ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XXIII, № 1, 1988 Математика

УДК 517.956.223

В. В. АСАТРЯН

ОСНОВНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

Введение

В настоящей работе рассматриваются основные краевые задачи для уравнения

$$\Delta u(x, y, t)+a(x, y, t)\,u_x+b(x, y, t)\,u_y+$$
$$+d(x, y, t)\,u_t+c(x, y, t)\,u=0,\ t>0, \tag{1}$$

в полупространстве $t\geqslant 0$, где $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ — оператор Лапласа. Коэффициенты $a(x, y, t)$, $b(x, y, t)$ $c(x, y, t)$, $d(x, y, t)$ предполагаются непрерывными при $t\geqslant 0$, непрерывно-дифференцируемыми при $t>0$ и становятся постоянными вне некоторого полушара Ω_0 $(\Omega:\ :x^2+y^2+t^2\leqslant R_0^2,\ t>0)$ достаточно большого радиуса R_0, т. е. $a(x, y, t)=a_0$, $b(x, y, t)=b_0$, $c(x, y, t)=c_0$, $d(x, y, t)=d_0$, при $x^2+y^2+t^2>R_0^2$ $(t>0)$, где a_0, b_0, c_0, d_0 — постоянные числа. Через S_0 обозначим круг $x^2+y^2\leqslant R_0^2$.

Наряду с уравнением (1) будем рассматривать два типа краевых условий:

$$u(x, y, 0)=f(x, y) \tag{2}$$

для первой краевой задачи (задача Дирихле) и

$$\frac{\partial u(x, y, 0)}{\partial t}-\alpha(x, y)\,u(x, y, 0)=f_1(x, y) \tag{3}$$

—для третьей краевой задачи (при $\alpha(x, y)\equiv 0$ получим вторую краеву задачу). Функции $f(x, y)$, $f_1(x, y)$ и $\alpha(x, y)$ предполагаются непрерывными на плоскости $t=0$, причем $\alpha(x, y)=\alpha_0$ при $x^2+y^2\geqslant R_0^2$, где α_0—постоянное число.

В случае постоянных коэффициентов a, b, c, d, α вышеуказанные краевые задачи рассмотрены в работах [1] — [4] в разных классах функций, имеющих рост на бесконечности не более полиномиального. В этих работах доказано, что однородная задача имеет конечное число решений, а неоднородная задача всегда разрешима. В настоящей работе исследуются эти задачи, когда коэффициенты уравнения (1) и краевого условия (3) переменные, а решение ищется в классе функций экспоненциального роста в бесконечности (f и f_1 также имеют экспоненциальный рост).

Будем говорить, что функция $u(x, y, t)$ принадлежит классу A^m $(m > 0)$, если $u \in C^2(t > 0) \cap C(t \geqslant 0)$ и имеет оценку на бесконечности

$$|u(x, y, t)| \leqslant \text{Cons} \cdot e^{(m-\varepsilon)r} \tag{A}$$

для некоторого $0 < \varepsilon < m$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + t^2}$. Подкласс класса A^m, определенный дополнительными условиями $u \in C^1(t \geqslant 0)$ и

$$\left|\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t}\right| \leqslant \text{Const} \cdot e^{(m-\varepsilon)r} \tag{Б}$$

обозначим через B^m. Здесь и в дальнейшем через „Const" будут обозначены некоторые положительные постоянные.

Решения краевых задач (1), (2) и (1), (3) будем искать, соответственно, в классах A^m и B^m. Число m уточним ниже.

Пусть $c_0 < 0$. Обозначим $c_0 = -\lambda_0^2$ $(\lambda_0 > 0)$,

$$\mu_0 = \begin{cases} \lambda_0, \text{ при } \alpha_0 \geqslant \lambda_0, \\ \sqrt{\lambda_0^2 - \alpha_0^2}, \text{ при } -\lambda_0 < \alpha_0 < \lambda_0. \end{cases}$$

Предположим, что $f(x, y)$ и $f_1(x, y)$ имеют оценки на бесконечности:

$$|f(x, y)| \leqslant \text{Const} \cdot e^{(\lambda_0-\varepsilon)r_0}, \tag{4}$$

$$|f_1(x, y)| \leqslant \text{Const} \cdot e^{(\mu_0-\varepsilon)r_0}, \tag{5}$$

где $r_0 = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Основные результаты статьи следующие:

Теорема 1. а) *Если* $a_0 = b_0 = d_0 = 0$, $c(x, y, t) \leqslant 0$, *то краевая задача* (1), (2) *имеет, и притом единственное, решение в классе* A^{λ_0} *для любой непрерывной* $f(x, y)$, *удовлетворяющей условию* (4);

б) *в условиях пункта* а) *решение краевой задачи* (1), (2) *из класса* A^{λ_0} *непрерывно зависит от граничной функции* $f(x, y)$;

в) *если* $a_0 = b_0 = d_0 = 0$, $c_0 < 0$, *то краевая задача* (1), (2) *фредгольмова в классе* A^{λ_0}.

Теорема 2. а) *Если* $a_0 = b_0 = d_0 = 0$, $c(x, y, t) \leqslant 0$, $c_0 < 0$, $\alpha(x, y) \geqslant 0$, *то краевая задача* (1), (3) *имеет, и притом единственное, решение в классе* B^{μ_0} *для любой непрерывной* $f_1(x, y)$, *удовлетворяющей условию* (5);

б) *в условиях пункта* а) *решение краевой задачи* (1), (3) *из класса* B^{μ_0} *непрерывно зависит от граничной функции* $f_1(x, y)$;

в) *если* $a_0 = b_0 = d_0 = 0$, $c_0 < 0$, $-\lambda_0 < \alpha_0$, *то краевая задача* (1), (3) *фредгольмова в классе* B^{μ_0}.

Работа состоит из двух параграфов. В § 1 приводится доказательство теоремы 1. В § 2 исследуется краевая задача (1), (3).

Изучение краевых задач (1), (2) и (1), (3) в общем случае сводится к случаю $a_0 = b_0 = d_0 = 0$ с соответствующими изменениями в классах.

§ 1. Изучение краевой задачи (1), (2)

Рассмотрим уравнение (λ—положительная постоянная)

$$\Delta u(x, y, t) - \lambda^2 u(x, y, t) = g(x, y, t), \ t > 0. \tag{6}$$

В [5] доказывается, что решение краевой задачи (2), (6) для ограниченных $f(x, y)$ и $g(x, y, t)$ дается формулой

$$u(x, y, t) = u^*(x, y, t) + w(x, y, t), \tag{7}$$

где

$$u^*(x, y, t) = -\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{\zeta>0} g(\xi, \eta, \zeta)\frac{e^{-\lambda\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(t-\zeta)^2}}}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(t-\zeta)^2}}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta,$$

а

$$w(x, y, t) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}[f(\xi, \eta) - u^*(\xi, \eta, 0)] \times$$

$$\times\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{e^{-\lambda\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+t^2}}}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+t^2}}\right] d\xi\, d\eta.$$

Аналогично, как в [5], можно доказать, что и при f, g, удовлетворяющих условиям $|f(x, y)| \leqslant \mathrm{Const}\cdot e^{(\lambda-\varepsilon) r_0}$ и $|g(x, y, t)| \leqslant \mathrm{Const} \times \times e^{(\lambda-\varepsilon) r}$, формула (7) определяет частное решение задачи (2), (6). Убедимся, что краевая задача (2), (6) не имеет других решений в классе A^λ, кроме (7). Для этого надо доказать, что однородная краевая задача

$$\Delta u(x, y, t) - \lambda^2 u(x, y, t) = 0, \ t > 0, \tag{8}$$

$$u(x, y, 0) = 0 \tag{9}$$

не имеет нетравиальных решений в классе A^λ.

Лемма 1. *Краевая задача* (8), (9) *не имеет нетривиальных решений в классе* A^λ.

Доказательство. Предположим, что решение $u(x, y, t)$ задачи (8), (9) продолжено в полупространство $t < 0$ нечетным образом $u(x, y, -t) = -u(x, y, t)$ и рассмотрим уравнение (8) во всем пространстве. Тогда продолженное решение тоже будет из класса A^λ. Из [6] следует, что в этих условиях

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| \leqslant M\cdot e^{(\lambda-\varepsilon) r}; \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right| \leqslant M\cdot e^{(\lambda-\varepsilon) r}, \left|\frac{\partial u}{\partial t}\right| \leqslant M\cdot e^{(\lambda-\varepsilon) r}, \tag{10}$$

где M — некоторая положительная постоянная.

Обозначим через S_R сферу достаточно большого радиуса R с центром в начале координат. Для произвольной точки (x_0, y_0, t_0) из шара $x^2 + y^2 + t^2 \leqslant R^2$ будем иметь по формуле Грина

$$u(x_0, y_0, t_0) = -\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S_R}\left[u(x, y, t)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{-\lambda r^*}}{r^*}\right) - \frac{e^{-\lambda r^*}}{r^*}\frac{\partial}{\partial n}u(x, y, t)\right] dS_R, \tag{11}$$

где $(x, y, t) \in S_R$, $\vec{n}$ — внешняя нормаль к сфере S_R.

$$r^* = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (t - t_0)^2}.$$

Справедливы следующие очевидные неравенства

$$R - r_0^* < r^* < R + r_0^*, \quad -\lambda r^* < -\lambda R + \lambda r_0^*,$$

где $r_0^* = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + t_0^2}$. Учитывая еще (10), из (11) получим следующую оценку для $u(x_0, y_0, t_0)$:

$$|u(x_0, y_0, t_0)| \leqslant \mathrm{Const}\cdot e^{(\lambda-\varepsilon)R}\cdot e^{-\lambda R}\cdot e^{\lambda r_0^*}\,\frac{(\lambda+1)(R + r_0^*)+1}{(R - r_0^*)^2}\times$$

$$\times 2\pi R^2 \to 0, \quad R \to \infty.$$

Следовательно, $u(x_0, y_0, t_0) = 0$, Лемма 1 доказана.

Из формулы (7) и леммы 1 следует

Теорема 3. *Краевая задача* (2), (6) *имеет, и притом единственное, решение в классе* A^λ. *Это решение определяется формулой* (7).

Можно показать, что при расширении класса A^λ (в смысле роста) единственность нарушается. Действительно, наряду с $u \equiv 0$ решением краевой задачи (8), (9) является и функция $u = C(e^{\lambda t} - e^{-\lambda t})$, где C — произвольная постоянная.

Доказательство теоремы 1. Пусть $a_0 = b_0 = d_0 = 0$. Представляя уравнение (1) в виде

$$\Delta u - \lambda_0^2 u = -a(x, y, t)\, u_x - b(x, y, t)\, u_y -$$

$$- d(x, y, t)\, u_t + [c_0 - c(x, y, t)]\, u, \quad t > 0, \tag{12}$$

считая правую часть в (12) известной и пользуясь формулой (7) после простых преобразований (интегрирование по частям и изменение порядка интегрирования) краевая задача (1), (2) приводится к эквивалентному интегральному уравнению

$$u(x, y, t) = \iiint\limits_{\zeta>0} K(\xi, \eta, \zeta, x, y, t)\, u(\xi, \eta, \zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta +$$

$$+ \iint\limits_{\zeta=0} P(\xi, \eta, x, y, t)\, u(\xi, \eta, 0)\, d\xi\, d\eta + F(x, y, t), \tag{13}$$

где ядра K и P стремятся к нулю, соответственно, при $r \to \infty$ и $r_0 \to \infty$, причем $K(\xi, \eta, \zeta, x, y, t) \equiv 0$ при $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \geqslant R_0^2$, $\zeta \geqslant 0$, $P(\xi, \eta, x, y, t) \equiv 0$ при $\xi^2 + \eta^2 \geqslant R_0^2$,

$$F(x, y, t) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\xi, \eta)\,\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{e^{-\lambda_0\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + t^2}}}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + t^2}}\right] d\xi\, d\eta.$$

Учитывая последнее свойство ядер K и P, интегральное уравнение (13) можно представить в виде

$$u(x, y, t)=\iiint\limits_{\Omega_0} K(\xi, \eta, \zeta, x, y, t)\, u(\xi, \eta, \zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta+$$

$$+\iint\limits_{S_0} P(\xi, \eta, x, y, t)\, u(\xi, \eta, 0)\, d\xi\, d\eta+F(x, y, t). \qquad (14)$$

Подставляя в (14) $t=0$, получим

$$u(x, y, 0)=\iiint\limits_{\Omega_0} K(\xi, \eta, \zeta, x, y, t)\, u(\xi, \eta, \zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta+$$

$$+\iint\limits_{S_0} P(\xi, \eta, x, y, 0)\, u(\xi, \eta, 0)\, d\xi\, d\eta+F(x, y, 0). \qquad (15)$$

Рассмотрим систему интегральных уравнений Фредгольма второго рода

$$\psi(x, y, t)=\iiint\limits_{\Omega_0} K(\xi, \eta, \zeta, x, y, t)\, \psi(\xi, \eta, \zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta+$$

$$+\iint\limits_{S_0} P(\xi, \eta, x, y, t)\, \varphi(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta+F(x, y, t),\ (x, y, t)\in\Omega_0, \qquad (16)$$

$$\varphi(x, y)=\iiint\limits_{\Omega_0} K(\xi, \eta, \zeta, x, y, 0)\, \psi(\xi, \eta, \zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta+$$

$$+\iint\limits_{S_0} P(\xi, \eta, x, y, 0)\, \varphi(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta+F(x, y, 0),\ (x, y)\in S_0. \qquad (17)$$

Лемма 2. *Уравнение* (14) *эквивалентно системе* (16), (17).

Доказательство. Пусть $\{\psi, \varphi\}$—некоторое решение системы (16), (17). Тогда функция $u(x, y, t)$, где

$$u(x, y, t)=\begin{cases}\psi(x, y, t), \text{ при } (x, y, t)\in\Omega_0,\\ \iiint\limits_{\Omega_0} K(\xi, \eta, \zeta, x, y, t)\, \psi(\xi, \eta, \zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta+\end{cases}$$

$$+\iint\limits_{S_0} P(\xi, \eta, x, y, t)\, \varphi(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta+F(x, y, t), \text{ при } (x, y, t)\,\overline{\in}\,\Omega_0 \qquad (18)$$

будет удовлетворять уравнению (14). Для $(x, y, t)\in\Omega_0$ это очевидно. Если $(x, y, t)\,\overline{\in}\,\Omega_0$, то подставляя $u(x, y, t)$ и $u(x, y, 0)$ из (18) в (14), получим тождество.

Обратно, пусть $u(x, y, t)$ — решение уравнения (14). Согласно (14) и (15) функции $\psi(x, y, t)=u(x, y, t)$ при $(x, y, t)\in\Omega_0$, $\varphi(x, y)=$ $=u(x, y, 0)$ при $(x, y)\in S_0$ будут удовлетворять системе (16), (17). Лемма 2 доказана.

Ниже будет доказано, что $u(x, y, t)$ из (18) принадлежит классу A^{λ_0}. Имея в виду еще эквивалентность краевой задачи (1), (2) и интегрального уравнения (14), из леммы 2 следует

Лемма 3. *Краевая задача* (1), (2) *и система интегральных уравнений Фредгольма второго рода* (16), (17) *эквивалентны.*

Лемма 4. *Если* $a_0 = b_0 = d_0 = 0$, $c(x, y, t) \leqslant 0$, *то система* (16), (17) *однозначно разрешима.*

Доказательство. Поскольку система (16), (17) фредгольмова, достаточно доказать, что однородная система (16), (17) имеет только нулевое решение.

Пусть $\{\psi, \varphi\}$ — любое решение однородной системы (16), (17). Тогда $u(x, y, t)$ из (18) при $F \equiv 0$ будет решением однородной краевой задачи (1), (2). Из свойств ядер K и P следует, что $u \to 0$ при $r \to \infty$. Для таких $u(x, y, t)$ принцип максимума применим относительно решения однородной краевой задачи (1), (2). Согласно этому принципу $u(x, y, t) \equiv 0$. Из (18) и (17) следует, что $\psi(x, y, t) = u(x, y, t)$ при $(x, y, t) \in \Omega_0$ и $\varphi(x, y) = u(x, y, 0)$ при $(x, y) \in S_0$. Следовательно, $\psi(x, y, t) \equiv 0$, $\varphi(x, y) \equiv 0$. Лемма 4 доказана.

Из леммы 4 следует доказательство части а) теоремы 1. Докажем часть в) теоремы 1.

Пусть $c(x, y, t) = c_0 < 0$ в окрестности бесконечно удаленной точки, а в конечной части полупространства $t > 0$ может быть и положительной. Тогда однородная система (16), (17) ($F \equiv 0$) имеет конечное число линейно независимых решений и столько же условий разрешимости. Из эквивалентности краевой задачи (1), (2) и системы (16), (17) следует, что задача (1), (2) также фредгольмова, причем число линейно независимых решений однородной краевой задачи (1), (2) и однородной системы (16), (17) равны.

Можно показать, что условия разрешимости неоднородной краевой задачи (1), (2) имеют вид

$$\iint\limits_{t=0} f(x, y) \left.\frac{\partial W_j}{\partial t}\right|_{t=0} dx\, dy = 0, \; j = 1, 2, \cdots, k,$$

где $W_1, W_2, \cdots, W_k$ — полная систима линейно независимых решений однородной краевой задачи (1), (2).

Для доказательства части б) теоремы 1 введем нормы $f(x, y)$ и $u(x, y, t)$ по формулам

$$\|f\| = \sup_{t=0} \left(|f| \cdot e^{-(\lambda_0 - \varepsilon) r_0}\right); \; \|u\| = \sup_{t>0} \left(|u| \cdot e^{-(\lambda_0 - \varepsilon) r}\right).$$

Очевидно, что $|u(x, y, t)| \leqslant \|u\| \cdot e^{(\lambda_0 - \varepsilon) r}$.

Лемма 5. *Решение краевой задачи* (1), (2) *из класса* A^{λ_0} *удовлетворяет неравенству*

$$\|u\| \leqslant \mathrm{Const} \cdot \|f\|. \tag{19}$$

Доказательство. Из (18) видно, что неравенство (19) достаточно доказать для функции $F(x, y, t)$. После замены переменных интегрирования в выражении $F(x, y, t)$ по формулам $\xi - x = \xi_1$, $\eta - y = \eta_1$, получим

$$F(x, y, t) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\xi + x, \eta + y)\left(\frac{\lambda_0 t}{\rho^2} + \frac{t}{\rho^3}\right) e^{-\lambda_0 \rho}\, d\xi\, d\eta,$$

где $\rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + t^2}$. Полагая $r_1 = \sqrt{x^2 + y^2}$, $r_2 = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$, будем иметь

$$|f(\xi + x, \eta + y)| \leqslant \|f\| \cdot e^{(\lambda_0 - \varepsilon)(r_1 + r_2)}. \tag{20}$$

Из (20) следует

$$|F(x, y, t)| \leqslant \|f\| \cdot e^{(\lambda_0 - \varepsilon) r_1} \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{(\lambda_0 - \varepsilon) r_2}\left(\frac{t}{\rho^3} + \frac{\lambda_0 t}{\rho^2}\right) e^{-\lambda_0 \rho}\, d\xi\, d\eta \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{Const} \cdot \|f\| \cdot e^{(\lambda_0 - \varepsilon) r_1} \leqslant \mathrm{Const} \cdot \|f\| \cdot e^{(\lambda_0 - \varepsilon) r}. \tag{21}$$

Из (21) следует неравенство (19) и принадлежность функций $u(x, y, t)$ из (18) классу A^{λ_0}. Теорема 1 полностью доказана.

Рассмотрим теперь общий случай краевой задачи (1), (2). Введением новой неизвестной функции $T(x, y, t)$ по формуле

$$u(x, y, t) = e^{-\frac{1}{2}(a_0 x + b_0 y + d_0 t)}\, T(x, y, t) \tag{22}$$

приходим к новой краевой задаче

$$\Delta T + \tilde{a}(x, y, t)\, T_x + \tilde{b}(x, y, t)\, T_y + \tilde{d}(x, y, t)\, T_t + \tilde{c}(x, y, t)\, T = 0, \tag{23}$$

$$T(x, y, 0) = \tilde{f}(x, y), \tag{24}$$

где $\tilde{a}(x, y, t) = a(x, y, t) - a_0$; $\tilde{b}(x, y, t) = b(x, y, t) - b_0$;

$$\tilde{d}(x, y, t) = d(x, y, t) - d_0,$$

$$\tilde{c}(x, y, t) = c(x, y, t) - \frac{1}{4}[a_0 a(x, y, t) + b_0 b(x, y, t) + d_0 d(x, y, t)],$$

$$\tilde{f}(x, y) = f(x, y) \cdot e^{\frac{1}{2}(a_0 x + b_0 y)},$$

$\tilde{c}_0 = -\tilde{\lambda}_0^2 = c_0 - \frac{1}{4}(a_0^2 + b_0^2 + d_0^2) < 0$, если $c_0 < 0$, где $\tilde{c}$ — значение $\tilde{c}(x, y, t)$ вне Ω_0.

Ясно, что задача (23), (24) аналогична задаче (1), (2) в случае $a_0 = b_0 = d_0 = 0$. Если $u(x, y, t) \in A^{m_0}$, где

$$m_0 = \sqrt{-c_0 + \frac{1}{4}(a_0^2 + b_0^2 + d_0^2)} - \frac{1}{2}\sqrt{a_0^2 + b_0^2 + d_0^2}.$$

то из (22) следует, что

$$|T(x, y, t)| \leqslant \mathrm{Const}\cdot e^{(m_0-\varepsilon)r}\cdot e^{\frac{1}{2}\sqrt{a_0^2+b_0^2+d_0^2}} = \mathrm{Const}\cdot e^{(\overline{\lambda}_0-\varepsilon)r}.$$

Пусть $c(x, y, t)\equiv 0$, но $a^2(x, y, t)+b^2(x, y, t)+d^2(x, y, t)\neq 0$. Если $f\to 0$, то нетрудно доказать единственность решения краевой задачи (1), (2) в классе функций, стремящихся к нулю при $r\to\infty$. Следует применить принцип максимума.

§ 2. Исследование краевой задачи (1), (3)

При изучении краевой задачи (1), (3) ключевую роль играет следующая краевая задача:

$$\Delta u(x, y, t)-\lambda^2 u(x, y, t)=0;\ t>0; \tag{25}$$

$$\frac{\partial u(x, y, 0)}{\partial t}-\alpha u(x, y, 0)=H(x, y); \tag{26}$$

где λ, α—постоянные ($\lambda>0$).

Пусть

$$\mu=\begin{cases}\lambda, & \text{при } \alpha\geqslant\lambda,\\ \sqrt{\lambda^2-\alpha^2}, & \text{при } -\lambda<\alpha<\lambda.\end{cases}$$

Краевую задачу (25), (26) рассмотрим в классе B^μ. $H(x, y)$ предполагается непрерывной и удовлетворяющей оценке

$$|H(x, y)|\leqslant \mathrm{Const}\cdot e^{(\mu-\varepsilon)r_0}. \tag{27}$$

Справедлива следующая

Теорема 4. *Если* $\lambda>0$, $\alpha>-\lambda$, *то краевая задача* (25), (26) *имеет, и притом единственное, решение в классе* B^μ *для любой непрерывной функции* $H(x, y)$, *удовлетворяющей оценке* (27).

Доказательство. Введением новой неизвестной функции по формуле

$$V(x, y, t)=\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t}-\alpha u(x, y, t) \tag{28}$$

из краевой задачи (25), (26) переходим к краевой задаче

$$\Delta V(x, y, t)-\lambda^2 V(x, y, t)=0;\ t>0; \tag{29}$$

$$V(x, y, 0)=H(x, y). \tag{30}$$

Поскольку $u\in B^\mu$, то из (28) следует, что $V\in A^\mu$. Для таких $V(x, y, t)$ краевая задача (29), (30) имеет единственное решение, которое дается формулой (7) при $g(x, y, t)\equiv 0$.

Пусть $V(x, y, t)$—решение краевой задачи (29), (30). Из соотношения (28) определим $u(x, y, t)$:

$$u(x, y, t)=\begin{cases} C(x, y)\, e^{\alpha t}-e^{\alpha t}\int\limits_{t}^{+\infty} e^{-\alpha\tau}\, V(x, y, \tau)\, d\tau, \text{ при } \alpha\geqslant\lambda, & (31а)\\ C(x, y)\, e^{\alpha t}+e^{\alpha t}\int\limits_{0}^{t} e^{-\alpha\tau}\, V(x, y, \tau)\, d\tau, \text{ при } -\lambda<\alpha<\lambda, & (31б)\end{cases}$$

где $c(x, y)$ — произвольная дважды непрерывно дифференцируемая функция. Отдельно рассмотрим два случая.

Случай $\alpha\geqslant\lambda\ (\mu=\lambda)$. Непосредственной подстановкой можно убедиться, что функция

$$u_0(x, y, t)=-e^{\alpha t}\int\limits_{t}^{+\infty} e^{-\alpha t}\, V(x, y, \tau)\, d\tau$$

является решением краевой задачи (25), (26). Она будет из класса B^{λ}, так как

$$|u_0(x, y, t)|\leqslant \mathrm{Const}\cdot e^{\alpha t}\cdot\int\limits_{t}^{+\infty} e^{-\alpha\tau+(\lambda-\varepsilon)\sqrt{x^2+y^2+\tau^2}}\, d\tau\leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{Const}\cdot e^{\alpha t}\int\limits_{t}^{+\infty} e^{(\lambda-\alpha-\varepsilon)\tau}\cdot e^{(\lambda-\varepsilon)[\sqrt{x^2+y^2+\tau^2}-\tau]}\, d\tau\leqslant \mathrm{Const}\cdot e^{(\lambda-\varepsilon)r}.$$

Для $\dfrac{\partial u_0}{\partial t}$ оценка (B) доказывается аналогично. Следовательно, $u(x, y, t)$, определенная формулой (31а), принадлежит классу B^{λ}, если $C(x, y)\cdot e^{\lambda t}$ принадлежит этому классу, что возможно тогда и только тогда, когда $C(x, y)\equiv 0$.

Таким образом, в случае $\alpha\geqslant\lambda$ краевая задача (25), (26) имеет решение и оно единственно. Это решение определяется формулой (31а) при $C(x, y)\equiv 0$.

Случай $-\lambda<\alpha<\lambda\ (\mu=\sqrt{\lambda^2-\alpha^2})$. В этом случае предполагается дополнительно, что первые производные $H(x, y)$ также удовлетворяют оценке (27) и в окрестности любой точки удовлетворяют условию Гёльдера.

Для того, чтобы $u(x, y, t)$ из (31б) удовлетворяла уравнению (25), необходимо и достаточно, чтобы $C(x, y)$ удовлетворяла уравнению

$$\Delta C(x, y)-(\lambda^2-\alpha^2)\, C(x, y)=-[\beta(x, y)+\alpha\gamma(x, y)],\quad (x, y)\in R^2, \tag{32}$$

где $\beta(x, y)=\left.\dfrac{\partial V(x, y, t)}{\partial t}\right|_{t=0}$, $\gamma(x, y)=(V(x, y, 0)$. При сделанных предположениях на $H(x, y)$ функции $\beta(x, y)$ и $\gamma(x, y)$ удовлетворяют условию Гёльдера в окрестности любой точки и оценке (27). Так как $u(x, y)$ из (31б) должна быть из класса B^{μ}, то должно выполняться условие

$$|u(x, y, 0)| = |C(x, y)| \leqslant \text{Const} \cdot e^{\sqrt{(\lambda^2-\alpha^2-\varepsilon)}\, r_0}. \tag{33}$$

Известно [7], что уравнение (32) имеет решение, которое дается формулой

$$C(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left\{ [\beta(\xi, \eta) + \alpha\gamma(\xi, \eta)] \int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{e^{\mu\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2} \cdot t}}{\sqrt{t^2-1}}\, dt \right\} d\xi\, d\eta. \tag{34}$$

Докажем, что $u(x, y, t)$, определенная формулой (31б), принадлежит классу B^{μ} ($C(x, y)$ задается формулой (34)).

Поскольку $C(x, y)$ и $V(x, y, t)$ принадлежат классу B^{μ}, то каждое слагаемое правой части (31б) принадлежит классу A^{λ}. Следовательно, $u(x, y, t)$, определенная формулой (31б), также принадлежит классу A^{λ}, т. е. $u(x, y, t)$ является решением задачи Дирихле для уравнения (25) в классе A^{λ} с граничным значением $u(x, y, t) = C(x, y)$ из класса A^{μ}. Из результатов § 1 следует, что это решение принадлежит также классу B^{μ}. Единственность решения уравнения (32) из класса B^{μ} доказывается аналогично лемме 1.

Можно показать, что при $\alpha = -\lambda$ единственность нарушается. Действительно, при $\alpha = -\lambda$, наряду с $u \equiv 0$, решением однородной краевой задачи (25), (26) является еще функция $u = C \cdot e^{-\lambda t}$, где C — произвольная постоянная. Таким образом, при $\alpha = -\lambda$ нет единственности даже в классе ограниченных функций.

Повторяя схему доказательства теоремы 1 и имея в виду теорему 4 и формулы (31), (34), нетрудно доказать теорему 2.

З а м е ч а н и е. Можно было получить все результаты этой статьи, заменяя условия (А) и (В) соответственно условиями

$$|u(x, y, t)| \leqslant \text{Const} \cdot \frac{e^{mr}}{r^{3+p}}, \tag{A'}$$

$$\left| \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} \right| \leqslant \text{Const} \cdot \frac{e^{mr}}{r^{3+p}}, \tag{Б'}$$

где p — произвольное положительное число.

Пользуясь случаем, выражаю благодарность профессору Н. Е. Товмасяну за постановку задачи и внимание к работе.

Кироваканский филиал
Ереванского политехнического
института им. К. Маркса

Поступила 21. XI. 1985
и 17. VI. 1987.

Վ. Վ. ԱՍԱՏՐՅԱՆ. Հիմնական եզրային խնդիրները երկրորդ կարգի փոփոխական գործակիցներով էլիպտիկ հավասարումների համար կիսատարածությունում (ամփոփում)

Աշխատանքում դիտարկվում են առաջին-երրորդ եզրային խնդիրները

$$\Delta u + a(x, y, t)\, u_x + b(x, y, t)\, u_y + d(x, y, t)\, u_t + c(x, y, t)\, u = 0$$

հավասարման համար $t > 0$ կիսատարածությունում։ Ենթադրվում է, որ հավասարման գործակիցներն անընդհատ դիֆերենցելի են $t \geq 0$ կիսատարածությունում և հաստատուն են անվերջ հեռու կետի շրջակայքում։

Եզրային խնդիրների լուծումները փնտրվում են էքսպոնենցիալ աճ ունեցող ֆունկցիաների դասում։ Ապացուցվում են լուծման գոյության և միակության թեորեմներ։ Եզրային խնդիրների լուծումը բերվում է Ֆրեդհոլմի երկրորդ սեռի ինտեգրալ հավասարումների սիստեմի լուծմանը։

V. V. ASATRIAN. *Basic boundarg-value problems for elliptic equations of second order with variable coefficients in half-space* (Summary)

In the paper the boundary-value problems I—III for the equation

$$\Delta u + a(x, y, t) u_x + b(x, y, t) u_y + d(x, y, t) u_t + c(x, y, t) u = 0$$

is considered in the half-space $t > 0$. It is assumed that the coefficients of equctions are continuously differentiable in the half-space $t \geq 0$ and become constant in the vinicity of the infinite point.

The solutions are found in the class of functions which have exponential increase by reduction to systems of Fredholm equations of second kind.

Theorems of existence and uniqueness of the solution are proved.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Г. Е. Шилов.* Математический анализ. Второй специальный курс, М., «Наука», 1965.
2. *В. П. Паламодов.* О корректных краевых задачах для уравнений в частных производных и полупространстве, Изв. АН СССР, Математика, 24, 1960, 381—386.
3. *А. Л. Павлов.* Об общих краевых задачах для дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами в полупространстве, Мат. сб., 103 (145), № 3(7), 1977, 367—391.
4. *Н. Е. Товмасян.* Общая граничная задача для систем дифференциальных уравнений в полуплоскости с нарушением условия Я. Б. Лопатинского, Дифференциальные уравнения, 20, № 1, 1984, 132—141.
5. *А. Н. Тихонов, А. А. Самарский.* Уравнения математической физики, М., «Наука», 1966.
6. *Н. Е. Товмасян.* Об устранимых особых точках эллиптических систем дифференциальных уравнений второго порядка на плоскости, Мат сб., 108 (150), № 1, 1979, 22—31.
7. *А. В. Бицадзе.* Уравнения математической физики, М., «Наука», 1976.