ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XXIII, № 1, 1988 Математика

УДК 517.95

Г. А. КАРАПЕТЯН

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ РЕГУЛЯРНЫХ УРАВНЕНИЙ В НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ

Рассматривается квазилинейный дифференциальный оператор дивергентного вида с младшими членами

$$Pu = \sum_{\alpha \in \varepsilon} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha A_\alpha (x, u(x), \cdots, D^{\gamma^1} u, \cdots, D^{\gamma^N} u) +$$

$$+ g_1 (x, u) + g_2 (x, u, \cdots, D^{\beta^1} u, \cdots, D^{\beta^M} u), \tag{0.1}$$

где $\varepsilon = \{\gamma^1, \cdots, \gamma^N\}$ — конечный набор мультииндексов, мультииндексы $\beta^1, \cdots, \beta^M$ в каком-то смысле „подчиняются" мультииндексам $\{\gamma^1, \cdots, \gamma^N\}$, $x \in \Omega$, $\Omega \subset E_n$, вообще говоря, неограниченная область. Изучается вопрос о существовании (в некоторых случаях и единственности) слабого решения первой краевой задачи для уравнения $Pu = f$ в банаховых пространствах, порожденных оператором P. Пространства такого типа изучены С. М. Никольским (см., например, [1]). Подобные задачи для общих регулярных уравнений, без выделенных младших членов, изучались в работах [2], [3], а при наличии выделенных младших членов для эллиптичечких уравнений — в работах [4], [5], [6]. В настоящей заметке доказывается существование решения уравнеиия $Pu = f$ при более слабых ограничениях на коэффициенты исследуемого оператора, чем в работах [2], [3] и для более общих операторов, чем в [5], [6]. Тем самым настоящая работа является развитием и продолжением работ [2], [3], [5], [6].

Определение 0.1. Характеристическим многогранником (х. м.) для набора мультииндексов ε назовем наименьший выпуклый многогранник $\mathbf{N} = \mathbf{N}(\varepsilon)$ в E_n, содержащий все точки набора ε.

Определение 0.2. Многогранник $\mathbf{N}$ назовем полным, если $\mathbf{N}$ имеет вершину в начале координат и отличные от нее на каждой оси координат Z_n^+, где через Z_n^+ обозначено множество n-мерных мультииндексов, т. е. векторов с целыми неотрицательными компонентами.

Определение 0.3. Полный многогранник $\mathbf{N}$ назовем правильным, если оператор проектирования на координатные гиперплоскости любых измерений не выводит точки $\mathbf{N}$.

Определение 0.4. Полный многогранник $\mathbf{N}$ назовем вполне правильным (в. п.), если внешние нормали $(n-1)$-мерных некоординатных граней $\mathbf{N}$ имеют лишь положительные координаты. Очевидно, что в. п. многогранник является правильным. Внутренность многогранника $\mathbf{N}$ обозначим через $\mathbf{N}^{(0)}$ и положим $\partial' \mathbf{N} = \mathbf{N} \setminus \mathbf{N}^{(0)}$.

Уточним теперь вид оператора (0.1). Пусть

$$Pu = Au + g_1(x, u) + g_2(x, u, D(u), \cdots, D^{\gamma} u),$$

где

$$Au = \sum_{\alpha \in N} (-1)^{|\alpha|} D^{\alpha} A_{\alpha}(x, u, D^{\gamma^1} u, \cdots, D^{\gamma^N} u),$$

$\beta \in N^{(0)}$, $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$, $D^{\alpha} u = \dfrac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}$ — обобщенные производные по С. Л. Соболеву. Далее ради кратности записи будем писать $A_{\alpha}(x, D(u))$ вместо $A_{\alpha}(x, u(x), Du, \cdots, D^{\gamma^1} u, \cdots, D^{\gamma^N} u)$.

Пусть х. м. N содержат мультииндексы $\alpha^1, \cdots, \alpha^N$. Положим $\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_s)$, где ξ_i соответствует производным $D^{\alpha^i} u$ $(i = 1, \cdots, s)$, $\xi = (\eta, \zeta)$, где η соответствует производным D^{α} при $\alpha \in N^{(0)}$, ζ— производным D^{α} при $\alpha \in \partial' N$, $R_s = R_{s_1} \times R_{s_2}$, $\eta \in R_{s_2}$, $\zeta \in R_{s_1}$. Опишем банахово пространство, в котором будем изучать оператор (0.1). Пусть N—правильный х. м. набора ε. Обозначим через $W_p^N(\Omega)$ множество функций u, для которых $D^{\alpha} u \in L_p(\Omega)$ для всех $\alpha \in N$. Норму в пространстве $W_p^N(\Omega)$ введем по формуле

$$\|u\|_N = \sum_{\alpha \in N} \|D^{\alpha} u\|_{L_p(\Omega)}. \qquad (0.2)$$

Обозначим через $\mathring{W}_p^N(\Omega)$ замыкание множества $C_0^{\infty}(\Omega)$ по норме (0.2).

Определение 0.5. Пусть X и Y — нормированные пространства. Отображение $T: X \to Y$ называется деминепрерывным, если для любой последовательности $x_n \in X$, $x_n \to x_0$, $T(x_n \to T(x_0)$ (слабо сходится).

Отображение $T: X \to Y$ называется хеминепрерывным, если для всех

$$x, \omega \in X, \ T(x + t\omega) \to T(x), \text{ при } t \to 0.$$

Очевидно, что деминепрерывное отображение хеминепрерывно.

Определение 0.6. Отображение $T: X \to X^*$ называется коэрцитивным, если

$$\lim_{\|x\| \to \infty} \frac{(T(x), x)}{\|x\|} = +\infty.$$

Определение 0.7. Отображение $T: X \to X^*$ называется монотонным, если $(x - y, T(x) - T(y)) \geqslant 0$, $\forall x, y \in X$. Отображение T называется псевдомонотонным, если для произвольной последовательности $\{u_j\} \subset X$ такой, что $u_j \to u$, $T(u_j) - y$ в X^* и $\overline{\lim\limits_{j \to \infty}} (T(u_j), u_j - u) \leqslant 0$ следует, что $y = T(u)$ и при $j \to \infty$ $(T(u_j), u_j - u) \to 0$.

Ниже будет показано, что хеминепрерывный монотонный оператор является псевдомонотонным (см. лемму 1.2).

§ 1. Квазилинейные регулярные операторы

Пусть $u, v \in C_0^\infty(\Omega)$. Обозначим через

$$a(u, v) = \sum_{\alpha \in \mathfrak{N}} \int_\Omega A_\alpha(x, D(u)) D^\alpha v dx +$$
$$+ \int_\Omega g_1(x, u) v dx + \int_\Omega g_2(x, D(u) v dx \tag{1.1}$$

нелинейную форму Дирихле, отвечающую оператору (0.1).

Определение 1.1. *Пусть $f \in (\overset{\circ}{W}{}_p^{\mathfrak{N}}(\Omega))^*$. Будем говорить, что функция $u \in \overset{\circ}{W}{}_p^{\mathfrak{N}}(\Omega)$ является слабым решением задачи Дирихле для уравнения $Pu = f$ с нулевыми начальными условиями, если*

$$a(u, v) = (f, v), \ \forall v \in C_0^\infty(\Omega). \tag{1.2}$$

Замечание. *В определении* 1.1 *вместо* $C_0^\infty(\Omega)$ *можно взять* $\overset{\circ}{W}{}_p^{\mathfrak{N}}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$.

Ограничения на оператор A. Пусть оператор A удовлетворяет соотношениям:

A_0) Для любого $\alpha \in \mathfrak{N}$, $A_\alpha(x, \xi): \Omega \times R_s \to R_1$ удовлетворяет условиям Каратеодори, т. е. для любого фиксированного $\xi \in R_s$ $A_\alpha(x, \xi)$ измеримо по x и непрерывно по ξ для любого фиксированного x.

A_1) Существует постоянная $C > 0$ такая, что

$$|A_\alpha(x, \xi)| \leqslant C(|\xi|^{p-1} + |K(x, \xi)|, \ \forall x \in \Omega, \ \xi \in R_s, \ \alpha \in \mathfrak{N}, \tag{1.3}$$

где $K(x, \xi)$ — измеримая функция, удовлетворяющая условию: если $\|u\|_{\mathfrak{N}} \leqslant C_1$ и $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, то существует постоянная $C_2 = C_2(C_1)$ такая, что

$$\int_\Omega |K(x, u, D^{\gamma^1} u, \cdots, D^{\gamma^N} u)|^q dx \leqslant C_2. \tag{1.4}$$

A_2) Оператор A коэрцитивен в $\overset{\circ}{W}{}_p^{\mathfrak{N}}(\Omega)$.

A_3) Существует функция $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ и непрерывная по ρ при $R > 0$ функция $F(R, \rho)$, $\lim\limits_{\xi \to 0} \frac{F(R, \xi\rho)}{\xi} \to 0$ такая, что для любого $R > 0$ и $u, v \in \overset{\circ}{W}{}_p^{\mathfrak{N}}(\Omega)$, $\|u\|_{\mathfrak{N}} \leqslant R$, $\|v\|_{\mathfrak{N}} \leqslant R$ справедливо соотношение

$$(A(u) - A(v), u - v) \geqslant -F(R, \|(u - v)\Psi\|_{\mathfrak{N}(0)}). \tag{1.5}$$

Ограничения на g_1, g_2.

G_1) Для любых $x \in \Omega$, $\eta \in R_{s_1}$, $t \in R_1$

$$g_1(x, t) = p_1(x, t) + r_1(x, t), \tag{1.6}$$

$$g_2(x, \eta) = p_2(x, \eta) + r_2(x, \eta), \tag{1.7}$$

где $p_1, p_2, r_1, r_2, g_1, g_2$ удовлетворяют условию Каратеодори и

$$p_1(x, t)t \geqslant 0, \ |r_1(x, t)| \leqslant h_1(x), \tag{1.8}$$

$$p_2(x, \eta)\eta_1 \geqslant 0, \ |r_2(x, \eta)| \leqslant h_2(x), \tag{1.9}$$

а $h_1, h_2 \in L^q(\Omega) \cap L^1(\Omega)$.

Обозначим

$$g^*_{1,s}(x) = \sup_{|t|<s} |g_1(x, t)|, \ g^*_{2,s}(x) = \sup_{|\eta|<s} |g_2(x, \eta)|.$$

$G_2)$ $g^*_{1,s}, g^*_{2,s} \in L^1(\Omega)$ для любого $s: 0 \leqslant s < \infty$.

$G_3)$ Если $\|u\|_N \leqslant C_1$, $u \in \overset{\circ}{W}{}^N_p(\Omega)$, то с некоторой постоянной $C_2 = C_2(C_1)$

$$\int_\Omega |g_2(x, u, \cdots, D^\beta u)||D^\alpha u(x)|\,dx \leqslant C_2, \ \forall \alpha \in N^{(0)}.$$

$\Omega_1)$ Область Ω удовлетворяет условию теорем вложения Соболева. В работе [1] С. М. Никольского выделены те граничные значения функций $f \in W^N_p(\Omega)$, которые устойчиво оцениваются через норму $\|f\|_N$. Точнее, в [1] выделено множество мультииндексов $\Lambda = \{\alpha\}$ (скелет) такое, что $D^\alpha f$ имеет след. Пусть область Ω, числа p, n и многогранник $\mathbf{N}$ удовлетворяют следующим условиям:

$$\Omega_2) \ \overset{\circ}{W}{}^N_p(\Omega) = \mathfrak{M} = \{f; \ D^\alpha f|_{\partial\Omega} = 0, \ \alpha \in \Lambda\}.$$

(Д. У) (Дополнительное условие) $W^N_p(E_n) \subset C(E_n)$.

Предложение 1.1. *При условиях* Ω_1), Ω_2) *и (Д. У) для каждой функции* $u \in \overset{\circ}{W}{}^N_p(\Omega)$ *существует постоянная* $C > 0$ *и последовательность* $w_n \in \overset{\circ}{W}{}^N_p(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ *такие, что* $w_n \to u$ *в* $W^N_p(\Omega)$ *и* $|w_n(x)| \leqslant C|u(x)|$ *на* Ω.

Доказательство. Сперва покажем, что для любой функции $u \in W^N_p(E_n)$ и для любого числа $\varepsilon > 0$ существует функция $w \in W^N_p(E_n)$, $0 \leqslant w \leqslant 1$, $x \in E_n$ такая, что $(1-w)u \in W^N_p(E_n) \cap L^\infty(E_n)$ и $\|wu\|_N < \varepsilon$. Из (Д. У.) следует, что, если $u \in W^N_p(E_n)$, то $u \in C(E_n) \cap L^\infty(E_n)$. С другой стороны, для любого $\varepsilon > 0$ существует число N такое, что $\|u\|_{N, (|x|>N)} < \varepsilon$.

Пусть $w \in C^\infty_0(E_n)$, $0 \leqslant w(x) \leqslant 1$, $w(x) = 0$ при $|x| \leqslant N$, $|x| \geqslant 2N$. Тогда, очевидно, $w \in W^N_p(E_n)$, $\|w u\|_N < \varepsilon$ и $|w(x)u(x)| \leqslant |u(x)|$. Следовательно, существует последовательность $w_n \in W^N_p(E_n) \cap L^\infty(E_n)$ такая, что $w_n \to u$ в $W^N_p(E_n)$ и $|w_n(x)| \leqslant C|u(x)|$.

Пусть теперь $u \in \overset{\circ}{W}{}^N_p(\Omega)$. Из условия Ω_2 следует, что функцию u можно считать продолженной нулем на все пространство E_n, т. е. можно считать, что $u \in W^N_p(E_n)$. Построим последовательность $\{w_j\}$ так, чтобы $(1-w_j)u \to u$ в $W^N_p(\Omega)$. Тогда $(1-w_j)u \in W^N_p(E_n) \cap L^\infty(E_n)$ и $|1-w_j)u| \leqslant C|u(x)|$. Остается показать, что $(1-w_j)u \in \overset{\circ}{W}{}^N_p(\Omega)$. Так как $u \in \overset{\circ}{W}{}^N_p(\Omega)$, то из условия Ω_2) следует, что

$D^{\alpha}u|_{\partial\Omega}=0$, $\alpha\in\Lambda$. Отсюда по формуле Лейбница, с учетом правильности многогранника $\mathbf{N}$, получаем, что при $\alpha\in\Lambda$ $D^{\alpha}((1-\omega_j)u|_{\partial\Omega}=0$. Предложение 1.1 доказано. Основным результатом настоящего пункта является

Теорема 1.1. *Если выполнены условия $A_0)-A_3)$, $G_1)-G_3)$, $\Omega_1)-\Omega_2)$, (Д. У), то для любого элемента $f\in(\overset{\circ}{W}{}_p^{\mathbf{N}}(\Omega))^*$ существует функция $u\in\overset{\circ}{W}{}_p^{\mathbf{N}}(\Omega)$, являющаяся слабым решением уривнения*

$$Pu=f, \tag{1.10}$$

такая, что $g_1(x, u)$, $g_2(x, u),\cdots, D^{\beta}u)$, $u[g_1(x, u)+g_2(x, D(u))\in\in L^1(\Omega)$ и $(P(D)u, u)=(f, u)$.

При доказательстве используются следующие вспомогательные предложения.

Теорема 1.2. *(Г. Бревис [7]). Пусть X — рефлексивное банахово пространство, $A:X\to X^*$ — коэрцитивный ограниченный и непрерывный в конечномерных пространствах псевдомонотонный оператор. Тогда для любого $f\in X^*$ уравнение $Au=f$ имеет хотя ы одно рзшениз $u\in X$. Эта теорема является аналагом соответствующей теоргмы для монотонных операторов (см., например, [8] т. 29.2).*

Лемма 1.1. *Если последовательность $\{u_n\}\subset\overset{\circ}{W}{}_p^{\mathbf{N}}(\Omega)$ слабо сходится к $u\in\overset{\circ}{W}{}_p^{\mathbf{N}}(\Omega)$, то существует подпоследовательность $\{u_n'\}$ последовательности $\{u_n\}$ такая, что для любого $\alpha\in\mathbf{N}^{(0)}D^{\alpha}u_n'\to D^{\alpha}u$ почти всюду* (см. [3], лемма 1.3).

Лемма 1.2. *Пусть оператор $A:\overset{\circ}{W}{}_p^{\mathbf{N}}(\Omega)\to(\overset{\circ}{W}{}_p^{\mathbf{N}}(\Omega))^*$ хеминепрерывен и удовлетворяет условию $A_3)$, тогда A является псевдомонотонным оператором.*

Доказательство. Сначала покажем, что если $u_j\to u$ и

$$\overline{\lim_{j\to\infty}}(A(u_j),\ u_j-u)\leqslant 0,$$

то для произвольного элемента $v\in\overset{\circ}{W}{}_p^{\mathbf{N}}(\Omega)$

$$(A(u),\ u-v)\leqslant\underline{\lim}\,(A(u_j),\ u_j-u).$$

Так как $u_j\to u$, то существует число $R>0$ такое, что $\|u_j\|_{\mathbf{N}}\leqslant R$ $\|u\|_{\mathbf{N}}\leqslant R$. Следовательно, из условия $A_3)$ имеем

$$(A(u_j)-A(u),\ u_j-u)\geqslant -F(R,\ \|(u_j-u)\Psi\|_{\mathbf{N}(0)}),$$

$$(A(u),\ u_j-u)\leqslant(A(u_j),\ u_j-u)+F(R,\ \|u_j-u)\Psi\|_{\mathbf{N}(0)}). \tag{1.11}$$

В силу того, что $W_p^{\mathbf{N}(0)}(\Omega)\subset\overset{\circ}{W}{}_p^{\mathbf{N}}(\Omega)$ (см. [3], лемму 1.3), то существует подпоследовательность $\{u_j'\}$ последовательности u_j такая, что

$$\lim_{n\to\infty}\|(u_n'-u)\Psi\|_{\mathbf{N}(0)}=0.$$

Поэтому из определения функции F (см. условие A_3). следует, что

$$F(R, \|u_j' - u) \Psi\|_{N(0)}) \to 0. \qquad (1.12)$$

С другой стороны, так как $u_j' \rightharpoonup u$ и $(A(u), u_j' - u) \to 0$, то из соотношений (1.11) и (1.12) вытекает, что

$$\lim_{j\to\infty} (A(u_j'), u_j' - u) = 0. \qquad (1.13)$$

Докажем, что соотношение (1.13) справедливо и для последовательности $\{u_j\}$. Допустив противное, получим, что из предложения

$$\overline{\lim_{j\to\infty}} (A(u_j), u_j - u) \leqslant 0$$

следует

$$\lim_{j\to\infty} (A(u_j^*), u_j^* - u) = -d, \ 0 < d < \infty \qquad (1.14)$$

для некоторой последовательности $\{u_j^*\}$.

Применяя соотношения (1.11), (1.12) для последовательности $u_j^* \rightharpoonup u$ получим, что для последовательности $\{u_j^{**}\} \subset \{u_j^*\}$ будет выполняться соотношение

$$\lim_{j\to\infty} (A(u_j^{**}), u_j^{**} - u) = 0,$$

противоречащее (1.14).

Следовательно

$$\lim_{j\to\infty} (A(u_j), u_j - u) = 0. \qquad (1.15)$$

Заметим, что если оператор A хеминепрерывен, то отображение $t \in [0,1] \to A(u - tu + tv), u - v)$ непрерывно для произвольных $u, v \in X$. Воспользуемся теперь условием (1.5), положив $\omega = (1-t)u + tv$, $t \in [0,1]$, $v \in \mathring{W}_p^N(\Omega)$. Имеем

$$(A(u_j), u_j - u) + (A(u_j), tu - tv) - (A(u + tv - tu),$$

$$(u_j - u + tu - tv)) \geqslant -F(R, \|(u_j - u + tu - tv)\Psi\|_{N(0)}).$$

Отсюда и из (1.15) получим при $j \to \infty$

$$t(A(u - tu + tv), u - v) - F(R, \|t(u - v)\Psi\|_{N(0)}) \leqslant t \underline{\lim_{j\to\infty}} (A(u_j), u - v.)$$

Деля обе части последнего неравенства на t и считая, что $t \to 0$ получим

$$(A(u), u - v) \leqslant \underline{\lim_{j\to\infty}} (A(u_j), u - v).$$

С другой стороны, так как

$$(A(u_j), u_j - v) = (A(u_j), u_j - u) + (A(u_j), u - v),$$

то из (1.15) имеем

$$\underline{\lim_{j\to\infty}} (A(u_j), u_j - v) = \underline{\lim_{j\to\infty}} (A(u_j), (u - v)$$

и

$$(A(u), u - v) \leqslant \underline{\lim_{j\to\infty}} (A(u_j), u_j - v).$$

Если теперь $A(u_j) \to f$ в $(\overset{\circ}{W}{}_p^N(\Omega))^*$, то

$$\varliminf_{j\to\infty}(A(u_j),\ u_j - v) = \varliminf_{j\to\infty}(A(u_j),\ u - v) = (f,\ u - v)$$

и поэтому

$$(A(u),\ u - v) \leqslant (f,\ u - v),\ \forall v \in \overset{\circ}{W}{}_p^N(\Omega).$$

Пусть $v = u - u_1$, $u_1 \in \overset{\circ}{W}{}_p^N(\Omega)$. Тогда $(A(u),\ u_1) \leqslant (f,\ u_1)$, а при $v = u + u_1$, $(A(u),\ u_1) > (f, u_1)$. Следовательно $A(u) = f$ в $(\overset{\circ}{W}{}_p^N(\Omega))^*$. Лемма 1.2 доказана.

Пусть $u,\ v \in \overset{\circ}{W}{}_p^N(\Omega)$

$$a(u,\ v) = \int_\Omega \sum_{\alpha\in N} A_\alpha(x,\ D(u))\, D^\alpha v dx$$

— форма Дирихле, отвечающая оператору A.

Очевидно, что для фиксированной $u\, a(u,\ \cdot)$ является линейным, ограниченным функционалом. Определим оператор $T: \overset{\circ}{W}{}_p^N(\Omega) \to (\overset{\circ}{W}{}_p^N(\Omega))^*$ формулой $T(u) = a(u,\ \cdot)$.

Из условия A_1) следует, что $T(u)$ — ограниченный оператор. Действительно, пусть $C > 0$ и $M = \{u \in \overset{\circ}{W}{}_p^N(\Omega), \|u\| < C\}$. Рассмотрим оператор $T(u)$ на множестве M

$$(T(u),\ v) = a(u,\ v) = \sum_{\alpha\in N} \int_\Omega A_\alpha(x,\ D(u))\, D^\alpha vdx \leqslant$$

$$\leqslant C_1\left(\sum_{\alpha\in N}\int_\Omega\left(\sum_{\beta\in N}|D^\beta u|^{p/q}|D^\alpha v|\right)dx + \sum_{\alpha\in N}\int_\Omega |K(x,\ D(u))|\,|D^\alpha v|\, dx \leqslant\right.$$

$$\leqslant C_1\left(\sum_{\alpha,\ \beta\in N}\|D^\beta u\|_{L_p(\Omega)}\cdot\|D^\alpha v\|_{L_p(\Omega)} + \sum_{\alpha\in N}\int_\Omega |K(x,\ D(u))|^q\, dx\,\cdot\right.$$

$$\cdot\int_\Omega |D^\alpha v|^p\, dx \leqslant C_2\|v\|_N.$$

Покажем, что $T(u)$ — непрерывное отображение в конечномерных пространствах $V_n = \{\overline{u_1, \cdots, u_n}\}$, т. е. покажем, что если $u^k = C_1^k u_1^k + \cdots + C_n^k u_n^k$ и $C_1^k \to C_1^0, \cdots, C_n^k \to C_n^0$, при $k \to \infty$ и $u^0 = C_1^0 u_1 + \cdots + C_n^0 u_n$, то $T(u_k) \to T(u_0)$ в V_n^*. Имеем

$$a(u^k,\ v) - a(u^0,\ v) = \int_\Omega \sum_{\alpha\in N}(A_\alpha(x,\ D(u^k)) - A_\alpha(x,\ D(u^0)))\cdot D^\alpha\, vdx.$$

Из условия Каратеодори следует, что

$$A_\alpha(x,\ D(u^k))^q \to A_\alpha(x,\ D(u^0))^q,$$

а согласно условию A_1)

$$\int_\Omega |A_\alpha(x, D(u^0))|^q\,dx \leqslant \|u^0\|_N + \int_\Omega |K(x, D(u^0))|^q\,dx \leqslant C_2.$$

Применяя теорему Лебега получим, что оператор T непрерывен в конечномерных пространствах, следовательно T хеминепрерывен. Из леммы 1.2 получим, что T — псевдомонотонный оператор, а из условия A_2) следует его коэрцитивность. Таким образом, оператор T удовлетворяет условиям теоремы 1.2 (Брезиса).

Оценим члены g_1, g_2. Пусть $n \in N$, положим

$$g_{1,n}(x, t) = \varkappa_n(x)\, p_1^n(x, t) + r_1(x, t),$$

$$g_{2,n}(x, t) = \varkappa_n(x)\, p_2^n(x, t) + r_2(x, t),$$

где $\varkappa_n(x)$ — характертеристическая функция области $\Omega_1 = \{x \in \Omega, |x| \leqslant n\}$, а

$$p_1^n(x, t) = \begin{cases} p_1(x, t), & |p_1(x, t)| \leqslant n \\ n\dfrac{p_1(x, t)}{|p_1(x, t)|}, & |p_1(x, t)| > n, \end{cases}$$

$$p_2^n(x, \eta) = \begin{cases} p_2(x, \eta), & |p_2(x, \eta)| \leqslant n \\ n\dfrac{p_2(x, \eta)}{|p_2(x, \eta)|}, & |p_2(x, \eta)| > n. \end{cases}$$

Опраделим следующие формы Дирихле:

$$b_n(u, v) = \int_\Omega [g_{1,n}(x, u(x)) + g_{2,n}(x, D(u))]\, v(x)\,dx.$$

Из определения функций $g_{1,n}$ и $g_{2,n}$ следует, что при фиксированной $u \in \overset{\circ}{W}{}_p^N(\Omega)$ $b_n(u, v)$ — линейный ограниченный оператор, т. е. существует постоянная $C = C(n, u)$ такая, что

$$|b_n(u, v)| \leqslant C\|v\|_N, \quad \forall v \in \overset{\circ}{W}{}_p^N(\Omega).$$

Определим оператор $S_n : \overset{\circ}{W}{}_p^N(\Omega) \to (\overset{\circ}{W}{}_p^N(\Omega))^*$ формулой

$$(S_n(u), v) = b_n(u, v).$$

Лемма 1.3. *Если $D^\alpha u_n \to D^\alpha u$ п. в. для всех $\alpha \in \mathbf{N}^{(0)}$, то $S_n(u_j) \to S_n(u)$ в $L^q(\Omega)$.*

Доказательство. Имеем

$$|g_{1,n}(u_j) + g_{2,n}(u_j) - g_{1,n}(u) - g_{2,n}(u)|^q \leqslant$$

$$\leqslant |g_{1,n}(u_j)|^q + |g_{2,n}(u_j)|^q + |g_{1,n}(u)|^q + |g_{2,n}(u)|^q.$$

С другой стороны, из условия G_1) следует, что

$$|g_{1,n}(u)|^q \leqslant |\varkappa_n(x)|^q\, |p^n(x, u)|^q + |r_1(x, u)|^q \leqslant$$

$$\leqslant n^q |\varkappa_n(x)|^q + |h_1(x)|^q \leqslant G_1(x) \in L^1(\Omega),$$

$$|g_{2,n}(x, D(u)|^q \leqslant |\varkappa_n(x)|^q\, |p_2^n(x, D(u)|^q + |r_2(x, D(u)|^q \leqslant$$

$$\leqslant n^q |\varkappa_n(x)|^q + |h_2(x)|^q \leqslant G_2(x) \in L^1(\Omega).$$

Так как для всех $\alpha\in \mathbf{N}^{(0)}$ $D^\alpha u_j(x)\to D^\alpha u_0(x)$ п. в., то из условия Каратеодори следует, что при $j\to\infty$

$$|g_{1,n}(x, u_j)+g_{2,n}(x, D(u_j))-g_{1,n}(x, u)-g_{2,n}(x, D(u))|^q\to 0.$$

Применяя теорему Лебега отсюда получим, что $S_n(u_j)\to S_n(u)$ в $L^q(\Omega)$. Лемма 1.3 доказана.

Из доказательства леммы непосредственно вытекает

Следствие 1.1. *Для любого $n\in N$ оператор S_n ограничен.*

Лемма 1.4 *Для произвольного $n\in N$ операторы S_n, S_n+T псевдомонотонны.*

Доказательство. Докажем псевдомонотонность оператора S_n. Пусть $u_j\to u$ в $W_p^{\mathbf{N}}(\Omega)$. Тогда из вложения $W_p^{\mathbf{N}}(\Omega)\subset W_p^{\mathbf{N}^{(0)}}(\Omega)$ следует, что для всех $\alpha\in\mathbf{N}^{(0)}$ и некоторой подпоследовательности $\{u_j'\}\subset\{u_j\}$, $D_j^\alpha u_j'\to D^\alpha u$ п. в. Таким образом, выполняются условия леммы 1.3. Следовательно, $S_n(u_j')\to S_n(u)$ в $L^q(\Omega)$.

Из неравенства Гёльдера получим, что $(S_n(u_j'), u_j'-u)\to 0$ при $j\to\infty$.

Пусть теперь $S_n(u_j)\to y$. Так как $S_n(u_j')\to S_n(u)$, то остается доказать, что если $\overline{\lim\limits_{j\to\infty}}(S_n(u_j), u_j-u)\leqslant 0$, то $\lim\limits_{j\to\infty}(S_n(u_j), u-u_j)\to 0$. Предположим противное, т. е. пусть для некоторой подпоследовательности $\{u_j''\}\subset\{u_j\}$

$$(S_n(u_j''), u_j''-u)\leqslant-\varepsilon_0,\ \varepsilon_0>0. \tag{1.16}$$

Так как $u_j''\to u$, то повторяя рассуждения, приведенные при доказательстве леммы 1.1, получим, что для подпоследовательности $\{u_j'''\}\subset\{u_j''\}$

$$(S_n(u_j'''), u_j'''-u)\to 0.$$

Это противоречие с (1.16) и доказывает псевдомонотонность операторов $S_n (n\in N)$. Докажем псевдомонотонность оператора $T+S_n$. Если $u_j\to u$, то для некоторой подпоследовательности $\{u_j'\}\subset\{u_j\}$ и для всех $\alpha\in\mathbf{N}^{(0)}$ $D^\alpha u_j'(x)\to D^\alpha u(x)$ п. в., а из леммы 1.3 следует, что при $j\to\infty$

$$(S_n(u_j'), u_j'-u)\to 0. \tag{1.17}$$

Пусть $(S_n+T)(u_j)\to y$. Так как $S_n(u_j')\to S_n(u)$, то $T(u_j')\to y_1$. Докажем, что $y_1=T(u)$. Как и при доказательстве леммы 1.3 из соотношения $\overline{\lim\limits_{j\to\infty}}((S_n+T)(u_j), u_j-u)\leqslant 0$ следует, что

$$((S_n+T)(u_j)-(S_n+T)(u), u_j-u)\geqslant$$
$$\geqslant(S_n(u_j)-S(u), u_j-u)-F(R, \|u_j-u)\Psi\|_{\mathbf{N}^{(0)}}),$$
$$\lim_{j\to\infty}((S_n+T)(u_j), u_j-u)=0.$$

Отсюда и из (1.17) имеем $\lim\limits_{j\to\infty}(T(u_j'), u_j'-u)=0$.

Используя псевдомонотонность оператора T, отсюда получим $y_1=T(u)$. Лемма доказана.

Лемма 1.5. *Если* $\{u_j\} \subset \overset{\circ}{W}{}^N_p(\Omega)$, $u_j \to u$ *в* $\overset{\circ}{W}{}^N_p(\Omega)$ *и*

$$\int_\Omega |g_{1,j}(\cdot, u_j)||u_j|\,dx \leqslant C_1,$$

$$\sum_{\alpha \in N(0)} \int_\Omega |g_{2,j}(\cdot, D(u_j))|\,|D^\alpha u_j|\,dx \leqslant C_2,$$

то $u[g_1(\cdot, u) + g_2(\cdot, D(u))] \in L^1(\Omega)$ *и*

$$g_{1,j}(\cdot, u_j) + g_{2,j}(\cdot, D(u_j)) \xrightarrow{L^1} g_1(\cdot, u) + g_2(\cdot, D(u)).$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 4 работы [6] (с применением леммы 1.1 настоящей заметки).

Лемма 1.6. *Оператор* $T + S_n$ $(n = 1, 2, \cdots)$ *коэрцитивен.*

Доказательство. Имеем

$$b_n(u, u) = \int_\Omega [g_{1,n}(x, u) + g_{2,n}(x, D(u))]\,u(x)\,dx =$$

$$= \int_\Omega \varkappa_n(x)\,[p_1^n(x, u) + p_2^n(x, D(u))]\,u(x)\,dx +$$

$$+ \int_\Omega [r_1(x, u) + r_2(x, D(u))]\,u(x)\,dx.$$

Из определения функций $p_i^n(x, u)$ $(i = 1, 2)$ и условия $G_2)$ имеем $\varkappa_n(x)\,p_1^n(x, u) \geqslant 0$, $\varkappa_n(x)\,p_2^n(x, D(u))\,u(x) \geqslant 0$.

Следовательно

$$b_n(u, u) \geqslant -\left|\int_\Omega [r_1(x, u) + r_2(x, D(u))]\,u(x)\,dx\right| \geqslant$$

$$\geqslant -C(\|h_1\|_{L_q(\Omega)} + \|h_2\|_{L_q(\Omega)})\,\|u\|_{L_p(\Omega)}. \tag{1.18}$$

Если теперь $\|u\|_N \to \infty$, то

$$\frac{((T + S_n)(u), u)}{\|u\|_N} = \frac{(T(u), u)}{\|u\|_N} + \frac{(S_n(u), u)}{\|u\|_N} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{(T(u), u)}{\|u\|_N} - \frac{C(\|h_1\|_{L_q(\Omega)} + \|h_2\|_{L_q(\Omega)})}{\|u\|_N}\,\|u\|_{L_p(\Omega)} \to +\infty,$$

что и доказывает коэрцитивность оператора $T + S_n$.

Доказательство теоремы 1.1. Из лемм 1.2—1.6 следует, что операторы $T + S_n$ $(n = 1, 2, \cdots)$ удовлетворяют условиям теоремы Брезиса и, следовательно, для любого $f \in (\overset{\circ}{W}{}^N_p(\Omega))^*$ существует функция $u_j \in \overset{\circ}{W}{}^N_p(\Omega)$ такая, что

$$(T(u_j), v) + (S_j(u_j), v) = (f, v), \ \forall v \in \overset{\circ}{W}{}^N_p(\Omega). \tag{1.19}$$

Докажем сначала, что последовательность $\{u_j\}$ ограничена. Пусть это не так. Тогда из леммы 1.6 имеем, что при $\|u_j\|_N \to \infty$

$$\frac{(f,\ u_j)}{\|u_j\|_N} = \frac{(T+S_j)(u_j),\ u_j)}{\|u_j\|_N} \to \infty.$$

С другой стороны

$$\frac{(f,\ u_j)}{\|u_j\|_N} \leqslant \frac{\|f\|_{L_q(\Omega)} \|u_j\|_N}{\|u_j\|_N} < \infty.$$

Полученное противоречие доказывает ограниченность последовательности $\{u_j\}$.

Из рефлексивности пространства $\overset{\circ}{W}{}_p^N(\Omega)$ и ограниченности оператора T следует существование подпоследовательности последовательности $\{u_j\}$ (которую также обозначим через $\{u_j\}$, такая, что $u_j \rightharpoonup u$, $T(u_j) \rightharpoonup y$ в $\overset{\circ}{W}{}_p^N(\Omega)$. Из ограниченности последовательностей $\{u_j\}$, $\{T(u_j)\}$: $\|u_j\| \leqslant C_1$, $\|T(u_j)\| \leqslant C_2$, из условия (1.19) и из соотношения

$$\int_\Omega [|r_1(\cdot,\ u_j)| + |r_2(\cdot,\ D(u_j))|]\, |u_j|\, dx < C_2$$

следует, что

$$\int_\Omega [|g_{1,j}(\cdot,\ u_j)| + |g_{2,j}(\cdot, D(u_j))|]\, |u_j|\, dx \leqslant C_1 \|f\| + C_1 \cdot C_2 + C_3 = C < \infty,$$

Далее из условия G_3) имеем

$$\sum_{\alpha \in N \setminus (0)} \int_\Omega |g_{2,j}(\cdot,\ D(u_j))|\, |D^\alpha u_j|\, dx \leqslant C.$$

Отсюда и из леммы 1.5 следует, что $u[g_1(\cdot,\ u) + g_2(\cdot,\ D(u)) \in$ $\in L^1(\Omega)$ и для любого $v \in \overset{\circ}{W}{}_p^N(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$

$$(g_{1,j}(\cdot,\ u_j) + g_{2,j}(\cdot,\ D(u_j)))\, v \xrightarrow{L^1} (g_1(\cdot,\ u) + g_2(\cdot,\ D(u)))\, v.$$

Переходя к пределу в (1.19) получим

$$(y,\ v) + \int_\Omega (g_1(\cdot,\ u) + g_2(\cdot,\ D(u)))\, v(x)\, dx = (f,\ v),$$

$$\forall v \in \overset{\circ}{W}{}_p^N(\Omega) \cap L^\infty(\Omega). \tag{1.20}$$

Докажем, что $y = T(u)$. Используем псевдомонотонность оператора T, имеем

$$\begin{aligned}\overline{\lim_{j\to\infty}} (T(u_j),\ u_j - u) &= \overline{\lim_{j\to\infty}} ((f - S_j)(u_j),\ u_j) - \\ &- (T(u_j),\ u) = \overline{\lim_{j\to\infty}} ((f - S_j)(u_j),\ u_j) - (y,\ u) \leqslant \\ &\leqslant (f - y,\ u) - \underline{\lim_{j\to\infty}} (S_j(u_j),\ u_j).\end{aligned}$$

Отсюда по лемме Фату получим

$$\overline{\lim_{j\to\infty}}\,(T(u_j),\ u_j-u)\leqslant(f-y,\ u)-$$

$$-\int_\Omega[g_1(\cdot,u)+g_2(\cdot,\ D(u))]\,u(x)\,dx.$$

Учитывая равенство (1.20) для всех $w\in\overset{\circ}{W}{}^N_p(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$ имеем

$$\overline{\lim_{j\to\infty}}\,(T(u_j)\,u_j-u)\leqslant(f-y,\ u-w)+$$

$$+\int_\Omega[g_1(\cdot,\ u)+g_2(\cdot,D(u))]\,(w-u)\,dx.$$

Используя замечание 1.1, построим $w_j\in\overset{\circ}{W}{}^N_p(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$ такие, что $w_j\to u$ в $W^N_p(\Omega)$, $|w_j(x)|\leqslant C|u(x)|$. Тогда $(f-y,\ u-w_j)\to 0$ и

$$\int_\Omega[g_1(\cdot,\ u)+g_2(\cdot,\ D(u))]\,w_j(x)\,dx\to\int_\Omega[g_1(\cdot,u)+g_2(\cdot,D(u))]\,u(x)\,dx.$$

Последнее соотношение следует из того, что п. в. $(g_1(\cdot,u)+$ $+g_2(D(u))\,u\in L_1(\Omega)$ и из теоремы Лебега. В результате имеем $\overline{\lim}\,(T(u_j),\ u_j-u)\leqslant 0$. Отсюда и из псевдомонотонности оператора T следует, что

$$y=T(u)\ \text{и}\ (T(u_j),\ u_j-u)\to 0.$$

Подставляя в (1.20) $v=w_j$ и устремляя $j\to\infty$, получим, что $(P(u),\ u)=(f,\ u)$. Теорема доказана.

Теорема 1.3. *Если регулярный оператор A удовлетворяет условию A_1) (см. [2], опр. 3), т. е. для некоторой постоянной $C>0$ и для всех $u,\ v\in\overset{\circ}{W}{}^N_p(\Omega)$*

$$\sum_{\alpha\in N}\int_\Omega(A_\alpha(x,\ D(u))-A_\alpha(x,D(v)))\,D^\alpha(u-v)\,dx\geqslant C\|u-v\|^p_N\qquad(1.21)$$

и, кроме того, выполняются условия G_1), G_2), Ω_1), Ω_2), (Д. У), $g_2(x,\ \eta)=0$,

$$g_1(x,\ t_1)\geqslant g_1(x,\ t_2),\ t_1\geqslant t_2,\qquad(1.22)$$

то для любого $f\in(\overset{\circ}{W}{}^N_p(\Omega))^*$ уравнение $Pu=f$ имеет единственное слабое решение из класса $\overset{\circ}{W}{}^N_p(\Omega)$.

Доказательство. Из условий (1.21), (1.22) следует, что $P=A+g_1(x,\ u)$ — строго монотонный и коэрцитивный оператор. Так как выполняются все условия теоремы 1.1, то существование слабого решения доказано. Единственность следует из строгой монотонности оператора P. Теорема доказана.

§ 2. Анизотропные потенциалы и некоторые их свойства

Пусть $\nu_1, \cdots, \nu_n \in N$, ν_i — четные числа. Положим $\mu = (\mu_1, \cdots, \mu_n) = 2\left(\frac{1}{\nu_1}, \cdots, \frac{1}{\nu_n}\right)$, μ-расстоянием чисел $x, y \in E_n$ называется число (см. [10])

$$\rho_\mu(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^{\nu_i}\right)^{1/2}.$$

Анизотропным потенциалом называется выражение

$$I_{\mu, \alpha}(f) = \int\limits_{E_n} \frac{f(y)}{(\rho_\mu(x, y))^{|\mu| - \alpha}} dy, \ 0 < \alpha < |\mu|. \tag{2.1}$$

При $\mu_i = 1$, $i = 1, \cdots, n$ интеграл (2.1) совпадает с классическим потенциалом Рисса с точностью до постоянного множителя. Для локально интегрируемой функции f обозначим через $M(f)(x)$ максимальную функцию Харди—Литтльвуда

$$M(f)(x) \sup_{r>0} r^{-|\mu|} \int\limits_{\rho_\mu(y) < r} |f(x+y)| \, dy.$$

Известны следующие свойства максимальной функции $M(f)(x)$ (см., например, [11], 1.1.3).

Теорема 2.1. *Пусть функция f определена на E_n. Тогда а) если $f \in L_p(E_n)$, где $1 \leqslant p \leqslant \infty$, то функция $M(f)$ почти всюду конечна, б) если $f \in L_p(E_n)$, где $1 < p \leqslant \infty$, то $M(f) \in L_p(E_n)$ и*

$$\|M(f)\|_p \leqslant A_p \|f\|_p, \tag{2.2}$$

где A_p зависит от p и размерности n.

Анизотропные потенциалы в основном обладают теми же свойствами, что и потенциалы Рисса (см. [10]—[13]).

Теорема 2.2 (см. [10], стр. 32). *Если $0 < \alpha < |\mu|$, $1 < p < q < \infty$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{|\mu|}$, то для любого $f \in L_p$ $I_{\mu, \alpha}(f) \in L_q$ и имеет место неравенство*

$$\|I_{\mu, \alpha}(f)\|_q \leqslant A \|f\|_p, \tag{2.3}$$

где постоянная A не зависит от f.

Следующая теорема, установленная В. А. Солонниковым [14], является обобщением теоремы Е. Гальярдо [15], Л. Ниренберга [16] на анизотропный случай.

Теорема 2.3. *Пусть $f \geqslant 0$, $0 < \alpha < |\mu|$, $0 < \theta < 1$, $1 < p < \infty$, $p < q \leqslant \infty$, $\frac{1}{r} = \frac{1-\theta}{p} + \frac{\theta}{q}$. Тогда*

$$\|I_{\mu, \alpha\theta}(f)\|_r \leqslant C \|f\|_p^{1-\theta} \|I_{\mu, \alpha}(f)\|_q^\theta. \tag{2.4}$$

Аналогично работе [12] можно доказать обобщенный вариант неравенства (2.4).

Теорема 2.4. *Пусть* $f > 0$, $0 < \alpha < |\mu|$, $0 < \theta < 1$, $1 < p < \infty$, $1 < q < \infty$, $\theta < t < \theta + (1-\theta)p$, $\frac{1}{r} = \frac{t-\theta}{p} + \frac{\theta}{q}\cdot$ *Тогда*

$$\|I_{\mu,\alpha\theta}(f^t)\|_r \leqslant A\|f\|_p^{t-\theta}\|I_{\mu,\alpha}(f)\|_q^{\theta}. \tag{2.5}$$

Теорема 2.3 является частным случаем теоремы 2.4, соответствующим значению $t = 1$.

§ 3. Дополнение

В этом параграфе покажем, что если $\mathrm{N} = \{\alpha;\ (\alpha, \mu) \leqslant m\}$, где μ — некоторый вектор, m — произвольное целое число, то теорема 1.1 верна без условия (Д. У), т. е. для любого $p > 1$. Для этого нам понадобится доказать аналог замечания 1.1. Будем различать два случая:

а) Пусть μ, p, m такие, что $pm > |\mu|$. Тогда (см. [10], 10.4) $W_p^{\mathrm{N}}(E_n) \subset C(E_n)$ и условие (Д. У) выполняется.

б) $pm \leqslant |\mu|$, тогда имеют место все результаты § 2.

Для доказательства замечания 1.1 нам понадобится обобщенный вариант теоремы Хедберга (см. [13]).

Теорема 3.1. *Пусть* $1 < p < \infty$, $mp \leqslant |\mu|$. *Тогда для любого* $u \in W_p^{\mathrm{N}}(E_n)$ *и* $\varepsilon > 0$ *можно найти функцию* $w \in W_p^{\mathrm{N}}(E_n)$, $0 \leqslant w \leqslant 1$ *такую, что* $(1-w)\,u \in W_p^{\mathrm{N}}(E_n) \cap L^\infty(E_n)$ *и* $\|wu\|_{\mathrm{N}} < \varepsilon$.

Доказательство. Из результатов книги [17], гл. 9 (см. также [18]) следует, что любую функцию $u \in W_p^{\mathrm{N}}(E_n)$, $\mathrm{N} = \{\alpha;\ (\alpha, \mu) \leqslant m\}$ можно представить в виде

$$I_{\mu,m}(g)(x) = u(x) = \int \frac{g(y)}{\rho_\mu(x,y)^{|\mu|-m}}\,dy,\quad g \in L^p,$$

$$\|g\|_{L_p} \leqslant C\,\|u\|_{\mathrm{N}}.$$

Пусть $\lambda > 0$ — произвольное число. Обозначим через

$$G_\lambda = \left\{x;\ I_{\mu,m}(|g|)(x) > \frac{1}{\lambda}\right\},\quad \Phi_\lambda(x) = \lambda\cdot I_{\mu,m}(|g|)(x).$$

Следовательно, $\Phi_\lambda(x) \geqslant 1$ при $x \in G_\lambda$. Пусть $H(t) \in C^\infty(R_1)$ такая, что

$$H(t) = \begin{cases} 0, & t < \frac{1}{2}, \\ 1, & t > 1 \end{cases},\quad 0 \leqslant H(t) \leqslant 1.$$

Положим $w_\lambda = H \circ \Phi_\lambda$. Очевидно, что $(1 - w_\lambda(x))\,u(x) \leqslant \lambda^{-1}$, поэтому $(1-w_\lambda)\,u \in L^\infty(E_n)$. Остается показать, что при $\lambda \to 0$

$$\|w_\lambda u\|_{\mathrm{N}} \to 0. \tag{3.1}$$

Так как норма $\|u\|_{\mathrm{N}}$ эквивалентна норме

$$\|u\|_p + \sum_{i=1}^{n} \|D_i^{l_i} u\|_{L_p}, \tag{3.2}$$

где $l^i=(0,\cdots,l_i,\cdots,0)$, $(l^i,\mu)=m$, $i=1,\cdots,n$, то достаточно показать оценку (3.1) для нормы (3.2).

Так как $w_\lambda(x)\to 0$ почти всюду при $\lambda\to 0$ и $0\leqslant w_\lambda(x)\leqslant 1$, то из теоремы Лебега непосредственно следует, что $\|w_\lambda u\|_{L_p}\to 0$, при $\lambda\to 0$. Оценим производные $D_i^{l^i}(w_\lambda u)$, $i=1,\cdots,n$. Из формулы Лейбница для любого i: $i=1,\cdots,n$ имеем

$$D_i^{l^i}(uw_\lambda)=\sum_j C_j D_i^j(w_\lambda)D_i^{l^i-j}u.$$

Оценим каждое слагаемое в отдельности. Для $j=0$ уже доказано, что $\|w_\lambda D^\alpha u\|_p\to 0$, когда $\lambda\to 0$. Пусть теперь $j>0$. Так как $w_\lambda(x)\equiv 1$ на G_λ, то $D_i^j w_\lambda\equiv 0$ на G_λ, следовательно остаются интегралы CG_λ.

Применяя неравенство (2.4) для производной $D_i^j u$, $i=1,\cdots,n$ $(j=0,1,\cdots,l^i-1)$, имеем

$$|D_i^{l^i-k}u(x)|\leqslant C\,I_{\mu,k\cdot\mu_i}|g|(x)\leqslant C(M(|g|)(x))^{1-\frac{k\mu_i}{m}}\times$$

$$\times I_{\mu,m}(|g|)(x)^{\frac{k\mu_i}{m}}\leqslant C(M|(g)|)(x)^{1-\frac{k\mu_i}{m}}\lambda^{-\frac{k\mu_i}{m}}$$

вне G_λ.

Если $k<l^i$, то для производной $D_i^k\Phi_\lambda(x)$ вне G_λ получим

$$|D_i^k\Phi_\lambda(x)|=|\lambda D_i^k(I_{\mu,m}(|g|))|\leqslant C\lambda I_{\mu,m-k\mu_i}(|g|)\leqslant$$

$$\leqslant C\lambda M(|g|)(x)^{\frac{k\mu_i}{m}}(I_{\mu,m}|g|)^{1-\frac{k\mu_i}{m}}\leqslant CM(|g|)(x)^{\frac{k\mu_i}{m}}\lambda^{\frac{k\mu_i}{m}}. \tag{3.3}$$

Для оценки $D_i^k(H\circ\Phi(x))$ имеем

$$D_i^k(H\circ\Phi(x))=\sum_{j=1}^{k}H^{(j)}(\Phi(x))\sum_{r_1+\cdots+r_j=k}C_r D_i^{r_1}\Phi(x)\cdots D_i^{r_j}\Phi(x).$$

Отсюда и из оценки (3.3) получим

$$D_i^k(H\circ\Phi(x))\leqslant\sum_{j=1}^{k}\sum_{r_1+\cdots+r_j=k}C(M(g)(x))^{\frac{r_1\mu_i}{m}+\cdots+\frac{r_j\mu_i}{m}}\times$$

$$\times\lambda^{\frac{r_1\mu_i+\cdots+r_j\mu_i}{m}}\leqslant CM(g)(x)^{\frac{k\mu_i}{m}}\lambda^{\frac{k\mu_i}{m}}.$$

Для производной $k=l_i$ имея

$$D_i^{l^i}(H\circ\Phi(x))=H^{(1)}(\Phi(x))D_i^{l^i}\Phi(x)+$$

$$+\sum_{k=2}^{l_i}H^{(k)}\Phi(x))\sum_{r_1+\cdots+r_k=l_i}C_r D_i^{r_1}\Phi(x)\cdots D_i^{r_k}\Phi(x),$$

$$|D_i^{l_i}(H\circ\Phi(x))|\leqslant C(\lambda M(g)(x)+D_i^{l_i}\Phi(x))\leqslant$$

$$\leqslant C\lambda(M(g)(x)+D_i^{l_i}I_{\mu,m}|g|(x)),$$

Окончательно для любого $i: i=1, \cdots, n$ получим а). При $0<k<l^i$

$$|D_i^k w_\lambda(x)|\,|D_i^{l_i-k} u(x)| \leqslant CM(g)(x)^{\frac{k\mu_i}{m}} \lambda^{\frac{k\mu_i}{m}} \times$$

$$\times M(g)(x)^{1-\frac{k\mu_i}{m}} \lambda^{-\frac{k\mu_i}{m}} \leqslant CM(g)(x). \tag{3.4}$$

б) При $k=l_i$

$$|D_i^{l_i} w_\lambda(x)|\,|u(x)| \leqslant C(M(g)(x)+D_i^{l_i-} I_{\mu, m}|g|(x)). \tag{3.5}$$

Из свойств функций $M(g)(x)$ и $u \in W_p^N$ следует, что функции, стоящие в правой части неравенств (3.4), (3.5) принадлежат L^p, следовательно $D_i^{l_i}(w_\lambda u) \in L^p$. Так как $D_i^{l_i}(w_\lambda u)(x) \to 0$ п. в. при $\lambda \to 0$, то по теореме Лебега при $\lambda \to 0$ получим

$$\sum_{i=1}^{n} \|D_i^{l_i}(w_\lambda v)\|_{L_p} \to 0.$$

Теорема доказана.

Ереванский государственный университет Поступила 26.II.1985

Գ. Ա. ԿԱՐԱՊԵՏՅԱՆ. Եզրային խնդիր ոչ գծային ռեգուլյար հավասարումների համար անսահմանափակ տիրույթներում *(ամփոփում)*

Աշխատանքը հանդիսանում է [3] և [6] աշխատանքների ընդհանրացումը։ Եթե մինչ այս ռեգուլյար ոչ գծային հավասարումների լուծումների ուսումնասիրության ժամանակ սահմանափակումները դրվում էին գործակիցների վրա համախմբության իմաստով. ապա այստեղ առանձնացվում են «ավագ» անդամները և «կրտսեր» անդամները։ «Կրտսեր» անդամների վրա դրվում են անհամեմատ ավելի թույլ պայմաններ, քան «ավագ» անդամների վրա։ Այս պայմանների դեպքում ոչ գծային ռեգուլյար հավասարումների Դիրիխլեի խնդրի համար ապացուցվում է գոյության (որոշ դեպքում նաև միակության) թեորեմներ անսահմանափակ տիրույթներում։

G. A. KARAPETIAN. *Boundary value problem for non-linear regular equations in unbounded domains* (summary)

The article is a generalization of the articles [3] and [6]. For a regular equation the "higher" coefficients and "lower" coefficients are defined. On the "lower" coefficients weaker conditions are imposed than on "higher" coefficients.

Under these conditions theorems of existence (in some cases with uniqueness) are proved for Dirichlet problem for non-linear regular equations.

ЛИТЕРАТУРА

1. *С. М. Никольский.* Об устойчивых граничных значениях дифференцируемой функции многих переменных, Мат. сб., 61(103), № 2, 1963, 224—252.
2. *Г. Г. Казарян.* Вариационная краевая задача для квазилинейных уравнений регулярного и нерегулярного типов, Диф. ур., № 6, 1983, 1007—1018.
3. *Г. Г. Казарян, Г. А. Карапетян.* О сходимости галеркинских приближений к решению задачи Дирихле для некоторых общих уравнений, Мат. сб., 124, № 3, 1984, 291—306.
4. *F. E. Browder.* Pseudo-monotone operators and nonelliptic boundary value problem on unbounded domains, Proc. Nat. Acad. Sci, 74, 1977, 2559—2611.

5. *J. R. Webb.* Boundary value problem for strongly nonlinear elliptic Equations, J. of the London Math. Sociaty, 21, 1980, 123—131.
6. *F. H. Michael.* An elliptic boundary value problem for nonlinear equations in unbounded domains, Annales Univ. Sci. Budapest, Secto Math, 26, 1983, 125—139.
7. *H. Brèzis.* Equations et inequations non linéaires dans les spacet vectoriels en dualité, Ann Inst. Fourier (Grenoble), 18, 1968, 115—175.
8. *М. М. Вайнберг.* Функциональный анализ, М., «Просвещение», 1979.
9. *F. E. Browder* Existence theory for boundary value problems for quasilinear elliptic systems withe strongly nonlinear lower order terms, Proceedings Symposia in Pure Math., 23 (American Soc. Providence, R. I 1971), 269—286.
10. *О. В. Бесов, В. П. Ильин, С. М. Никольский.* Интегральное представление функций и теоремы вложения, М., «Мир», 1975.
11. *И. Стейн*, Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций, М., «Мир», 1973.
12. *L. I. Hedberg.* On certain convolutions inequalities, Proc. Amer. Mat. Soc., 36, 1972, 505—510.
13. *L. I. Hedberd.* Two approximation problem in functions spaces, Ack. Math., 16, 1978, 51—81.
14. *В. А. Солонников.* О некоторых неравенствах для функций из классов $W_p(E_n)$. Записки научных семинаров ЛОМИ АН СССР, 27, 1972, 194—210.
15. *E. Gagliardo.* Ulterori proprietà di alcune classi di funzconi in piû variabili, Recerch di Math., 8, 1959, 24—51.
16. *L. Nirenberg.* On elliptic partial differential equations, Ann. Scuola Norm. Sup-di. Pisa, ser, III, 13, Fasc. II, 1959, 115—162.
17. *С. М. Никольский.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, М., «Наука», 1977.
18. *П. И. Лизоркин.* Обобщенные лиувиллевские дифференцирования и функциональные пространства L_{pr} Мат. сб., 50, № 3, 1963.