ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XXIII, № 1, 1988 Математика

УДК 517.43; 518.22

С. М. ОГАНЕСЯН

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА Т. ОРИИ ПОТЕНЦИАЛА В ПРОСТРАНСТВЕ $L_p(S)$ И ПРИБЛИЖЕНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ ИЗ $W_p^r(S)$ БЕСКОНЕЧНО ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫМИ ФИНИТНЫМИ ФУНКЦИЯМИ

1°. Пусть R_n, $n \geq 2$, — n-мерное евклидово пространство точек $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$; $S \subset R_n$ — ограниченное открытое множество; $\overline{S}$ и ∂S, соответственно, замыкание и граница S; $L_p(S)$ — банахово пространство функций с суммируемой p-ой степенью; $W_p^r(S)$ — пространство Соболева, которое состоит из функций, имеющих обобщенные производные до порядка r включительно и суммируемые со степенью p; $C_0^\infty(S)$ — множество бесконечно дифференцируемых финитных функций в S; $C^\infty(S)$ — множество бесконечно дифференцируемых функций в S; ($\overset{\circ}{W}{}_p^r(S)$ — собственное подпространство $W_p^r(S)$, полученное замыканием $C_0^\infty(S)$ в норме $W_p^r(S)$; $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ — оператор Лапласа $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right.$ — символ обобщенной производной); условие $\partial S \in C^r$ — граница множества S принадлежит классу C^r $(0 \leq r \leq \infty)$; S_j, $j=\overline{1, m}$ — ограниченные компоненты связности множества $S_1 = R_n \setminus \overline{S}$ (для односвязного S множества $S_j = \varnothing$); $D(\cdot)$ и $R(\cdot)$ — соответственно области определения и значения некоторого оператора.

Для удобства изложения вместо $L_p(S)$ будем писать также L_p.

Пусть распределение плотности σ в множестве S принадлежит пространству $L_p(S)$. Потенциал плотности $\sigma \in L_p(S)$ вычисляется по формуле

$$V_p(x) = V_p\sigma = f_n \int\limits_S J(x-y)\, \sigma(y)\, dy, \quad x \in R_n,$$

где $f_n = \begin{cases} (n-2)\,\omega_n f, & n \geq 3 \\ 4\pi f, & n=2; \end{cases}$

f — универсальная гравитационная постоянная; ω_n — площадь поверхности единичной сферы в R_n; $J(\cdot)$ — фундаментальное решение уравнения Лапласа, равное

$$J(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(n-2)\,\omega_n\, |x|_0^{n-2}}, & n \geq 3, \\ \dfrac{1}{2\pi} \ln |x|_0, & n=2; \quad |x|_0 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}\,. \end{cases}$$

Пусть операторы V_{pe} и V_{pi} — соответственно внешний и внутренний потенциалы плотности $\sigma \in V_p(S)$, т. е. $V_{pe}\sigma = V_p\sigma|x \in S_1$ и $V_{pi} = V_p\sigma|x \in S$; $N(S, p) = \{\sigma \in L_p(S): V_{pe}\sigma = 0\}$ — ядро оператора V_{pe}; $H(S, p) = \{\sigma \in L_p(S): \Delta\sigma(x) = 0, x \in S\}$ — подпространство гармонических функций в $L_p(S)$.

Сформулируем линейную обратную задачу теории потенциала: требуется восстановить плотность σ по заданному внешнему потенциалу $v(x)$ при фиксированном множестве S, т. е. необходимо решить операторное уравнение I рода

$$V_{pe}\sigma = v(x), \quad x \in S_1. \tag{1}$$

Так как функция $v(x)$ является гармонической на множестве S_1, то ее достаточно задавать на некотором множестве единственности $Q \subset S_1$. Поэтому при решении практических геофизических задач вместо уравнения (1) исследуется уравнение

$$\dot{V}_{pe}\sigma = v(x), \quad x \in Q, \tag{2}$$

где $v(x) \in L_p(Q)$.

2°. В последние годы интенсивно развиваются методы поиска общего решения задач (1) и (2) в классе распределения плотностей в различных функциональных пространствах [1—16]. Основные результаты работ [1—16] почти идентичны, получены, как правило, независимо и доказаны для гильбертового пространства $L_2(S)$.

Отличия связаны с условиями, накладываемыми на дифференциальные свойства границы ∂S. Многие из результатов для $L_2(S)$ с незначительными изменениями верны и для пространства $L_p(S)$, $1 < p < \infty$ [10].

Сформулируем основные результаты работ [1—16] в виде теорем.

Теорема 1. *Подпространство плотностей $N(S, p)$ задается при помощи равенств*

$$N(S, p) = \overline{\Delta \overset{\infty}{C_0}(S)} = \Delta \overset{\circ}{W}{}^{2}_{p}(S), \tag{3}$$

где $\overline{\Delta C_0^\infty(S)}$ — замыкание области значения оператора Лапласа, определенного на множестве $C_0^\infty(S)$, в норме пространства $L_p(S)$.

Всюду в дальнейшем, если из соответствующих формул понятно в какой норме замыкается множество, это специально не будет указываться.

Равенства (3) установлены в работах В. Н. Страхова [5, 6] для односвязной области S с границей $\partial S \in C^2$, в работе Н. Вэка [1] для жордановой области S, удовлетворяющей условию конуса, в работах Маргулиса [9—12] — для множества S с границей $\partial S \in C$. В работе [14] показано, что равенство (3) можно записать в виде $N(S, p) = R(\overset{*}{\Delta}_q)$, где $\overset{*}{\Delta}_q$ — оператор, сопряженный к оператору Лапласа $\Delta: L_q(S) \to L_q(S)$ (Δ_q), $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, т. е. оператор $\overset{*}{\Delta}_q$ совпадает с сужением оператора Δ_p на множество $\overset{\circ}{W}{}^{21}_{p}(S)$.

Теорема 2. *Для пространства $L_2(S)$ справедливо ортогональное разложение*

$$L_2(S) = N(S, 2) \oplus H(S, 2). \tag{4}$$

Для односвязной области S с границей $\partial S \in C^\infty$ теорема 2 фактически доказана П. С. Новиковым [17]. Равенство (4) установлены в работе [13] для односвязной области S с гладкой границей, в работах Н. Вэка [1] и Ф. Сансо [7] для жордановой области S, удовлетворяющей условию конуса, и в работах [9—12]—для множества с границей $\partial S \in C$.

Для пространства $L_p(S)$, $1 < p < \infty$, аналог условия ортогональности записывается при помощи равенства [11]

$$N(S, p)^\perp = H(S, q), \tag{5}$$

где $N(S, p)^\perp$ — совокупность всех непрерывных линейных функционалов на $L_p(S)$, обращающихся тождественно в нуль на $N(S, p)$.

Таким образом, при $n = 2$ общее решение задачи (1) или (2) представимо в виде

$$\bar{\sigma} = \sigma_{\text{гар}} + \Delta\varphi, \tag{6}$$

где $\sigma_{\text{гар}} \in H(S, 2)$—нормальное решение уравнения (1) или (2), φ—произвольная функция из подпространства $\mathring{W}_p^r(S)$.

Более подробно история вопроса построения тел с нулевым внешним потенциалом приведена в работе [16].

Обозначим через $\tilde{f}$ продолжение функции f, определенной на множестве S, на все пространства R_n вида

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in S; \\ 0, & x \in R_n \setminus S. \end{cases}$$

В этих обозначениях [18, 19] $\dot{W}_p^r(S) = \{f \in W_p^r(S);\ \tilde{f} \in W_p^r(R_n)\}$ — множество функций из пространства $W_p^r(S)$, продолженные нулем с сохранением класса.

Во многих вопросах [18—22], в частности для нахождения $\sigma_{\text{гар}}$]10, 14], важное значение имеет установление условий на границу ∂S множества S, при которых справедливо равенство

$$\mathring{W}_p^r(S) = \dot{W}_p^r(S). \tag{7}$$

Равенство (7) для области S с регулярной границей ∂S установлены С. Л. Соболевым [21, 22] и С. М. Никольским [20]. В работе Г. Г. Казаряна [18] равенство (7) доказано для области S, допускающей локальный сдвиг. При $p > n$ равенство (7) доказано В. И. Буренковым [19] для неограниченного S с границей $\partial S = \partial \bar{S}$.

Для решения рассматриваемых в статье вопросов введем

Определение. 1. Пространство $L_p(S)$ разложимо в полупрямую сумму, если для подпространства $K \subset L_p(S)$ существует такое замкнутое множество F, что $K \cap F$ равно нулевому элементу и алгебраическая сумма K и F совпадает с $L_p(S)$.

Разложение пространства $L_p(S)$ в полупрямую сумму обозначим следующим образом: $L_p(S) = K \oplus F$.

Пусть линейный непрерывный оператор $A: L_{p_1}(S) \to L_{p_1}(Q)$, $N_A = \{\sigma : A\sigma = 0\}$; $A^*: L_{q_1}(Q) \to L_{q_1}(S)$ —оператор, сопряженный к A, $N_{A^*} = \{\varphi : A^*\varphi = 0\}$.

Рассмотрим следующую задачу:

$$\min \frac{1}{p_1} \|\sigma - \sigma_0\|^{p_1}_{L_{p_1}} \tag{10}$$

при ограничении

$$A\sigma = b, \tag{11}$$

где $\|\cdot\|_{L_{p_1}}$—норма некоторого элемента из L_{p_1}, σ_0—фиксированный элемент, b—заданный элемент.

Если при заданном b уравнение (11) разрешимо, то задача (10) (11), в силу равномерной выпуклости пространства $L_p(S)$, $1 < p < \infty$, имеет единственное решение $\bar{\sigma}$, которое совпадает с обобщенным нормальным решением уравнени (11) по А. Н. Тихонову [23, 24].

Настоящая статья посвящена доказательству теорем 1 и 2, равенств (5)—(7) в пространстве $L_p(S)$, $1 < p < \infty$, для ограниченного открытого множества S с границей ∂S, удовлетворяющей условиям: $\partial S = \partial \bar{S}$ и $\operatorname{mes} \partial S = 0$ (n-мерная лебегова мера). В связи с этим возникла необходимость в параграфе 1 обобщить теорию двойственного метода решения линейной некорректной задачи для гильбертового пространства, разработанную в работах [25—27, 14], на случай банахового пространства $L_p(S)$, $1 < p < \infty$.

На основании этого обобщения построен устойчивый алгоритм нахождения элемента $\bar{\sigma}$. Показано, что для любого подпространства K пространство $L_p(S)$ разложимо в специальную полупрямую сумму и множество нормальных решений уравнения (11) совпадает с множеством

$$\overline{|A^*\varphi|^{q_1-2}\, \overline{A^*\varphi}},$$

где $|\cdot|$—символ абсолютной величины. Далее в параграфе 2 для множества S с границей

$$\partial S = \partial \bar{S}; \ \operatorname{mes} \partial S = 0 \tag{12}$$

доказывается, что не существует гармонической функции, имеющей нулевой внешний потенциал.

Используя результаты параграфов 1 и 2 в § 3 доказываются выше перечисленные теоремы и равенства. Далее показано, что пересечение $D(\Delta)$ и $N(S, p)$ принадлежит пространству $W_p^2(S)$.

Для множества S с границей ∂S, принадлежащей классу Липшица, разработан алгоритм построения тел с нулевым внешним потенциалом.

§ 1. Двойственный метод решения линейной некорректной задачи в пространстве $L_p(S)$. Разложение $L_p(S)$ в специальную полупрямую сумму

1°. Для решения задачи (10), (11) двойственным методом рассмотрим следующий функционал Лагранжа [28]:

$$L[\sigma, \varphi] = \frac{1}{p_1} \|\sigma - \sigma_0\|_{L_{p_1}}^{p_1} - \langle A\sigma - b, \varphi \rangle, \tag{13}$$

где $\varphi \in L_{q_1}$, $\langle , \rangle$ — каноническое спаривание пары сопряженных пространств.

Так как пространство L_{p_1} равномерно выпукло, то для любого b и фиксированного φ существует единственный элемент σ_φ, минимизирующий функционал Лагранжа по переменной σ, который является решением уравнения [24, 28, 29]

$$|\sigma - \sigma_0|^{p_1-2} (\sigma - \sigma_0) = A^* \varphi. \tag{14}$$

Так как для функции $y_1 = |x_1|^{p-2} \cdot x_1$ при $1 < p < \infty$ существует обратная функция $x_1 = |y_1|^{q - \frac{1}{2}} y_1$, то на основании уравнения (14) и свойств градиента нормы в банаховом пространстве [29] легко можно показать, что целевой функционал двойственной задачи к задаче (10), (11)

$$\psi(\varphi) = \min_{\sigma \in L_{p_1}} L[\sigma, \varphi] = -\frac{1}{q_1} \|A^* \varphi\|_{L_{p_1}'}^{q_1} + \langle b, \varphi \rangle - \langle \sigma_0, A^* \varphi \rangle. \tag{15}$$

Двойственная задача к задаче (10), (11) заключается в нахождении

$$\max_{\varphi \in L_{q_1}} t(\varphi). \tag{16}$$

Пусть задача (10), (11) разрешима, тогда имеет место

Теорема 3. *Для разрешимости задачи* (16) *необходимо и достаточно выполнения равенства*

$$\bar{\sigma} - \sigma_0 = |A^* \bar{\varphi}^*|^{q_1-2} A^* \bar{\varphi}^*, \tag{17}$$

где $\bar{\varphi}^*$ — *любое решение уравнения*

$$A(|A^* \varphi|^{q_1-2} A^* \varphi + \sigma_0) = b. \tag{18}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть задача (16) разрешима. Тогда любое решение задачи (16) удовлетворяет уравнению (18), для обобщенного нормального решения $\bar{\sigma}$ задачи (10), (11) справедливо равенство

$$|\bar{\sigma} - \sigma_0|^{p_1-2} (\bar{\sigma} - \sigma_0) = A^* \bar{\varphi}^*, \tag{19}$$

а элемент $\tilde{\sigma} = \sigma_0 + |A^* \bar{\varphi}^*|^{q_1-2} A^* \bar{\varphi}$ является решением уравнения (11).

Известно [29], что если $\sigma \neq 0$, то $\operatorname{grad} \|\sigma\|_{L_{p_1}} = \|\sigma\|^{1-p_1} \cdot |\sigma|^{p_1-2}$ и $\|\operatorname{grad} \|\sigma\|_{L_{p_1}}\| = 1$. Поэтому норма $\||\bar{\sigma} - \sigma_0|^{p_1-2} (\bar{\sigma} - \sigma_0)\| = \|\bar{\sigma} - \sigma_0\|_{L_{p_1}}^{p_1-1}$. На основании равенства (19) $\|\bar{\sigma} - \sigma_0\|_{L_{p_1}}^{p_1-1} = \|A^* \bar{\varphi}^*\|_{L_{p_1}}$ или $\|\bar{\sigma} - \sigma_0\|_{L_{p_1}} = \|A^* \bar{\varphi}^*\|_{L'_{p_1}}^{q_1-1}$. Аналогично $\|\tilde{\sigma} - \sigma_0\| = \|A^* \bar{\varphi}^*\|_{L'_{q_1}}^{q_1-1}$, т. е $\|\tilde{\sigma} - \sigma_0\|_{L_{p_1}} = \|\bar{\sigma} - \sigma_0\|_{L_{p_1}}$.

Так как задача (10), (11) разрешима однозначно, $\tilde{\sigma}$ является решением уравнения (11), то из равенства $\|\tilde{\sigma} - \sigma_0\| = \|\bar{\sigma} - \sigma_0\|$ следует совпадение элементов $\bar{\sigma}$ и $\tilde{\sigma}$ и справедливость соотношения (17).

Достаточность. Так как уравнение (18) есть градиент функционала (15) приравненный к нулю, то достаточность условия (17) для разрешимости задачи (16) очевидна. Теорема 3 доказана.

Следствие 1. *Если уравнение* (11) *нормально разрешимо, то задачи* (10), (11) *и* (16) *разрешимы одновременно и их решения удовлетворяют равенствам* (17), (19).

Принимая в равенствах (17) — (19) оператор А, совпадающий с единичным, $\sigma_0 \equiv 0$ на основании следствия 1, результатов Ф. Браудера и Е. И. Линькова [29, с, 314] и свойств функции $y_i = |x_i|^{p-2} x_i$, $1 < p < \infty$, нетрудно показать, что справедлива

Теорема 4. *Градиент функционала* $\frac{1}{p}\|\sigma\|^p_{L_p}$, $1 < p < \infty$, *является гомеоморфизмом* L_p *на* L_q, *обратный к нему оператор совпадает с градиентом функционала* $\frac{1}{q}\|\varphi\|^q_{L_q}$.

Известно [30], что в равномерно выпуклых пространствах оператор метрического проектирования на замкнутое выпуклое множество является корректным в смысле Адамара. Поэтому на основании определения 1, теорем 3 и 4 имеет место

Следствие 2. *Для любого подпространства* $K \subset L_p$, *элементы метрические проекции которых на* K *совпадают с нулевым элементом, образуют замкнутое множество* $F = \frac{1}{q}\,\mathrm{grad}\,\|\varphi\|^q_{L_q} = |\varphi|^{q-2}\varphi$, *где элементы* φ *принадлежат множеству* $K^{\perp}$, *и пространство* $L_p(S)$ *разложимо в полупрямую сумму*

$$L_p(S) = K \dot{\oplus} F = K \dot{\oplus} |\varphi|^{q-2}\varphi, \quad \varphi \in K^{\perp}. \tag{20}$$

Следствие 3. *Для пространств* L_{p_1} *и* L_{q_1} *имеют место представления в виде специальной полупрямой суммы*

$$L_{p_1} = N_A \dot{\oplus} |\overline{A^*\varphi}|^{q_1-2}\,\overline{A^*\varphi} = N_A \dot{\oplus} F_1, \quad \varphi \in L_{q_2}, \tag{21}$$

$$L_{q_2} = N_{A^*} \dot{\oplus} |\overline{A\sigma}|^{p_2-2}\,\overline{A\sigma} = N_{A^*} \dot{\oplus} F_2, \quad \sigma \in L_{p_1}. \tag{22}$$

Замечание 1. Для любого $b \in R(A)$ нормальное решение уравнения (11) принадлежит множеству $F_1 = |\overline{A^*\varphi}|^{q_1-2}\cdot\overline{A^*\varphi}$. При $p_1 = q_2 = 2$ равенства (21), (22) являются ортогональными разложениями в прямую сумму для гильбертового пространства $L_2(S)$.

2°. Известно [23, 24], что нахождение решения задачи (10), (11) элемента $\bar{\sigma}$ является некорректной задачей. Построим регуляризующий алгоритм двойственного метода нахождения элемента $\bar{\sigma}$. Для этого проведем такое расширение понятия решения задачи (16), чтобы она была разрешима одновременно с разрешимостью задачи (10), (11). Пусть φ_0—произвольный элемент пространства L_{q_2}.

Определение 2. Задача (16) разрешима в обобщенном смысле, если существует такая последовательность $\{\varphi_n\}$, $\varphi_n \in F_2 + \varphi_0$, что последовательность $\sigma_n = \{\sigma_0 + |A^*\varphi_n|^{q_1-2} A^*\varphi_n\}$ сходится в норме L_{p_1} к элементу $\bar{\sigma}$.

Из определения 2, теоремы 4 и разложения (21) следует, что если задача (16) разрешима в обобщенном смысле, то $\{A^*\varphi_n\}$ сходится в норме пространства L_{q_1}.

Для построения последовательности $\{\varphi_n\}$, удовлетворяющей определению 2, рассмотрим следующие параметрические функционалы Тихонова и Лагранжа [26, 30, 14]:

$$T^{\alpha}[\sigma] = \frac{1}{p_2}\|A\sigma - b\|^{p_2}_{L_{p_2}} + \alpha_1\frac{1}{p_1}\|\sigma - \sigma_0\|^{p_1}_{L_{p_1}} - \alpha_1 < \sigma,\ A^*\varphi_0>; \quad (23)$$

$$T^{\alpha}_{gb}[\varphi] = \frac{1}{q_1}\|A^*\varphi\|^{q_1}_{L_{q_1}} - <b,\ \varphi> + <\sigma_0,\ A^*\varphi> + \alpha\cdot\frac{1}{q_2}\|\varphi - \varphi_0\|^{q_2}_{L_{q_2}}\cdot \quad (24)$$

$$L^{\alpha}[\sigma,\ \varphi] = \frac{1}{p_1}\|\sigma - \sigma_0\|^{p_1}_{L_{p_1}} - <A\sigma - b,\ \varphi> - \alpha\frac{1}{q_2}\|\varphi - \varphi_0\|^{q_2}_{L_{q_2}}, \quad (25)$$

где α_1, $\alpha > 0$—параметр регуляризации.

Функционалы (23)—(25) связаны, соответственно, с задачами 10), (11), (13) и (13).

В силу равномерной выпуклости пространств L_{p_1}, L_{p_2}, L_{q_1}, L_{q_2} имеем [24, с 126], что для любых α_1, $\alpha > 0$ и b существуют:

а) единственные элементы σ^{α_1} и φ^{α}, минимизирующие соответственно функционалы Тихонова (23) и (24), которые являются решениями уравнений

$$A^*(|A\sigma - b|^{p_2-2}(A\sigma - b)) + \alpha_1|\sigma - \sigma_0|^{p_1-2}(\sigma - \sigma_0) = \alpha_1 A^*\varphi_0, \quad (26)$$

$$A(|A^*\varphi|^{q_1-2}A^*\varphi + \sigma_0) + \alpha|\varphi - \varphi_0|^{q_2-2}(\varphi - \varphi_0) = b; \quad (27)$$

б) единственная седловая точка $(\sigma^{\alpha},\ \bar{\varphi}^{\alpha})$ функционала Лагранжа 25), элементы которого удовлетворяют системе уравнений Эйлера

$$\begin{cases} |\sigma - \sigma_0|^{p_1-2}(\sigma - \sigma_0) = A^*\varphi, & (28)\\ A\sigma + \alpha|\varphi - \varphi_0|^{q_2-2}(\varphi - \varphi_0) = b. & (29)\end{cases}$$

Из анализа уравнений (26) — (29), теоремы 4 и равенств (19), (20) видно, что при $\alpha_1 = \alpha^{p_2-1}$, $\sigma^{\alpha_1} = \sigma^{\alpha}$, $\varphi^{\alpha} = \bar{\varphi}^{\alpha}$,

$$\varphi^{\alpha} - \varphi_0 = -\frac{1}{\alpha^{p_2-1}}|A\sigma^{\alpha} - b|^{p_2-2}(A\sigma^{\alpha} - b). \quad (30)$$

$$\sigma^{\alpha} - \sigma_0 = |A^*\varphi^{\alpha}|^{q_1-2}A^*\varphi^{\alpha}. \quad (31)$$

Пусть $U_1 = \sigma_0 + F_1$ и $U_2 = \varphi_0 + F_2$.

Теорема 5. *Если при заданном b уравнение* (11) *разрешимо, то при $\alpha_1 \to 0$ последовательность $\{\sigma^{\alpha_1}\}$ сходится к $\bar{\sigma}$ в норме L_{p_1}. Задача* (16) *разрешима в обобщенном смысле одновременно с разрешимостью задачи (10), (11).*

Доказательство. Пусть уравнение (11) разрешимо. Из равенств (30) и (31) следует, что для любых α_1, $\alpha > 0$ элементы σ^{α_1} и φ^{α} принадлежат, соответственно, замкнутым множествам U_1 и U_2. Так как U_1 является множеством единственности для задачи (11), то на основании работы [24] при α_1, $\alpha \to 0$ имеет место сходимость $\{\sigma^{\alpha_1}\}$ к элементу $\bar{\sigma}$ в норме L_{p_1} и разрешимость задачи (16) в обобщенном смысле. Теорема 5 доказана.

Регуляризующий алгоритм двойственного метода нахождения приближения элемента $\bar{\sigma}$ состоит из трех этапов:

1. Определении последовательности $\{\varphi^{\alpha_n}\}$ путем решения (27) $(\alpha_n \to 0)$.

2. Вычислении $\{\sigma^{\alpha_l}\}$ по формуле (31).

3. Отбор σ^{α_n} по критерию невязки [23].

Преимущество двойственного метода нахождения приближения элемента $\bar{\sigma}$ при решении практических обратных задач геофизики (теории потенциала) по сравнению с другими известными методами [23, 24] заключается в том, что двойственный метод позволяет при помощи декомпозиции исходной задачи на две подзадачи уменьшить размерность решаемой задачи на единицу. Этим определяется большое практическое удобство двойственного метода при его реализации на ЭВМ [27].

З а м е ч а н и е 2. Результаты параграфа 1 остаются в силе для пары рефлексивных локально выпуклых пространств B_1 и B_2, которые вместе со своими сопряжениыми являются рефлексивными локально выпуклыми пространствами Ефимова—Стечкина.

§ 2. Доказательства основных теорем

1°. Более детальная конкретизация равенств (17)—(22) для задачи (10), (2) требует установления справедливости результатов, которые являются важными в работе.

Пусть для множества S выполняются условия (12). Тогда имеет место

Т е о р е м а С. *Если гармоническая функция* $\sigma_\Gamma \in L_p(S)$, $1 < p < \infty$, *имеет нулевой внешний потенциал, то* $\Delta \tilde{\sigma}_\Gamma$ *является обобщенной функцией, носитель которой сосредоточен на* ∂S.

Д о к а з а т е л ь с в о. Воспользуемся способом фиктивных областей [31, 32]. Пусть ограниченная область S' с $\partial S' \in C^\infty$ полностью содержит множество S, т. е. $\bar{S} \subset S'$, и $\forall j$, $j = \overline{1, m}$ множество $S_j \setminus S'$ есть область.

В силу условий, наложенных на S', имеем [22], что для $\sigma \in N(S, p)$ потенциал $V_p(x)$ в области S' принадлежит подпространству $\mathring{W}_p^2(S')$ и $\Delta V(x) = -f_n \tilde{\sigma}(x)$, $x \in R_n$.

Известно [22, 10], что потенциал и его первые частные производные гармонической функции являются непрерывными функциями на всем пространстве R_n. Так как $\partial S = \partial \bar{S}$ и $\operatorname{mes} \partial S = 0$, то потенциал V_p и его первые частные производные всюду на ∂S равен нулю. Сужение функции $\bar{\sigma}_\Gamma$ на область S' обозначим через $\bar{\sigma}_{\Gamma 1}$. Очевидно, что потенциалы σ_Γ и $\tilde{\sigma}_{\Gamma 1}$ совпадают и $\bar{\sigma}_{\Gamma 1} \in N(S', p)$.

На основании теоремы 1, в силу условия $\partial S' \in C^\infty$, в области S' существует последовательность бесконечно дифференцируемых финитных функций $\varphi_k \in C_0^\infty(S')$, которые сходятся в норме $L_p(S')$ к функции $\tilde{\sigma}_{\Gamma 1}$ и имеют нулевой внешний потенциал, т. е.

$$\{\varphi_k\} \xrightarrow{L_p(S')\,\sim} \sigma_{\Gamma 1}, \ \forall_k\ \varphi_k \in N(S', p) \cap C_0^\infty(S').$$

Пусть V_{plk} — внутренний потенциал функции φ_k. Очевидно, что $V_{plk} \in C_0^\infty(S')$ и последовательность $\{V_{plk}\} \to V_p(x)$ в норме пространства $\overset{\circ}{W}{}_p^2(S')$. На основании работ [13, 14] имеем, что V_{plk} является решением задачи

$$\Delta^2 V(x) = -f_n \Delta \varphi_k, \ x \in S' \tag{32}$$

при граничных условиях

$$V\Big|_{\partial S'} = \frac{\partial V}{\partial n}\Big|_{\partial S'} = 0, \tag{33}$$

где $\Delta^2 = \Delta(\Delta)$ — бигармонический оператор.
Следовательно для произвольного $\psi \in C_0^\infty(S)$ имеем

$$\int_{S'} \Delta^2 V_{plk} \psi\, dx = \int_{S'} V_{plk} \Delta^2 \psi\, dx = -f_n \int_{S'} \varphi_k \Delta \psi\, dx. \tag{34}$$

Так как последовательности $\{V_{plk}\}$ и $\{\varphi_k\}$ сходятся, соответственно, к $V_p(x)$ и $\tilde{\sigma}_{\Gamma 1}$, то для любого $\psi \in C_0^\infty(S')$ [22, с. 77]

$$\lim_{k\to\infty} \int_{S'} \Delta^2 V_{plk} \psi\, dx = \int_{S'} V_p(x) \Delta^2 \psi\, dx = -f_n \int_{S'} \tilde{\sigma}_{\Gamma 1} \Delta \psi\, dx. \tag{35}$$

Из сходимости $\{V_{plk}\}$ к $V_p(x)$ и равенств (35) следует:
а) $\{\Delta^2 V_{plk}\}$ сходится к обобщенной функции F, носитель которой сосредоточен на ∂S, т. е. $\operatorname{supp} F \subset \partial S$;
б) функция $V_p(x) \in \overset{\circ}{W}{}_p^2(S')$ является единственным решением задачи (32), (33) с правой частью F [22, с. 567], т. е.

$$\int_{S'} \Delta^2 V_p \psi\, dx = \int_{S'} F \cdot \psi\, dx = -f_n \int_{S'} \tilde{\sigma}_{\Gamma 1} \Delta \psi\, dx. \tag{36}$$

Очевидно, что обобщенная функция $F = \Delta \tilde{\sigma}_\Gamma$. Теорема доказана.

На основании теоремы 6 при $p = 2$ справедливо

Следствие. 4. *Если* $\sigma_\Gamma \in N(S, 2)$, *то* $\sigma_\Gamma \equiv 0$.

Доказательство. Так как скалярное произведение в $L_2(S)$ является непрерывной функцией, то на основании соотношений (3), равенства (35) и (36) верны и для любого $\psi \in \overset{\circ}{W}{}_2^2(S')$. Следовательно, обобщенная функция $F=\Delta\tilde{\sigma}_\Gamma$ принадлежит сопряженному к $\overset{\circ}{W}{}_2^2(S')$ пространству, т. е. $F\in W_2^{-2}(S')$ [22].

Подставим в равенство (36) $\psi=V_p$. Учитывая известное представление об обобщенных функциях из пространства $W_2^{-2}(S')$, а также, что $\operatorname{supp}F\subset\partial S$ и непрерывные функции $V_p(x)$ и его первые частные производные всюду на ∂S равны нулю, получим равенства $\int\limits_{S'}F\cdot V_p\,dx=$

$=-f_n\int\limits_S\sigma_\Gamma^n\,dx=0$, т. е. функция σ_Γ тождественно равна нулю.

Замечание 3. Для $n=2,3$ следствие 4 установлено в работе [16].

§ 3. Описания множества нормальных решений и подпространства $N(S, p)$ линейной обратной задачи теории потенциала. Дифференциальные свойства плотностей с нулевым внешним потенциалом

1°. Так как оператор задачи (2) $V_{pe}:L_p(S)\to L_p(Q)$ является ограниченным [6, 14], то для V_{pe} существует сопряженный оператор $V_{pe}^*:L_q(Q)\to L_q(S)$, который задается при помощи соотношения

$$V_{pe}^*\varphi=f_n\int\limits_Q J(x-y)\,\varphi(x)\,dx,\ y\in S,\ \varphi\in L_q(Q)\tag{37}$$

и $R(V_{pe}^*)\subset H(S, q)$.

Следовательно, разложение (20) для задачи (10), (2) примет вид.

$$L_p(S)=N(S, p)\oplus\overline{|V_{pe}^*\varphi|^{q-2}\,V_{pe}^*\varphi|},\ \varphi\in L_q(Q),\tag{38}$$

где замкнутое множество $\overline{|V_{pe}^*\varphi|^{q-2}}\,\overline{V_p^*\varphi}$ совпадает с множеством нормальных решений уравнения (2). Отметим еще раз, что $N(S, p)^\perp=\overline{V_{pe}^*\varphi}$.

Двойственное соотношение к разложению (38) в пространстве $L_q(S)$ следующее:

$$L_q(S)=|N(S, p)|^{p-2}\cdot N(S, p)\oplus\overline{V_{pe}^*\varphi}.\tag{39}$$

Меняя местами индексы p и q, получим

$$L_p(S)=|N(S, q)|^{q-2}\,N(S, q)\oplus\overline{V_{pn}^*\varphi}.\tag{40}$$

Известно [10, 22], что для множества S справедливы включения

$$\Delta\,C_0^\infty(S)\subset\Delta\overset{\circ}{W}{}_p^2(S)\subset\Delta\overset{\circ}{W}{}_p^2(S)\subset N(S, p)\tag{41}$$

и равенство

$$[\overline{\Delta_p C_0^\infty}]^\perp=H(S, q).\tag{42}$$

Для неограниченного замкнутого всюду разрешимого оператора Δ_p соотношение (20) также справедливо и на основании равенства (42) имеют место разложения

$$L_q(S) = \overline{\Delta_p C_0^\infty}|^{p-2}\, \overline{\Delta_p C_0^\infty} \oplus H(S, q), \tag{43}$$

$$L_p(S) = \overline{\Delta_p C_0^\infty} \oplus H(S, q)|^{q-2}\, H(S, q) \tag{44}$$

и

$$L_p(S) = H(S, p) \oplus \overline{\Delta_q C_0^\infty}|^{q-2}\, \overline{\Delta_q C_0^\infty}. \tag{45}$$

Справедливость теорем 1 и 2, равенств (5), (6) для множества S, удовлетворяющего условиям (12), в пространстве $L_p(S)$, $1<p<\infty$ устанавливается на основании следующих рассуждений. Из следствия 4 и ортогонального разложения в прямую сумму $L_2(S)=H(S,2) \oplus \overline{\Delta_2 C_0^\infty} = \overline{V_{2e}^* \varphi} \oplus N(S, 2)$ непосредственно следуют равенства $H(S, 2) = \overline{V_{2e}^* \varphi}$ и $N(S,2) = \overline{\Delta_2 C_0^\infty}(S)$. Учитывая [33, с. 78] тождественное вложение $L_p(S)$ в $L_k(S)$ при $p>k\geqslant 1$ получим, что для $p>2$

$$H(S, p) = \overline{V_{qe}^* \varphi} \tag{46}$$

и

$$N(S, p) = \overline{\Delta_p C_0^\infty}(S). \tag{47}$$

Из рефлексивности пространств $L_p(S)$, $1<p<\infty$ и равенств (39)—(42), (44), (45) следует, что соотношения (46) и (47) имеют место и для $1<p<2$.

Из равенства (46) вытекает

Следствие 5. *Множество гармонических функций в $\overline{S}$ всюду плотно в $H(S, p)$, $1<p<\infty$.*

Из равенств (47) и (36) следует, что следствие 4 справедливо и для $1<p<\infty$.

Теорема 7. *Для множества S, удовлетворяющего условиям* (12) *при $2\leqslant r<\infty$ и $1<p<\infty$, имеет место равенство* (7).

Доказательство. На основании следствия 4 и включений (41) справедливо равенство

$$\Delta \dot{W}_p^2(S) = \Delta \dot{W}_p^2(S) = \Delta \overline{C_0^\infty}(S). \tag{48}$$

Следовательно, элементы $\dot{W}_p^2(S)$ и $\dot{W}_p^2(S)$, для которых выполняется равенство (48), отличаются друг от друга на гармоническую функцию $V_p \in \dot{W}_p^2(S)$. Известно [9], что функции из $\dot{W}_p^2(S)$ являются внутренними потенциалами элемента $\sigma \in \Delta \dot{W}_p^2(S)$.

Так как функции $V_p \in \dot{W}_p^2(S)$ является гармонической на множестве S, то $\sigma = \Delta V_p \equiv 0$ и $\sigma \equiv 0$. Следовательно $\dot{W}_p^2(S) = \dot{W}_p^2(S)$. Из включения $\dot{W}_p^{r_1}(S) \subset \dot{W}_p^{r_2}(S)$, $r_1 > r_2$, следует справедливость равенства (7) для $2\leqslant r<\infty$. Теорема доказана.

На основании теоремы 4 и равенств (38), (44) для множества с $\partial S = \partial \overline{S}$ и mes $\partial S = 0$ справедливо

Следствие 6. *Множество нормальных решений уравнения (2) совпадает с множеством* $|H(S, q)|^{q-2} H(S, q)$. *Нормальные решения уравнения (2) являются бесконечно дифференцируемыми функциями за исключением нулевых точек.*

Замечание 4. Следствие 6 для множества S с $\partial S \in C$ установлено в работе [12].

Для множества S, удовлетворяющего условиям (12), равенства (38) и (40) принимают вид

$$L_p(S) = \Delta \dot{W}_p^2(S) \oplus |H(S, q)|^{q-2} H(S, q) \tag{49}$$

и

$$L_p(S) = H(S, p) \oplus |\Delta W_q^2(S)|^{q-2} \Delta W_q^2(S). \tag{50}$$

Замечание 5. На основании работы [12] для неограниченного открытого множества S, удовлетворяющего условиям (12), расположенного в полупространстве $x_n > 0$, следствие 4, а вместе с ним и равенства (5)—(7). (49), (50) остаются в силе с заменой пространства $W_p^r(S)$ на пространство $L_p^r(S)$ [21, 22].

2°. Для исследования дифференциальных свойств функций $\sigma \in N(S, p)$ сформулируем следующую задачу: требуется по заданному $b \in L_p(S)$ определить на множестве S такую функцию $\sigma \in W_p^2(S)$, которая удовлетворяет системе уравнений

$$\begin{cases} \Delta \sigma = b, & (51) \\ V_{pr}\sigma = 0, \quad b \in L_p(S), \quad \sigma \in W_p^2(S). & (52) \end{cases}$$

Так как для произвольного $b \in L_p(S)$ уравнение (51) имеет решение, принадлежащее пространству $W_p^2(S)$ [22, с. 239], аналоги разложения (49) и (50) имеют место и для пространства $W_p^2(S)$, то на основании равенства (3) легко следует

Теорема 8. *Для любого* $b \in L_p(S)$ *существует единственное решение* σ_0 *задачи* (51), (52) *принадлежащее пространству* $W_p^2(S)$, *которое определяется из системы уравнений*

$$\begin{cases} \sigma = -\dfrac{1}{f_n} \Delta \varphi, & (53) \\ \Delta \sigma = b, & (54) \end{cases}$$

где $\varphi \in W_p^2(S)$.

Потенциал функции $\bar{\sigma}_0 \in N(S, p)$—элемент $\bar{\varphi}_0 \in W_p^2(S) \cap W_p^4(S)$, на основании равенств (53), (54), определяется из уравнения

$$\Delta_p \dot{\Delta}_q \varphi = -f_n b, \tag{55}$$

которое при $n = 2$ подобно уравнению изгиба тонкой пластинки с защемленным краем [32, 34]. Когда граница множества S принадлежит классу Липшица, уравнение (55) принимает естественный вид

$$\Delta^2 \varphi = -f_n b \tag{56}$$

при граничных условиях

$$\varphi\Big|_{\partial S} = \frac{\partial \varphi}{\partial n}\Big|_{\partial S} = 0. \tag{57}$$

На основании задачи (56), (57) в работах [13—15] разработан регуляризующий однопараметрический алгоритм эквивалентного перераспределения масс с нулевым внешним потенциалом.

Рассмотрим задачу

$$\min \frac{1}{p} \|\sigma\|_{L_p}^p \tag{58}$$

при ограничении

$$\Delta \sigma = b, \tag{59}$$

где $b \in L_p(S)$.

Из равенств (43) следует, что множество нормальных решений задачи (58), (59) совпадает с множеством $|\overline{\Delta_q C_0^\infty}|^{q-2}\, \overline{\Delta_q C_0^\infty} \cap D(\Delta_p)$.

Из равенств (49), (50) следует, что при $p=2$ задачи (51), (52) и (58), (59) эквивалентны [13, 14].

В заключение автор выражает искреннюю благодарность член-корр. АН УССР В. И. Старостенко, А. С. Маргулису и участникам семинара кафедры численного анализа ЕГУ под руководством проф. Г. Г. Казаряна за дискуссии по статье, которые были чрезвычайно плодотворными и полезными.

Институт геофизики и инженерной сейсмологии АН Армянской ССР

Поступила 17. V. 1985

Ս. Մ. ՀՈՎՀԱՆՆԻՍՅԱՆ. Պոտենցիալի տեսության հակադարձ խնդիրը $L_p(S)$ տարածության մեջ և $W_p^r(S)$ էլեմենտների մոտարկումը անվերջ դիֆերենցելի ֆինիտ ֆունկցիաներով (*ամփոփում*)

Դիցուք S-ը սահմանափակ բաց բազմություն է R_n, $n \geq 2$, էվկլիդյան տարածության վրա ∂S սահմանով, որը բավարարում է $\partial S = \overline{\partial S}$ և $\operatorname{mes} \partial S = 0$ (n-չափանի լեբեգի չափականություն) պայմաններին։ Պոտենցիալի տեսության գծային հակադարձ խնդրի համար, միագումարելի p-րդ աստիճանի ֆունկցիաների $L_p(S)$, $1 < p < \infty$, բանախյան տարածության մեջ, տրված են $F(S, p)$ նորմալ լուծումների բազմության և զրոյական արտաքին պոտենցիալ ունեցող ֆունկցիաների $N(S, p)$ ենթատարածության պարզ նկարագրերը։ Ցույց է տրված, որ $N(S, p)$ ենթատարածությունը համընկնում է անվերջ դիֆերենցելի ֆինիտ $C_0^\infty(S)$ ֆունկցիաների բազմության վրա որոշված Լապլասի Δ օպերատորի արժեքների տիրույթի փակման հետ $L_p(S)$ տարածության նորմայով՝ այսինքն $N(S, p) = \overline{\Delta C_0^\infty}(S)$։ Այս հավասարության ապացույցը հիմնված է հետևյալ երկու փաստերի վրա: $L_p(S)$ տարածության վերածումը $N(S, p)$ ենթատարածության և $F(S, p)$ փակ բազմության հատուկ կիսաուղիղ գումարի։

2) S բազմության վրա գոյություն չունի զրոյական արտաքին պոտենցիալ ունեցող հարմոնիկ ֆունկցիա։ Ցույց է տրված, որ Սոբոլևի $W_p^r(S)$ տարածության դասի պատկանմամբ զրոյական շարունակություն ստացած ֆունկցիաների $\dot{W}_p^r(S)$ բազմությունը $2 \leq r < \infty$ դեպքում համընկնում է $C_0^\infty(S)$ բազմության փակման հետ $W_p^r(S)$ նորմայով, այսինքն՝ $\dot{W}_p^r(S) = \mathring{W}_p^r(S)$, $2 < r < \infty$.

S. M. HOVHANESIAN. *The converse problem of the potential theory in the space $L_p(S)$ and approximation of elements from $W_p^\prime(S)$ by the continuously differentiable finite functions* (summary)

Let S be a bounded open set in the Euclidean space R_n, $n > 2$, with boundary ∂S, satisfying the conditions $\partial S = \partial \bar{S}$ and mes $\partial S = 0$ (n-dimensional Lebesgue measure). For a linear converse problem of the potential theory in the Banach space $L_p(S)$, $1 < p < \infty$ and functions with summable p-th degree a comprehensive descriptions of the set of normal solutions $F(S, p)$ and of the subspace of functions $N(S, p)$ which have a zero outer potential. It is shown, that the subspace $N(S, p)$ coincides with the closure of the range of the Laplacian Δ, which is defined on the infinitely differentiable finite functions $C_0^\infty(S)$ with the norm of the space $L_p(S)$, i. e. $N(S, p) = \overline{\Delta C_0^\infty(S)}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *H. Weck*. Inverse Probleme der Potentialtheorie, Appl. analys, v. 2, № 2, 1972 195—204.
2. *А. А. Великович, Я. Б. Зельдович*. Об одном подходе к решению обратной задачи теории потенциала, ДАН СССР, 212, № 3, 1973, 550—583.
3. *А. И. Корбунов*. О построении решения обратной задачи гравиразведки в классе распределений плотностей, ДАН УССР, сер. Б., № 12, 1977, 1078—1080.
4. *А. И. Кобрунов*. К вопросу об интерпретации аномальных гравитационных полей методом оптимизации (трехмерная задача), Изв. АН СССР, Физика Земли, № 10, 1979, 67—76.
5. *В. Н. Страхов*. Об общих решениях обратных задач гравиметрии и магнитометрии, Изв. высш. учеб. завед., Геология и разведка, № 4, 1978, 104—117.
6. *В. Н. Страхов*. Эквивалентность в обратных задачах гравиметрии и возможности ее практического использования при интерпретации гравитационных аномалий I, II, Изв. АН СССР, Физика Земли, № 2, 1980, 44—64, № 9, 1980, 38—69.
7. *В. Г. Чередниченко*. К вопросу об определении плотности тела по заданному потенциалу, ДАН УССР, 240, № 5, 1032—1035.
8. *F. Sanco*. Internal collocation, Atti. Accad. Nazion. dei Lincei, Memorie, Ser. VII-XVI, Ser. 1ª, Fasc. 1, 1980, 52p.
9. *А. С. Маргулис*. Гармонические плотности и обратные задачи потенциала, В кн.: Теория и методика интерпретации гравимагнитных полей, «Наукова Думка», К., 1981, 130—136.
10. *А. С. Маргулис*. К теории потенциала в классах $L_p(\Omega)$, Изв. высш. учеб. завед., Математика, № 1 (236), 1982, 33—41.
11. *А. С. Маргулис*. Теория потенциала для плотностей класса L_p и ее применение к обратным задачам гравиметрии, В кн.: Теория и практика интерпретаций гравитационных и магнитных аномалий в СССР, «Наукова Думка», К., 1983, 188—197.
12. *А. С. Маргулис*. Рудные и структурные обратные задачи гравиметрии. Нормальные решения и их приложения, Автореф. дис. на соискание уч. ст. канд. физ.-мат. наук. ИФЗ АН СССР, М., 1984, 18.
13. *С. М. Оганесян*. Решение обратной задачи гравиметри в классе $L_2(S)$ распределения плотностей, ДАН УССР, сер. Б, № 6, 1981, 39—43.
14. *С. М. Оганесян*. Решение линейных некорректных задач гравиметрии двойственным методом, ДАН УССР, сер. Б, № 9, 1982, 13—18.
15. *С. М. Оганесян, В. И. Старостенко*. L—псевдорешения и их использование для построения тел с нулевым внешним гравитационным полем. Изв. АН СССР. Физика Земли, № 2, 1984, 51—62.

16. *С. М. Оганесян, В. И. Старостенко.* Тела нулевого гравитационного потенциала: о забытых работах и современном состоянии теории. Изв. АН СССР. Физика Земли, № 3, 1985, 49—62.
17. *П. С. Новиков.* О единственности решения обратной задачи потенциала. ДАН УССР, 18, № 3, 1938, 165—168.
18. *Г. Г. Казарян.* О плотности гладких финитных функций в $W_p^{cr}(\Omega)$ Матем. заметки, 2, № 1, 1967, 45—52.
19. *В. И. Буренков.* О приближении функций из пространства $W_p^r(\Omega)$ финитными функциями для произвольного открытого множества Ω. Труды МИ АН СССР, 131, 1974, 51—63.
20. *С. М. Никольский.* Об устойчивых граничных значениях дифференцируемой функции многих переменных, Матем. сб., 61, № 2, 1963, 224—252.
21. *С. Л. Соболев.* Плотность финитных функций в $L_p^m(E^n)$. Сибирский матем. журн., 4, № 3, 1963, 673—682.
22. *С. Л. Соболев.* Введение в теорию кубатурных формул. «Наука», М., 1974, 808.
23. *А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин.* Методы решения некорректных задач, «Наука», М., 1979, 288.
24. *О. А. Лисковец.* Вариационные методы решения неустойчивых задач, «Наука и техника», Минск, 1981, 346.
25. *В. П. Маслов.* Существование решения некорректной задачи эквивалентно сходимости регуляризационного процесса, УМН, 23, вып. 3, 1968, 183—184.
26. *С. М. Оганесян, В. И. Старостенко.* Двойственный метод решения линейной некорректной задачи, использующий параметрический модифицированный функционал Лагранжа и вариационный способ А. Н. Тихонова, ДАН СССР, 263, № 2, 1982, 297—301.
27. *С. М. Оганесян, В. И. Старостенко, М. Г. Оганесян.* Двойственный метод решения линейных некорректных задач геофизики, Изв. АН СССР, Физика Земли, № 6, 1984, 64—78.
28. *В. И. Тихомиров.* Некоторые вопросы теории приближений, Изд-во МГУ, М., 1976, 304.
29. *М. М. Вайнберг,* Вариационный метод и метод монотонных операторов, «Наука», М., 1972, 416.
30. *В. К. Иванов, В. В. Васин, В. П. Танана.* Теория линейных некорректных задач и ее приложения, «Наука», М., 1978, 208.
31. *Г. И. Марчук.* Методы вычислительной математики, «Наука», М., 1977, 456.
32. *Л. А. Оганесян, Л. А. Руховец.* Варционно-разностные методы решения эллиптических уравнений, Изд-во АН АрмССР, Ер., 1979, 236.
33. *В. А. Треногин.* Функциональный анализ, «Наука», М., 1980, 496.
34. *С. П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер.* Пластинки и оболочки, ГЦ ФМП, М., 1963, 636.