ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XXIII, № 1, 1988 Математика

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.53

А. Е. АВЕТИСЯН

О ПОЛНОТЕ И МИНИМАЛЬНОСТИ СИСТЕМЫ ФУНКЦИЙ $\{E_\rho(\lambda_k z;\ \mu)\}_1^\infty$

В настоящей заметке приводятся теоремы о полноте и минимальности системы функций $\{E_\rho(\lambda_k z;\ \mu)\}_1^\infty$, порожденной целой функцией типа Миттаг-Леффлера

$$E_\rho(z;\ \mu)=\sum_0^\infty \frac{z^n}{\Gamma(\mu+n\rho^{-1})}$$

в пространстве L^2 на конечных отрезках. Предполагается, что $\{\lambda_k\}_1^\infty$ — последовательность различных комплексных чисел с единственной точкой сгущения в бесконечности. Приводимые теоремы аналогичны известным теоремам Винера-Пэли [1] и Б. Я. Левина (см. [2], приложение III). При установлении результатов мы пользуемся методами, развитыми в вышеуказанных работах. Мы существенно опираемся также на теорию М. М. Джрбашяна (см. [3[, глава VI) о параметрическом представлении определенных классов целых функций конечного роста.

1°. **Минимальность системы** $\{E_\rho(\lambda_k z;\ \mu)\}_1^\infty$

Теорема 1. *Для того, чтобы система функций* $\{E_\rho(\lambda_k x;\ \mu)\}_1^\infty$, $\left(\rho>\frac{1}{2},\ \mu=\frac{\rho+1}{2\rho}\right)$ *была минимальной в* $L^2(0,\ \sigma^{1/\rho})$, $(\sigma>0)$ *необходимо и достаточно, чтобы существовала целая функция* $f(z)$ *порядка* ρ, *типа* $\sigma_1<\sigma$, *обращающаяся в нуль во всех точках* λ_k *и такая, что*

$$\sup_{\frac{\pi}{2\rho}<|\varphi|<\pi}\left\{\int_0^\infty \frac{|f(re^{i\varphi})|^2}{1+r^2}\,dr\right\}<+\infty. \tag{1}$$

Доказательство. Допустим, что такая функция $f(z)$ существует. Пусть λ_k—корень $f(z)$ кратности s_k $(s_k\geqslant 1)$. Тогда все функции

$$G_k(z)=\frac{s_k!f(z)}{f^{(s_k)}(\lambda_k)(z-\lambda_k)^{s_k}}\quad(k=1,2,3,\cdots)$$

принадлежат классу $B^2_{\rho,\sigma}$, т. е. $G_k(z)$—целые функции порядка ρ типа $\leqslant\sigma$ и удовлетворяют условию

$$\sup_{\frac{\pi}{2\rho}<|\varphi|<\pi}\left\{\int_0^\infty |G_k(re^{i\varphi})|^2\,dr\right\}<+\infty.$$

По теореме М. М. Джрбашяна $G_k(z)$ имеет представление

$$G_k(z) = \int_0^{\sigma^{1/\rho}} E_\rho(zx;\ \mu)\, h_k(x)\, dx,\quad h_k(x) \in L^2(0, \sigma^{1/\rho}).$$

Очевидно $G_k(\lambda_j) = 0$ при $j \neq k$ и $G_k(\lambda_k) = 1$, так что системы $\{E_\rho(\lambda_j x;\ \mu)\}_1^\infty$ и $\{h_k(x)\}_1^\infty$ биортогональны на $(0, \sigma^{1/\rho})$. Из стремления к нулю в $L^2(0, \sigma^{1/\rho})$ последовательности сумм $\Phi_n = \sum_{j=1}^n a_j^{(n)} E_\rho(\lambda_j x;\ \mu)$ следует соотношение $\lim_{n\to\infty} a_j^{(n)} = 0$ и необходимость условий доказана.

Если же система минимальна, то существует функционал, который задается некоторой функцией $g(x) \in L^2(0, \sigma^{1/\rho})$ и который равен единице, например, на $E_\rho(\lambda_1 x;\ \mu)$ и обращается в нуль на всех функциях $E_\rho(\lambda_k x;\ \mu)$ $(k = 2, 3, \cdots)$. Имеем

$$\int_0^{\sigma^{1/\rho}} E_\rho(\lambda_k x;\ \mu)\, g(x)\, dx = \begin{cases} 0, & k \neq 1 \\ 1, & k = 1. \end{cases}$$

Целая функция порядка ρ и типа $\sigma_1 \leqslant \sigma$

$$f(z) = (z - \lambda_1) \int_0^{\sigma^{1/\rho}} E_\rho(zx;\ \mu)\, g(x)\, dx$$

обращается в нуль во всех точках $\lambda_k\, (k = 1, 2, \cdots)$ и по теореме М. М. Джрбашяна $\dfrac{f(z)}{z - \lambda_1} \in B^2_{\rho, \sigma}$. Это означает, что $f(z)$ удовлетворяет условию (1). Теорема доказана.

Аналогично доказываются следующие теоремы.

Теорема 2. *Для того, чтобы система функций* $\{E_\rho(i\lambda_k x;\ \mu)\}_1^\infty$ $\left(\rho \geqslant 1,\ \mu = \dfrac{\rho + 1}{2\rho}\right)$ *была минимальной в* $L^2(-\sigma^{1/\rho}, \sigma^{1/\rho})$, *необходимо и достаточно, чтобы существовала целая функция* $f(z)$ *порядка* ρ *и типа* $\sigma_1 \leqslant \sigma$, *обращающаяся в нуль во всех точках* λ_k *и такая, что*

$$\sup_{\substack{|\varphi| < \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2\rho} \\ |\varphi - \pi| < \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2\rho}}} \left\{ \int_0^\infty \frac{|f(re^{i\varphi})|^2}{1 + r^2}\, dr \right\} < +\infty.$$

Обозначим через Γ_σ совокупность двух отрезков: $\arg z = \pm \dfrac{\pi}{2\rho}$, $0 \leqslant |z| \leqslant \sigma^{1/\rho}$.

Теорема 3. *Для того, чтобы система функций* $\{E_\rho(\lambda_k z;\ \mu)\}_1^\infty$ $\left(\rho \geqslant 1,\ \mu = \dfrac{\rho + 1}{2\rho}\right)$ *была минимальной в* $L^2(\Gamma_\sigma)$, *необходимо и доста* *точно, чтобы существовала целая функция $f(z)$ порядка ρ и типа $\sigma_1 \leqslant \sigma$, обращающаяся в нуль во всех точках λ_k и такая, что*

$$\sup_{\substack{\frac{\pi}{\rho}<|\varphi|<\pi \\ \varphi=0}} \left\{ \int_0^\infty \frac{|f(re^{i\varphi})|^2}{1+r^2}\, dr \right\} < +\infty.$$

Замечание. При $\rho = 1$ (тогда и $\mu = 1$), $E_\rho(i\lambda_k x; \mu) = e^{i\lambda_k x}$ и теорема 2 (по существу и теорема 3) совпадает с теоремой Винера-Пэли.

2°. Полнота и минимальность системы $\{E_\rho(\lambda_k z; \mu)\}_1^\infty$.

Теорема 4. *Для того, чтобы система* $\{E_\rho(\lambda_n x; \mu)\}_1^\infty$, $\left(\rho > 1, \mu = \frac{\rho+1}{2\rho}\right)$ *была полной и минимальной в* $L^2(0, \sigma^{1/\rho})$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:*

1°. *Существует целая функция $\varphi(\lambda)$ порядка ρ и конечного типа, имеющая простые нули только в точках λ_k,*

2°. $h_\varphi(0) = \sigma$,

3°. $$\sup_{\frac{\pi}{2\rho}<|\varphi|<\pi} \left\{ \int_0^\infty \frac{|\varphi(re^{i\varphi})|^2}{1+r^2}\, dr \right\} < +\infty,$$

4°. *Если $\chi(\lambda)$—какая-нибудь целая функция порядка ρ и нулевого типа, то* $\varphi(\lambda)\chi(\lambda) \overline{\in} B^2_{\rho,\sigma}$.

Доказательство. Необходимость. Допустим, что система полна и минимальна. По теореме 1 существует целая функция $\varphi(\lambda)$ порядка ρ и типа $\sigma_1 \leqslant \sigma$, которая обращается в нуль во всех точках λ_k и удовлетворяет условию 3°. При $\rho > 1$ отсюда вытекает, что $\varphi(\lambda)$— целая функция вполне регулярного роста с индикатором

$$h_\varphi(\theta) = \begin{cases} \sigma_1 \cos\rho\theta, & \text{при } |\theta| < \frac{\pi}{2\rho} \\ 0\ , & \text{при } \frac{\pi}{2\rho} \leqslant |\theta| \leqslant \pi. \end{cases} \tag{2}$$

Докажем, что $h_\varphi(0) = \sigma$. Допустим противное: $h(\varphi) = \sigma_1 < \sigma$. Рассмотрим функцию

$$\psi(\lambda) = \varphi(\lambda) \cdot E_\rho\left(\lambda(\sigma - \sigma_1)^{1/\rho};\ 1 + \frac{1}{\rho}\right). \tag{3}$$

Целая функция $\Phi(\lambda) = E_\rho\left(\lambda(\sigma - \sigma_1)^{1/\rho}; 1 + \frac{1}{\rho}\right)$ имеет вполне регулярный рост и

$$h_\Phi(0) = \begin{cases} (\sigma - \sigma_1)\cos\rho\theta, \text{ при } & |\theta| \leqslant \frac{\pi}{2\rho} \\ 0\ , \text{ при } & \frac{\pi}{2\rho} \leqslant |\theta| \leqslant \pi. \end{cases} \tag{4}$$

Кроме того, в замкнутой угловой области $|\arg\lambda| > \frac{\pi}{2\rho}$ $\Phi(\lambda) = O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right)$.

Отсюда и из 3°, (2), (3), (4) следует, что $\psi(\lambda) \in B^2_{\rho,\sigma}$. По теореме М. М. Джрбашяна она имеет представление

$$\psi(\lambda) = \int_0^{\sigma^{1/\rho}} E_\rho(\lambda x;\ \mu)\, u(x)\, dx,\ u(x) \in L^2(0,\ \sigma^{1/\rho}). \tag{5}$$

Очевидно $\psi(\lambda_k) = 0$ $(k = 1, 2, \cdots)$ и значит система $\{E_\rho(\lambda_k x;\ \mu)\}_1^\infty$ не полна в $L^2(0,\ \sigma^{1/\rho})$. Противоречие показывает, что $h_\varphi(0) = \sigma$.

Функция $\varphi(\lambda)$ не имеет корней, отличных от $\lambda_k (K = 1, 2, \cdots)$. В противном случае целая функция $\frac{\varphi(\lambda)}{\lambda - \mu}$ (где μ—отличный от всех λ_k корень $\varphi(\lambda)$) принадлежала бы классу $B^2_{\rho,\sigma}$ и по теореме М. М. Джрбашяна имела бы представление типа (5), что противоречит полноте системы $\{E_\rho(\lambda_k x;\ \mu)\}_1^\infty$. Докажем, наконец, 4°. Если при некоторой функции $\chi(\lambda)$, порядка ρ и типа 0 $\varphi(\lambda)\,\chi(\lambda) \in B^2_{\rho,\sigma}$, то добавив к полной в $L^2(0,\ \sigma^{1/\rho})$ системе $\{E_\rho(\lambda_\nu x;\ \mu)\}_1^\infty$ новые функции $E_\rho(\mu_k x;\ \mu)$, где μ_k нули функции $\chi(\lambda)$, мы получим неполную систему. Это невозможно. Значит такой функции $\chi(\lambda)$ нет.

Достаточность. Из условий 1°—3° следует минимальность системы $\{E_\rho(\lambda_k x;\ \mu)\}_1^\infty$. При $\rho > 1$, как и выше, имеем, что $\varphi(\lambda)$—вполне регулярного роста и

$$h_\varphi(\theta) = \begin{cases} \sigma\cos\rho\theta, & \text{при } |\theta| \leqslant \frac{\pi}{2\rho} \\ 0, & \text{при } \frac{\pi}{2\rho} \leqslant |\theta| \leqslant \pi. \end{cases} \tag{6}$$

Если система не полна в $L^2(0,\ \sigma^{1/\rho})$, то существует целая функция $f(\lambda)$, $f(\lambda_k) = 0$ и

$$f(\lambda) = \int_0^{\sigma^{1/\rho}} E_\rho(\lambda x;\ \mu)\, g(x)\, dx,\ g(x) \in L^2(0,\ \sigma^{1/\rho}).$$

$f(\lambda)$ также имеет вполне регулярный рост. Ее индикатор выражается формулой

$$h_f(\theta) = \begin{cases} \sigma_1\cos\rho\theta, & \text{при } |\theta| \leqslant \frac{\pi}{2\rho}\ (\sigma_1 < \sigma) \\ 0, & \text{при } \frac{\pi}{2\rho} \leqslant |\theta| \leqslant \pi. \end{cases} \tag{7}$$

Составим функцию

$$\chi(\lambda) = \frac{f(\lambda)}{\varphi(\lambda)}. \tag{8}$$

Она очевидно целая и порядка ρ. Из (8), (6) и (7) следует, что она нулевого типа. С другой стороны, $\varphi(\lambda)\chi(\lambda)=f(\lambda)\in B^2_{\rho,\sigma}$. Это противоречит условию 4°. Значит система полна и минимальна. Теорема доказана.

Для формулировки следующих теорем дадим определения [3]:

Определение 1. *$F(z)$ принадлежит классу $W^2_{\rho,\sigma}$, если она целая, порядка $\rho\geqslant 1$, типа $\leqslant\sigma$ и удовлетворяет условию*

$$\sup_{\substack{|\theta|<\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2\rho}\\ |\theta-\pi|<\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2\rho}}}\left\{\int_0^\infty |F(re^{i\theta})|^2\,dr\right\}<+\infty.$$

Определение 2. *$F(z)$ принадлежит классу $B^2_{\rho,\sigma}(\Gamma)$, если она целая, порядка $\rho\geqslant 1$, типа $\leqslant\sigma$, и удовлетворяет условию*

$$\sup_{\substack{\frac{\pi}{\rho}<|\theta|\leqslant\pi\\ \theta=0}}\left\{\int_0^\infty |F(re^{i\theta})|^2\,dr\right\}<+\infty.$$

Теорема 5. *Для того, чтобы система $\{E_\rho(i\lambda_k x;\ \mu)\}_1^\infty$ $\left(\rho>2,\ \mu=\frac{\rho+1}{2\rho}\right)$ была полной и минимальной в $L^2(-\sigma^{1/\rho},\ \sigma^{1/\rho})$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:*

1°. Существует целая функция $\varphi(\lambda)$ порядка ρ и конечного типа, имеющая простые нули только в точках λ_k,

2°. $h_\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)=h_\varphi\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\sigma,$

3°. $$\sup_{\substack{|\theta|<\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2\rho}\\ |\theta-\pi|<\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2\rho}}}\left\{\int_0^\infty \frac{|\varphi(re^{i\theta})|^2}{1+r^2}\,dr\right\}<+\infty.$$

4°. *Если $\chi(\lambda)$—какая-нибудь целая функция порядка ρ и нулевого типа, то $\varphi(\lambda)\chi(\lambda)\overline{\in} W^2_{\rho,\sigma}$.*

Теорема 6. *Для того, чтобы система $\{E_\rho(\lambda_k z;\ \mu)\}_1^\infty$ $\left(\rho>\frac{3}{2},\ \mu=\frac{\rho+1}{2\rho}\right)$ была полной и минимальной в $L^2(\Gamma_\sigma)$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:*

1°. Существует целая функция $\varphi(\lambda)$ порядка ρ и конечного типа, имеющая простые нули только в точках λ_k,

2°. $h_\varphi\left(\frac{\pi}{2\rho}\right)=h_\varphi\left(-\frac{\pi}{2\rho}\right)=\sigma,$

3°. $$\sup_{\substack{\frac{\pi}{\rho}<|\theta|<\pi \\ \theta = 0}} \left\{ \int_0^\infty \frac{|\varphi(re^{i\theta})|^2}{1+r^2} dr \right\} < +\infty,$$

4°. *Если $\chi(\lambda)$ — целая функция порядка ρ и нулевого типа, то* $\varphi(\lambda)\chi(\lambda)\overline{\in} B^2_{\rho,\sigma}$.

Доказательства теорем 5 и 6 проводятся по той же схеме, что и доказательство теоремы 4. Здесь надо пользоваться теоремами 2 и 3 и теоремами М. М. Джрбашяна о параметрическом представлении классов $W^2_{p,\sigma}$ и $B^2_{p,\sigma}(\Gamma)$.

Ереванский институт
народного хозяйства

Поступила 20. II. 1987

ЛИТЕРАТУРА

1. *Н. Винер, Пэли.* Преобразование Фурье в комплексной области, Физматгиз, М., 1964.
2. *Б. Я. Левин.* Распределение корней целых функций, Гостехиздат, М., 1956.
3. *М. М. Джрабшян.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М., «Наука», 1966.