ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XXIII, № 1, 1988 Математика

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.547

А. О. КАРАПЕТЯН

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ В ТРУБЧАТЫХ ОБЛАСТЯХ

1(а). Хорошо известна классическая теорема Пэли и Винера о параметрическом представлении класса Харди H^2 в полуплоскости [1, 2]. В дальнейшем в работах ряда авторов были даны обобщения этого результата, не требующие, однако, привлечения каких-либо существенно новых идей или конструкций. В то же время в работе М. М. Джрбашяна и А. Е. Аветисяна [3] и в монографии М. М. Джрбашяна [4] на основе далеко продвинутой теории гармонического анализа в комплексной области—теории интегральных преобразований с ядрами Миттаг-Леффлера, были получены существенно новые результаты типа теоремы Пэли-Винера.

В работе С. Г. Гиндикина [5] для многомерных областей Зигеля впервые была поставлена и решена задача получения параметрических интегральных представлений типа Пэли-Винера для классов квадратично интегрируемых по области голоморфных функций. В этой же работе на основе полученных интегральных представлений были построены воспроизводящие ядра для голоморфных в областях Зигеля функций из пространства L^2 без веса.

В дальнейшем исследования в этом направлении получили новое развитие в работах ряда авторов (см. [6, 7], [8]).

(б) Введем некоторые обозначения. При произвольном $n \geqslant 1$ обозначим через $\mathbf{C}^n$ и $\mathbf{R}^n$ n-мерные координатные пространства, соответственно, комплексных и действительных чисел. При этом $\mathbf{R}^n$ естественным образом отождествляется с подпространством в $\mathbf{C}^n$. Если $z = (z_k)_1^n \in \mathbf{C}^n$, то положим

$$\bar{z} = (\bar{z}_k)_1^n \in \mathbf{C}^n, \ z = x + iy \in \mathbf{C}^n, \tag{1}$$

где $x = (x_k)_1^n \in \mathbf{R}^n$, $y = (y_k)_1^n \in \mathbf{R}^n$, $z_k = x_k + iy_k$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$. Если $x = (x_k)_1^n \in \mathbf{R}^n$, то $dx = dx_1 dx_2 \cdots dx_n$ будет обозначать элемент объема в $\mathbf{R}^n$.

Далее пусть $0 < p < \infty$, $0 < s < +\infty$, B — область в $\mathbf{R}^n$, $T_B = \{z = x + iy \in \mathbf{C}^n, \ y \in B\}$ — трубчатая область в $\mathbf{C}^n$ с основанием B. Если $\gamma(y) > 0$, $y \in B$ — произвольная непрерывная функция, то обозначим через $H^p_{s,\gamma}(T_B)$ пространство голоморфных в T_B функций f, удовлетворяющих условию

$$M^p_{s,\gamma}(f) \equiv \int\limits_B \left\{ \int\limits_{\mathbf{R}^n} |f(x+iy)|^p dx \right\}^s \cdot \gamma(y)\, dy < +\infty. \tag{2}$$

В данной работе для пространств $H^p_{s,\gamma}(T_B)$ устанавливаются интегральные представления типа Пэли—Винера. Основываясь на них и используя методы, развитые в [5], для конкретной трубчатой области строятся воспроизводящие ядра.

2(а). Всюду дальше через C будем обозначать положительные (вообще говоря, различные) константы.

Хорошо известно [9], что для произвольной функции f из пространства $L^p(\mathbf{R}^n)$, $1 \leqslant p \leqslant 2$, можно определить преобразование Фурье $\hat{f}$. При этом верно следующее предложение [9].

Теорема 1. *Пусть* $1 \leqslant p \leqslant 2$, $2 \leqslant q \leqslant \infty$, $1/p + 1/q = 1$. 1°. *Для каждой функции* $f \in L^p(\mathbf{R}^n)$ *выполняется неравенство*

$$\|\hat{f}\|_q \leqslant C \cdot \|f\|_p, \quad C = C(n, p, q). \tag{3}$$

2°. *Если* $g_1, g_2 \in L^p(\mathbf{R}^n)$, *то*

$$\int\limits_{\mathbf{R}^n} g_1(x) \cdot \hat{g}_2(x)\, dx = \int\limits_{\mathbf{R}^n} \hat{g}_1(x) \cdot g_2(x)\, dx. \tag{4}$$

(б) Для введенных выше пространств справедлив следующий аналог теоремы Пэли—Винера.

Теорема 2. *Пусть* B — *область в* $\mathbf{R}^n$, $\gamma(y) > 0$, $y \in B$ — *непрерывная функция и* $1 \leqslant p \leqslant 2$, $0 < s < \infty$. *Тогда каждая функция* $f \in H^p_{s,\gamma}(T_B)$ *допускает интегральное представление вида*

$$f(z) \equiv \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \cdot \int\limits_{\mathbf{R}^n} F(t) \cdot e^{i\langle z, t\rangle}\, dt, \quad z \in T_B, \tag{5}$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *суть скалярное произведение в* $\mathbf{C}^n$, *а* $F(t)$, $t \in \mathbf{R}^n$ — *измеримая функция, удовлетворяющая условию*

1°. *Если* $p = 1$, *то*

$$\sup_{t \in \mathbf{R}^n} \{ |F(t)|^s \cdot \gamma^*_B(s \cdot t) \} \leqslant C \cdot M^1_{s,\gamma}(f) < +\infty, \tag{6}$$

$$\gamma^*_B(s \cdot t) \equiv \int\limits_B \gamma(y) \cdot e^{-\langle s \cdot t, y \rangle}\, dy, \quad t \in \mathbf{R}^n. \tag{7}$$

2°. *Если* $1 < p \leqslant 2$ $(q = p/(p-1))$, *то*

$$\int\limits_B \left\{ \int\limits_{\mathbf{R}^n} |F(t)|^q \cdot e^{-q\langle y, t\rangle}\, dt \right\}^{s(p-1)} \cdot \gamma(y)\, dy \leqslant C \cdot M^p_{s,\gamma}(f) < +\infty. \tag{8}$$

Доказательство. Пусть $f \in H^p_{s,\gamma}(T_B)$. Не ограничивая общности можем предположить, что для любого $N \geqslant 0$ и произвольного компакта $K \subset B$

$$\sup_{y\in R}\{|x|^N\cdot|f_y(x)|\}\to 0, \text{ при } |x|\to+\infty, \tag{9}$$

где $f_y(x)\equiv f(x+iy)$, $x\in\mathbf{R}^n$. Зафиксируем произвольные точки $y_1, y_2\in B$ и соединим их кривой $\omega(\tau)$, $\tau\in[0;1]$, целиком лежащей в B. Затем при фиксированном $t\in\mathbf{R}^n$ положим

$$\eta_t(z)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\cdot f(z)\cdot e^{-i<z,\,t>}\,dz \tag{10}$$

и при $R\in 0;+\infty)$ рассмотрим многообразие в $\mathbf{C}^n$:

$$\Omega_R=\{z=x+iy\in\mathbf{C}^n\colon |x|\leqslant R;\ y=\omega(\tau),\ \tau\in[0;1]\}. \tag{11}$$

По теореме Стокса в силу голоморфности f в T_B и имеем

$$\int_{\partial\Omega_R}\eta_t(z)=0. \tag{12}$$

Устремляя в (12) $R\to+\infty$ и принимая во внимание (9), приходим к равенству

$$\hat f_{y_1}(t)\cdot e^{<y_1,\,t>}=\hat f_{y_2}(t)\cdot e^{<y_2,\,t>}\ (t\in\mathbf{R}^n), \tag{13}$$

которое влечет существование измеримой функции $F(t)$, $t\in\mathbf{R}^n$ такой, что

$$\hat f_y(t)=F(t)\cdot e^{-<y,\,t>},\ y\in B. \tag{14}$$

Применяя к (14) теорему 1 (1°), мы получим (6) и (8). Наконец, (5) следует из (14) и (6), (8).

3 (a). Для произвольного $z=(z_k)_1^n\in\mathbf{C}^n$ положим $z'=(z_k)_2^n\in\mathbf{C}^{n-1}$, так что $z=(z_1, z')$. Если $z, w\in\mathbf{C}^n$, то естественно положить $<z', w'>=\sum_{k=2}^n z_k\cdot\overline{w_k}$, $|z'|=\sqrt{<z', z'>}$.

При произвольном $n\geqslant 1$ будем рассматривать область

$$G_n=\{y=(y_1, y')\in\mathbf{R}^n,\ y_1>|y'|^2\} \tag{15}$$

и соответствующую ей трубчатую область

$$\tilde\Omega_n=T_{G_n}=\{z=x+iy\in\mathbf{C}^n,\ y\in G_n\}. \tag{16}$$

Всюду дальше предполагается, что $\varphi(\tau)$, $\tau\in(0;+\infty)$ — положительная непрерывная функция, обладающая следующими свойствами:

$$\begin{gathered}\lim_{\tau\to+\infty}\tau^{-1}\cdot\ln\varphi(\tau)=0,\\ \varphi\in L^1(0;R) \text{ при любом } R\in(0;+\infty).\end{gathered} \tag{17}$$

Далее будем полагать

$$\gamma(y)\equiv\varphi(y_1-|y'|^2),\ y=(y_1, y')\in G_n \tag{18}$$

и кратко записывать это соотношение так: $\gamma\dashv\varphi$.

Наконец, в полном соответствии с (7) введем обозначение

$$\gamma^{*}_{\mathcal{O}_n}(t) \equiv \int\limits_{\mathcal{O}_n} \gamma(y)\cdot \exp\{-<y, t>\}\, dy, \quad t \in \mathbf{R}^n. \tag{19}$$

(б) Введем следующее обозначение:

$$\Phi_{\mathcal{O}_n}(z, w) = \int\limits_0^{+\infty} \int\limits_{\mathbf{R}^{n-1}} \frac{\exp\{i(z_1 - \overline{w}_1)t_1 + i<z' - \overline{w}', t'>\}}{\gamma^{*}_{\mathcal{O}_n}(2t_1, 2t')}\, dt_1 dt', \tag{20}$$

$$z, w \in \widetilde{\Omega}_n.$$

Кроме того, для любых $z \in \widetilde{\Omega}_n$ и $v \in G_n$ положим

$$K_{z, v}(t_1, t') = \begin{cases} 0, & t_1 < 0, \ t' \in \mathbf{R}^{n-1} \\ (2\pi)^{n/2} \dfrac{\exp\{i(z_1 + iv_1)t_1 + i<z' + iv', t'>\}}{\gamma^{*}_{\mathcal{O}_n}(2t_1, 2t')}, & t_1 > 0, \ t' \in \mathbf{R}^{n-1}. \end{cases} \tag{21}$$

Так как $\gamma \prec \varphi$, то в силу соотношений (17) верна

Лемма 1. 1°. *Интеграл* (20) *абсолютно сходится при любых* $z, w \in \widetilde{\Omega}_n$.

2°. *Ядро* $\Phi_{\mathcal{O}_n}(z, w)$ *голоморфно по* $z \in \widetilde{\Omega}_n$ *и антиголоморфно по* $w \in \widetilde{\Omega}_n$.

3°. *При любых* $z \in \widetilde{\Omega}_n$ *и* $v \in G_n$: $K_{z, v}(t) \in L^p(\mathbf{R}^n)$, $0 < p < \infty$, *причем*

$$\widehat{K}_{z, v}(u) = \Phi_{\mathcal{O}_n}(z, u + iv), \quad u \in \mathbf{R}^n. \tag{22}$$

(в) Справедлив следующий основной результат.

Теорема 3. *Пусть* $\varphi(\tau)$, $\tau \in (0; +\infty)$ — *произвольная положительная непрерывная функция, обладающая свойствами* (17), $\gamma \prec \varphi$, $1 < p \leqslant 2$ *и положительное число* s *удовлетворяет одному из следующих условий*:

(а) $1/p \leqslant s \leqslant 2/p$,

(б) $1/p \leqslant s < 1/(p-1)$, *но при этом*

$$\varphi(2\tau) \leqslant C\cdot\varphi(\tau), \quad \tau \in (0; +\infty). \tag{23}$$

Тогда каждая функция $f \in H^p_{s,\gamma}(\widetilde{\Omega}_n)$ *допускает интегральное представление*

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{\widetilde{\Omega}_n} f(w)\cdot\Phi_{\mathcal{O}_n}(z, w)\cdot\gamma(v)\, du\, dv, \quad z \in \widetilde{\Omega}_n \tag{24}$$

$$(w = u + iv \in \widetilde{\Omega}_n).$$

Доказательство. Соотношения (17) и теорема 2 (при $B = G_n \subset \mathbf{R}^n$) влекут существование измеримой на $\mathbf{R}^n$ функции F, $F(t_1, t') = 0$

при $t_1 < 0$, $t' \in \mathbb{R}^{n-1}$, удовлетворяющей (6) при $p=1$ и (8) при $1<p\leqslant 2$, и такой, что

$$f(z) \equiv \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \cdot \int\limits_0^{+\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} F(t_1, t') \cdot e^{i z_1 t_1 + i<z', t'>} \, dt_1 dt', \tag{25}$$

$$z = (z_1, z') \in \overline{\Omega}_n.$$

При этом для почти всех $y=(y_1, y') \in G_n$ справедлива формула

$$\hat{f}_y(t_1, t') = \begin{cases} 0, & t_1 < 0, \ t' \in \mathbb{R} \\ F(t_1, t') \cdot e^{-y_1 t_1 - <y', t'>}, & t_1 > 0, \ t' \in \mathbb{R}^{n-1}. \end{cases} \tag{26}$$

Зафиксируем произвольное $z \in \overline{\Omega}_n$ и обозначим через $I(z)$ интеграл (24), абсолютно сходящийся в силу исходных предложений относительно функции φ и параметров p и s. Нам необходимо установить равенство $I(z) = f(z)$. Комбинируя лемму 1 (3°), теорему 1 (2°), (26) и (25), приходим к следующей цепочке равенств:

$$I(z) = \frac{1}{(2\pi)^n} \cdot \int\limits_{O_n} \gamma(v) \int\limits_{\mathbb{R}^n} f_v(u) \cdot \Phi_{O_n}(z, u+iv) \, du dv =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n} \cdot \int\limits_{O_n} \gamma(v) \int\limits_{\mathbb{R}^n} \hat{f}_v(t) \cdot K_{z,v}(t) \, dt \, dv = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \cdot$$

$$\cdot \int\limits_0^{+\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} F(t_1, t') \cdot \frac{e^{i<z, t>}}{\gamma_{O_n}(2t)} \int\limits_{O_n} \gamma(v) \cdot e^{-2<v, t>} dv dt =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \cdot \int\limits_0^{+\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} F(t_1, t') \cdot e^{i<z, t>} \, dt = f(z).$$

Таким образом, теорема доказана.

В заключение выражаю благодарность академику АН Армянской ССР М. М. Джрбашяну за постановку задач и руководство.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 16.I.1988

ЛИТЕРАТУРА

1. *R. E. A. C. Paley, N. Wiener.* Fourier Transforms in the Complex Domain, Amer Math. Soc. Colloq. Publ., 19, Amer. Math. Soc., New York, 1934.
2. *Н. Винер, Р. Пэли.* Преобразование Фурье в комплексной области, М., «Наука», 1964.
3. *М. М. Джрбашян, А. Е. Аветисян.* Интегральные представления некоторых классов функций, аналитических в области угла. ДАН СССР, 120, № 3, 1958, 457—460.
4. *М. М. Джрбашян.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, М., «Наука», 1966.
5. *С. Г. Гиндикин.* Анализ в однородных областях, УМН, 19, № 4, 1964, 3—92.

6. *М. М. Джрбашян, В. М. Мартиросян*. Интегральные представления некоторых классов функций, голоморфных в полосе или в полуплоскости, ДАН СССР, 283, № 5, 1985, 1054—1056.

7. *M. M. Dzhrbashyan, V. M. Martirosyan*. Integral representations for some classes of functions holomorphic in a strip or in a half-plane, Analysis Mathematica, 12, № 3, 1986, 191—212.

8. *T. G. Cenchev*. Paley—Wiener type theorems for functions in Bergman Spaces over tube domains, J. Math. Anal. Appl., 118, № 2, 1986, 496—501.

9. *И. Стейн, Г. Вейс*. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М., «Мир», 1974.