k, \quad r \quad (0 \leq k \leq 2), \\
 & D_\sigma^{1-\nu} D_\sigma^\mu z(x)|_{x=\sigma} = 0.
 \end{aligned} \tag{2.41}$$

Поэтому справедливы

Теорема 2.6'. Пусть $\mu \in \Delta_r$ ($0 \leq r \leq 2$), $\tilde{\mu} = 3 + \nu - \mu$ и параметр ν удовлетворяет условию (2.21). Тогда для краевых задач (I_1) и (I_1^*) справедливы все утверждения теорем 2.5 и 2.6.

Теорема 2.7'. Пусть $\tilde{\mu} \in \Delta_r$ ($0 \leq r \leq 2$), $\mu^* = 1 + \nu - \mu$ и параметр ν удовлетворяет условию (2.28). Тогда для краевых задач (II_1) и (II_1^*) справедливы все утверждения теорем 2.5 и 2.7.

(6) Приведем два простых частных случая этих задач, которые близки к классическим.

1) В задачах (I_1) и (I_1^*) , подставим, соответственно, $r = 1$, $r = 2$ и $\gamma_0 = \gamma_1 = 1$, $\gamma_2 + \gamma_3 = 1$.

Ввиду того, что $\mu = 2$, $q_1(x) = 0$, $L_0 y(x)|_{x=0} = y(0)$, $L_1 y(x)|_{x=0} = y'(0)$ из (2.38) получим

$$\begin{aligned}
 (\text{I}_1) \quad & y'' + \lambda y = 0, \\
 & y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \\
 & D^{1-\nu} y(x)|_{x=\sigma} = 0 \quad (1/2 < \nu < 3/2),
 \end{aligned} \tag{2.42}$$

Системой собственных функций задачи (2.42) будет

$$\left\{ \frac{\sin \sqrt{\lambda_k} x}{\sqrt{\lambda_k}} \right\}_{k=1}^\infty, \tag{2.43}$$

где $\{\lambda_k\}_1^\infty$ — корни функции $E_{1/2}(-\sigma^2 z; 1 + \nu)$.

В этом случае задача (I_1^*) принимает следующий вид:

$$z'' - \frac{(\sigma - x)^{\nu-2}}{\Gamma(\nu-1)} + \lambda z = 0, \tag{2.44}$$

$$z(0) = 0, \quad \tilde{L}_k z(x)|_{x=\sigma} = \delta_{1,k} \quad (0 \leq k \leq 2).$$

Система собственных функций для задачи (2.44) запишется в форме

$$\{Z_\mu(x; \lambda_k)\} = \left\{ -\frac{2 \sigma^{-\nu} \lambda_k (\sigma - x)^{\nu-1}}{E_{1/2}(-\sigma^2 \lambda_k; \nu)} E_{1/2}(-\lambda_k (\sigma - x)^2; 1 + \nu) \right\}_{k=1}^\infty. \tag{2.45}$$

Таким образом, системы (2.43) и (2.45) биортогональны на $(0, \sigma)$ и для них справедлива теорема 2.6', т. е. они образуют базис Рисса в $L_2(0, \sigma)$.

Наконец, для значения $\nu = 1$ легко видеть, что обе задачи (2.42) и (2.41) сводятся к известной краевой задаче, порождающей ортогональную на $(0, \sigma)$ систему $\left\{ \sqrt{\frac{2}{\sigma}} \sin \frac{\pi}{\sigma} kx \right\}_1^\infty$.

2) Если в задачах (II_1) и (II_1') подставим $r = 0$, то аналогичным образом получим следующие биртогональные на $(0, \sigma)$ системы:

$$\left\{ \cos \lambda_k x \right\}_0^\infty, \left\{ \nu^{\sigma-\nu} (\sigma-x)^{\nu-1}, \left\{ \frac{2\sigma^{-\nu} (\sigma-x)^{\nu-1}}{E_{1/2}(-\sigma^2 \lambda_k; \nu)} E_{1/2}(-\lambda_k (\sigma-x)^2; \nu) \right\}_1^\infty \right\}.$$

В случае же $\nu = 1$, собственные функции наших краевых задач порождают ортогональную на $(0, \sigma)$ систему $\left\{ \frac{1}{\sqrt{\sigma}}, \left\{ \sqrt{\frac{2}{\sigma}} \cos \frac{\pi}{\sigma} kx \right\}_1^\infty \right\}$.

Институт математики АН Армянской ССР,
Ереванский государственный университет

Поступила 18.XI.1987

Մ. Մ. ԶՐԲԱՇԻԱՆ, Ս. Գ. ՌԱՖԱԵԼՅԱՆ. Ֆուրյեի տեսքի համակարգեր ծնող հատուկ եզրային խնդիրներ (ամփոփում)

Հնդինականների [1] աշխատանքում, մասնավորաբար կառուցվել են հատուկ տեսքի բիր-թոգոնալ համակարգեր, որոնք $L_2(0, \sigma)$ դասում կազմում են Ռիսի բազիսներ: Այդ համակարգերն ունեն հետևյալ տեսքը

$$\{E_{1/2}(-\lambda_k x^2; \mu) x^{\mu-1}\},$$

որտեղ $\{\lambda_k\}$ -ն ամբողջ ֆունկցիայի զրոների հաջորդականությունն է:

Ներկա աշխատանքում ապացուցվում է, որ այդ բազիսային համակարգերը միաժամանակ հանդիսանում են մոդուլային կոտորակային կարգի ինտեգրալֆերենցիալ օպերատորի համար-հատուկ տեսքի եզրային խնդիրների սեփական ֆունկցիաների համակարգեր:

M. M. DJRBASHIAN, S. R. RAFAELIAN. *Special boundary problems generating Fourier type systems (summary)*

In the earlier paper of the authors special biorthogonal systems have been constructed which form a Riss basis in $L_2(0, \sigma)$. They have the form

$$\{E_{1/2}(-\lambda_k x^2; \mu) x^{\mu-1}\}$$

where $\{\lambda_k\}$ is the sequence of zeros of an entire function.

Now we show that these functions are eigenfunctions of special boundary problems for integro-differential operators of fractional order.

ЛИТЕРАТУРА

1. M. M. Djrbashian, S. G. Raphaelian. Interpolation Theorems and Expansions with Respect to Fourier type Systems, Journal of Approximation Theory, vol. 50, № 4, 1987, 297—325.
2. М. М. Джрбашян, С. Г. Рафаелян. Интерполяционные теоремы и разложения по системам типа Фурье, ДАН СССР, 285, № 4, 1985.
3. М. М. Джрбашян. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, М., «Наука», 1966.
4. М. М. Джрбашян, А. Б. Нерсисян. Дробные производные и задача Коши для дифференциальных уравнений дробного порядка, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», 3, № 1, 1968, 3—29.
5. М. М. Джрбашян. Интерполяционные и спектральные разложения, ассоциированные с дифференциальными операторами дробного порядка, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», XIX, № 2, 1984, 81—181.