ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XXIII, № 1, 1988 Математика

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 519.218.5

Р. Г. АРАМЯН

ФЛАГ-ПРЕДСТАВЛЕНИЯ И МЕРЫ КРИВИЗНЫ ВЫПУКЛЫХ ТЕЛ

В работе Р. В. Амбарцумяна [1] было указано на существование т. н. $\sin^2$-представлений функций ширины выпуклых тел в R^3. Пусть $H(\xi)$—ширина некоторого выпуклого тела K в направлении $\xi\in S^2$. Существует представление

$$H(\xi)=\int\limits_{S^2\times S^1}\sin^2\alpha(\xi,\,\Omega,\,\Phi)\,m(d\Omega,\,d\Phi)\,. \tag{1}$$

Здесь S^i — единичная сфера в R^i, $i=1,\,2$, $\Omega\in S^2$, $\Phi\in S^1$, m — некоторая мера на произведении $S^2\times S^1$. Угол α определяется с помощью следующего геометрического построения. Каждой $(\Omega,\,\Phi)\in S^2\times S^1$ соответствует проходящая через O плоскость $e(\Omega,\,\Phi)$: последняя содержит Ω и повернута вокруг Ω на угол Φ. Через e_ξ обозначим плоскость, нормальную к $\xi\in S^2$. По определению $\alpha(\xi,\,\Omega,\,\Phi)$ — угол между Ω и следом e_ξ на $e(\Omega,\,\Phi)$. Если K — выпуклый многогранник, то (1) можно полагать

$$m(d\Omega,\,d\Phi)=(2\pi)^{-1}\sum_{l_i\in K}|l_i|\,\delta_{\Omega_i}(d\Omega)\times I_{A_i}(d\Phi)=m_K. \tag{2}$$

Здесь l_i — ребра K, $\Omega_i\in S^2$ — направление l_i, A_i — внешний двугранный угол l_i, сумма берется по всем ребрам. Эта мера называется „стандартной мерой“. Меры в (1) рассмотрим в дуальных относительно $(\Omega,\,\Phi)$ координатах $(\omega,\,\varphi)\in S^2\times S^1$, где ω — нормаль $e(\Omega,\,\Phi)$, φ — направление Ω на $e(\Omega,\,\Phi)$. Пусть m представляет собой слабый предел стандартных мер многогранников, сходящихся (по Хаусдорфу) к гладкому выпуклому телу K. В таком случае при подстановке m в (1) получаем функцию ширины тела K. В настоящей работе доказано, что мера $m_\varphi(\cdot)=m(\cdot,\,S^1)$ (проекция m по φ) совпадает с мерой кривизны тела K. Аналогичное утверждение доказано в случае т. н. стохастической аппроксимации гладкого выпуклого тела. Отметим, что данное тело K может допускать представление (1) с различными мерами m.

1.° Сначала напомним определение меры кривизны данного выпуклого тела $K\subset R^3$ (см. [2]). Обозначим через

$$A_\varepsilon(K,\,Q)=\{x\in R^3,\ p(K,\,x)\in Q,\ \|x-p(K,\,x)\|<\varepsilon\},$$

где $Q \subset R^3$ — борелевское множество, $\varepsilon > 0$, $p(K, x)$ — проекция x на K. Тогда имеет место

$$V(A_\varepsilon(K, Q)) = \sum_{j=0}^{3} \varepsilon^{3-j} q_{3-j} \Psi_j(K, Q),$$

где V — мера Лебега в R^3, q_j — j-мерный объем единичного шара в R^j. Согласно [2] счетно-аддитивная функция относительно Q, $\Psi_j(K, Q)$, $j = \overline{0, 3}$ называется мерой кривизны тела K. Мера кривизны имеет следующие свойства [2].

а) $\Psi_j(K, Q)$, $j = 0, 1, 2$ сконцентрирована на ∂K. Следовательно для гладких K определена мера $\Psi_j(K, \Gamma^{-1}(\cdot))$, $j = 0, 1, 2$ на S^2, где Γ^{-1} — отображение, обратное к сферическому отображению ∂K на S^2.

б) Если $\lim\limits_{n\to\infty} K_n = K$ (предел по Хаусдорфу), где K_n и K — выпуклые тела, то $\Psi_j(K_n, \cdot) \Rightarrow \Psi_j(K, \cdot)$ (слабая сходимость мер).

в) Если K — выпуклый многогранник, то

$$\Psi_1(K, Q) = (2\pi)^{-1} \sum_{l_i \subset K} |l_i \cap Q| |\alpha_i|, \tag{3}$$

где l_i — ребра K, $|\alpha_i|$ — величина внешнего двугранного угла ребра l_i

Теорема 1. *Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} K_n = K$ (по Хаусдорфу), где K_n — выпуклые многогранники, K — гладкое выпуклое тело. Если m_{K_n} (см (2)) слабо сходится к мере m ($m_{K_n} \Rightarrow m$), то*

$$m_\varphi(B) = \Psi_1(K, \Gamma^{-1} B))), \tag{4}$$

где $B \subset S^2$ — борелевское множество, $m_\varphi(B) = m(B, S^1)$ — проекция m по φ.

Сначала докажем одну лемму. Пусть D — единичный шар с центром O в R^3, $K - D = \{z \in R^3 : z + D \subset K\}$ — внутреннее параллельное множество тела K.

Лемма 1. *Пусть K — гладкое выпуклое тело и $P_0 \in K^0$ (внутренность K). Тогда для любого $\delta > 0$ существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любой $P \in (K + \varepsilon D) \setminus (K - \varepsilon D)$ и для любой, проходящей через P и не пересекающей $K - \varepsilon D$ плоскости e, имеет место*

$$d_0(\vec{n}(e), \vec{n}(x)) < \delta, \tag{5}$$

где $x = [P_0 P) \cap \partial K$ ($[P_0 P)$ — луч, исходящий из P_0), $\vec{n}(e)$ — нормаль к e, $\vec{n}(x)$ — нормаль к ∂K в точке x, d_0 — расстояние между соответствующими точками на S^2.

Доказательство. Допустим противное, т. е. существует $\delta_0 > 0$ и последовательность $(P_m, \vec{n}(e_m))$, где $P_m \in e_m$ $P_m \in \left(K + \frac{1}{m} D\right) \setminus \left(K - \frac{1}{m} D\right)$ и $e_m \cap \left(K - \frac{1}{m} D\right)$, для которой $d_0(\vec{n}(e_m), \vec{n}(x_m)) > \delta_0$. Здесь $x_m = [P_0, P_m) \cap \partial K$. Так как соответствующие пространства компактны, то из $(\mathrm{P}_m, \vec{n}(e_m))$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. Ясно, что пределом этой последовательности будет $(\mathrm{P}, \vec{n}(e))$, где $\mathrm{P} \in \partial K$, а $\vec{n}(e)$ — нормаль ∂K в точке P. d_0 непрерывна, следовательно $0 = d_0(\vec{n}(e), \vec{n}(e)) > \delta_0 > 0$. Полученное противоречие доказывает лемму 1.

Доказательство теоремы 1. Утверждение (4) равносильно тому, что для всех непрерывных и ограниченных функций $f(\omega)$ на R^2 имеет место

$$\int_{S^2} f(\omega)\, m_\varphi(d\omega) = \int_{S^2} f(\omega)\, \Psi_1(K, \Gamma^{-1}(d\omega)). \tag{6}$$

Из $m_{K_n} \Rightarrow m$ следует, что

$$(m_{K_n})_\varphi \Rightarrow m_\varphi. \tag{7}$$

Из (2) получаем, что m_{K_n} в координатах (ω, φ) имеет вид

$$m_{K_n} = (2\pi)^{-1} \sum_{l_i \in K_n} |l_i|\, \mu_{\alpha_i}(d\omega) \times \delta_{\varphi_i}(d\varphi).$$

Здесь α_i—дуга соответствующей нормалям опорных плоскостей K_n, проходящих через его ребра l_i, $\mu_{\alpha_i}(d\omega)$ — мера на S^2, концентрированная на α_i и распределена равномерно на ней. Сумма берется по всем ребрам l_i многогранника K_n. Следовательно

$$(m_{K_n})_\varphi = (2\pi)^{-1} \sum_{l_i \in K_n} |l_i|\, \mu_{\alpha_i}(d\omega). \tag{8}$$

По (7), (8) и по теореме о среднем имеем

$$\int_{S^2} f(\omega)\, m_\varphi(d\omega) = \lim_{n\to\infty} (2\pi)^{-1} \int_{S^2} f(\omega) \sum_{l_i \in K_n} |l_i|\, \mu_{\alpha_i}(d\omega) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} (2\pi)^{-1} \sum_{l_i \in K_n} |l_i|\, |\alpha_i|\, f(\omega_i^*), \tag{9}$$

где $|\alpha_i|$ — величина дуги α_i, ω_i^* — нормаль некоторой опорной плоскости K_n, проходящей через l_i.

Пусть $D_0 \subset K$ — некоторый шар с центром $\mathrm{P}_0 \in K$. Определим непрерывную и ограниченную функцию F в R^3 следующим образом.

1. Если $\mathrm{P} \in \partial K$, то $F(\mathrm{P}) = f(\Gamma(\mathrm{P}))$.

2. Если $\mathrm{P} \in R^3 \setminus D_0$, то $F(\mathrm{P}) = F([\mathrm{P}_0\mathrm{P}) \cap \partial K)$, $(\mathrm{P}_0\mathrm{P})$ — луч, выходящий из P_0).

3. Внутри D_0 F определим произвольно с сохранением непрерывности.

Согласно свойствам меры кривизны, по теореме о среднем имеем

$$\int_{S^2} f(\omega)\, \Psi_1(K, \Gamma^{-1}(d\omega)) = \int_{\partial K} F(\mathrm{P})\, d\Psi_1(K, \cdot) = \int_{R^3} F(\mathrm{P})\, d\Psi_1(K, \cdot) = \tag{10}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\int_{R^1} F(P)\,d\Psi_1(K_n,\cdot)=\lim_{n\to\infty}(2\pi)^{-1}\sum_{l_i\in K_n}|l_i|\,|\alpha_i|\,F(P_i^*),$$

где P_i^* — некоторая точка на ребре l_i многогранника K_n.

Рассмотрим разность

$$|(2\pi)^{-1}\sum_{l_i\in K_n}|l_i|\,|\alpha_i|\,f(\omega_i^*)-(2\pi)^{-1}\sum_{l_i\in K_n}|l_i|\,|\alpha_i|\,F(P_i^*)|\leqslant$$

$$\leqslant(2\pi)^{-1}\sum_{l_i\in K_n}|l_i|\,|\alpha_i|\,|f(\omega_i^*)-F(P_i^*)| \qquad (11)$$

$\{K_n\}$ — равномерно ограничена, следовательно $\sum_{l_i\in K_n}|l_i|\,|\alpha_i|<C$.

По определению $F(P_i^*)=f(\vec{n}([P_0P_i^*)\cap\partial K)$, где $\vec{n}([P_0P_i^*)\cap\partial K)$—нормаль к ∂K в точке $[P_0P_i^*)\cap\partial K$.

Из равномерной непрерывности f заключаем, что для даниого $\rho>0$ существует $\delta>0$ такое, что $|f(\omega_i^*)-F(P_i^*)|<\rho$, если

$$d_0(\omega_i^*,\ \vec{n}([P_0P_i^*)\cap\partial K))<\delta. \qquad (12)$$

По лемме 1 существует $\varepsilon>0$ такое, что

$$d_0(\omega_i^*,\ \vec{n}([P_0P_i^*)\cap\partial K)<\delta,\ \text{если}\ P_i^*\in(K+\varepsilon D)\setminus(K-\varepsilon D) \qquad (13)$$

и $(P_i^*,\ \omega_i^*)$ удовлетворяет условию леммы 1.

Из $\lim K_n=K$ следует, что существует $N>0$ такое, что при $n>N$

$$K-\varepsilon D\subset K_n\subset K+\varepsilon D, \qquad (14)$$

Следовательно, по (12), (13), (14) для любого $\rho>0$ существует N такое, что при $n>N$

$$(2\pi)^{-1}\sum_{l_i\in K_n}|l_i|\,|\alpha_i|\,|f(\omega_i^*)-F(P_i^*)|<(2\pi)^{-1}\rho C. \qquad (15)$$

Окончательно из (9) (10), (11), (15) получаем (6), что и доказывает теорему 1.

2.° Стохастическая аппроксимация. Пусть K — выпуклое тело, и M_n —последовательность случайных выпуклых многогранников (п. с. в. м.)

Определение. (п. с. в. м.) M_n стохастически аппроксимирует тело K, если

$$\lim_{n\to\infty}Ed(M_n,\ K)=0,$$

где b—метрика Хаусдорфа, E—математическое ожидание.

Теорема 2. *Пусть K — гладкое выпуклое тело и (п. с. в. м.) M_n стохаcтически аппроксимирует K. Если $Em_{M_n}\Rightarrow m$, то*

$$m_\varphi(B)=\Psi_1(K,\ \Gamma^{-1}(B)),$$

где E — математическое ожидание, $B\subset S^2$ — борелевское множество' m_φ — проекция m по φ.

В [3] была рассмотрена стохастическая аппроксимация гладкого выпуклого тела K с помощью (п. с. в. м.), натянутых на независимо брошенные на ∂K точки. В [3] было установлено, что при такой аппроксимации

$$E_{M_n} \Rightarrow m,$$

где m имеет плотность $\frac{\sqrt{k_1(\omega)\,k_2(\omega)}}{k^2(\omega, \varphi)}\,d\omega d\varphi$. Здесь $k_i(\omega)$—главные нормальные кривизны ∂K в точке с нормалью ω, $k(\omega, \varphi)$ — нормальная кривизна в направлении φ в той же точке. Отсюда ввиду теоремы 2 получаем

$$\Psi_1(K, \Gamma^{-1}(d\omega)) = \left(\frac{1}{k_1(\omega)} + \frac{1}{k_2(\omega)}\right) d\omega.$$

Автор выражает глубокую благодарность Р. В. Амбарцумяну за постановку задачи и ценные советы.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 29.XII.1986

ЛИТЕРАТУРА

1. *R. V. Ambartzumian*. Combinatorial Integral Geometry, Metrics and Zonoids, Acta Applicandae Matematice, 9, 1987.
2. *H. Federer*. Curvature measures, Trans. Amer. Math. Soc., 93, 1959, 418—491.
3. *Р. Г. Арамян*. О стохастической аппроксимации выпуклых тел, Изв. АН АрмССР, «Математика», XXII, № 5, 1987, 427—438.