ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XXIII, № 1, 1988 Математика

УДК 517.956

Г. Р. ОГАНЕСЯН

О ВЕСОВЫХ ЗАДАЧАХ КОШИ И ДИРИХЛЕ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ СИНГУЛЯРНЫХ НА ГРАНИЦЕ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

§ 1. Введение

1°. Постановка задачи. Пусть $q(t)$ — положительная функция класса $C^2(]0, T])$, $\Delta = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ — оператор Лапласа, $\Omega = \{(t, x), t \in]0, T[, x \in R^n\}$, $\Omega_T = \{(t, x), t = T, x \in R^n\}$.

Для сингулярного эллиптического уравнения

$$[\partial_t^2 + \Delta - q(t)]u = f(t, x), \ q(+0) = \infty, \ (t, x) \in \Omega, \tag{1.1}$$

краевая задача с данными Дирихле на границе $\partial\Omega$ полосы Ω в классе дважды непрерывно дифференцируемых внутри и непрерывных вплоть до границы функций, вообще говоря, неразрешима, так как однозначно разрешима задача Дирихле с краевыми условиями на части Ω_T границы ([1]).

Для сингулярного гиперболического уравнения ($a(t)$ — комплекснозначная функция)

$$[\partial_t^2 - \Delta + a(t)]u = f(t, x), \ |a(+0)| = \infty, \ (t, x) \in \Omega, \tag{1.2}$$

решение обычной задачи Коши с данными на гиперплоскости $t = 0$ неединственно. Например, при $a = -\frac{2}{t^2}$ нетривиальным решением однородной задачи Коши в Ω является функция $u = t^2$.

В подобных ситуациях в книгах [2], [3] и статьях [4] — [10], [16] рассматривались весовые постановки задач Дирихле и Коши в классах неограниченных (на сингулярной части границы) функций.

В настоящей статье предлагается новая постановка начальной и краевой задач, обобщающая известные весовые постановки. При этом краевые условия задаются (в терминах преобразования Фурье искомого решения (сравнить с [11])) в кокасательном расслоении $T^*\Omega$, а затем опускаются на $\partial\Omega$.

Рассмотрим линейный дифференциальный оператор вида

$$L = L(t, \partial_t, D) = \partial_t^m + \sum_{k=0}^{m-2} A_k(t, D)\partial_t^k, \tag{1.3}$$

где $D = \left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_n}\right)$, а $A_k(t, D)$ — произвольные линейные дифференциальные операторы (вообще говоря, бесконечного порядка), с коэффициентами, непрерывно зависящими от t в $]0, T]$, символы которых — целые аналитические функции от $\xi \in (R^n)'$ при фиксированном $t \in]0, T]$.

Обозначим через $\varphi(t, \xi) = [\varphi_1(t, \xi), \cdots, \varphi_m(t, \xi)]$ фундаментальную систему решений (ф. с. р.) уравнения

$$\hat{L}\hat{u}(t, \xi) \equiv \left[\partial_t^m + \sum_{k=0}^{m-2} A_k(t, \xi)\partial_t^k\right]\hat{u}(t, \xi) = 0, \tag{1.4}$$

полученного из (1.3) применением x-преобразования Фурье. Общее решение (1.4) запишется в виде

$$\hat{u}(t, \xi) = \sum_{k=1}^{m} c_k(\xi)\varphi_k(t, \xi). \tag{1.5}$$

Дифференцируя это представление j раз по t $(j=0, 1, \cdots, m-1)$ и разрешая полученную систему уравнений относительно функций $c_k(\xi)$, получим

$$c_k(\xi) = O_k(\hat{u}),\ k = 1, \cdots, m, \tag{1.6}$$

где

$$O_k(\hat{u}) = \frac{1}{W(\varphi)} \cdot W(\varphi_1, \cdots, \varphi_{k-1}, \hat{u}, \varphi_{k+1}, \cdots, \varphi_m), \tag{1.7}$$

$$O_\varphi(\hat{u}) = (O_1(\hat{u}), \cdots, O_m(\hat{u})),$$

а вронскиан

$$W(\varphi) = W(\varphi_1, \cdots, \varphi_m) = \det\|\partial_t^{k-1}\varphi_j\|_{k,\,j=1}^{m}$$

не зависит от ξ и не обращается в нуль (такая ф. с. р. существует в силу формулы Лиувилля и вида уравнения (1.4)).

Если задать данные Коши при $t = +0$ в $T^*\Omega$ в виде

$$\lim_{t \to +0} O_\varphi(\hat{u}) = \hat{g}(\xi), \tag{1.8}$$

где $g(\xi)$ — произвольные заданные вектор-функции, то $\hat{u}$ определяется однозначно (из (1.5), (1.6)) по формуле

$$\hat{u}(t, \xi) = \sum_{k=1}^{m} \hat{g}_k(\xi)\varphi_k(t, \xi). \tag{1.9}$$

Замечание 1.1. Из (1.9) следует инвариантность постановки задачи (1.8) относительно мультипликативного преобразования $\hat{u} \to b(t)\hat{u}$, $b(t)$ — функция класса $C^m(]0, T])$, которая может иметь особенность при $t = 0$, и замены переменной $\tau = w(t)$, $w(t) \in C^m(]0, T])$, которая может быть вырожденной при $t = 0$.

Замечание 1.2. Если $\psi(t, \xi)$, $\varphi(t, \xi)$ — две ф. с. р. уравнения (1.4), принадлежащие классу $C^m(]0, T], A)$ (здесь $A = A(R^n_\xi)$ — класс целых аналитических функций), то данные $O_\varphi(\hat{u})$ взаимно однозначно определяют данные $O_\psi(\hat{u})$, точнее существует целая аналитическая невырожденная матрица $F(\xi)$ такая, что

$$\psi(t,\xi)=F(\xi)\varphi(t,\xi) \text{ и } O_\varphi(\hat{u})={}^{tr}F(\xi)\,O_\psi(\hat{u}).$$

При этом операторы O_φ, $O_\psi : u \mapsto g(x)$ эквивалентны т. е. коммутативна диаграмма (пространства $H^{\pm\infty}$ определяются ниже в п. 2)

$$\begin{array}{ccc} & (\operatorname{Ker} L)\cap C^m(]0,\ T[,\ H^{\pm\infty}) & \\ O_\psi \downarrow & & \downarrow O_\varphi \\ \prod\limits_{j=1}^{m} H^{\pm\infty} & \xrightarrow{{}^{tr}F(D)} & \prod\limits_{j=1}^{m} H^{\pm\infty}. \end{array}$$

Замечание 1.3. Имея в виду упрощение оператора $O(u)$ в дальнейшем, полезно отметить, что его изменение на бесконечно малую (при $t\to 0$) величину не влияет на постановку задачи (1.8).

2°. Теорема Коши—Ковалевской для уравнений с особенностью. Пусть $a(\xi)$ — целая аналитическая функция вида

$$a(\xi)=\sum_{|\alpha|=0}^{\infty} a_\alpha \xi^\alpha,\quad a_\alpha \geqslant 0, \tag{1.10}$$

где α — мультииндекс, $\xi \in (R^n)'$.

Следуя Ю. А. Дубинскому [13] определим пространство H^∞ как множество комплекснозначных функций $f(x)\in L_2(R^n)$ таких, что для любых функций вида (1.10) конечен интеграл

$$\int a(\xi)\,|\hat{f}(\xi)|^2\,d\xi < \infty. \tag{1.11}$$

Через $H^{-\infty}$ обозначим совокупность всех линейных непрерывных функционалов, определенных на основном пространстве H^∞.

Пространства $H^{\pm\infty}$ инвариантны относительно дифференциальных операторов бесконечного порядка $B(D)$ с аналитическими в $(R^n)'$ символами (см. [13]). По предположению $A_k(t,\xi)\in C(]0,\ T],\ A)$, поэтому из теории обыкновенных дифференциальных уравнений имеем $\varphi_j(t,\xi)\in$ $\in C^m(]0,\ T],\ A)$. Сопоставим каждой функции $\varphi_j(t,\xi)$ дифференциальный оператор бесконечного порядка

$$\varphi_j(t,D)f(x)=\int e^{ix\xi}\varphi_j(t,\xi)\hat{f}(\xi)\,d\xi,\quad f\in H^\infty,$$

который действует непрерывно в H^∞. Выберем ф. с. р. $\varphi(t,\xi)$ так, чтобы вронскиан $W(\varphi)$ не зависел от ξ.

Обозначим через $O(u)=(O_1(u),\cdots,\ O_m(u))$ начальный оператор, определяемый формулами

$$O_k(u)=\frac{1}{W(\varphi)}\,W(\varphi_1,\ D),\cdots,\ \varphi_{k-1}(t,D),\ \overset{1}{u},\ \varphi_{k+1}(t,D),\cdots,\ \varphi_m(t,D)),$$

$$k=1,\cdots,\ m, \tag{1.12}$$

здесь единица над u — обозначение Фейнмана—Маслова, например, $\overset{1}{u}\,\overset{2}{B}(D)\,\overset{3}{A}(D)=A(D)B\ (D)\,u.$

Теорема 1. *Для любых* $g(x)\in\prod_{j=1}^{m} H^{\infty}$ $\left(\text{или } g(x)\in\prod_{j=1}^{m} H^{-\infty}\right)$ *существует единственное решение* $u\in C^{m}(]0,\ T],\ H^{\infty})$ $(u\in C^{m}(]0,\ T],\ H^{\infty})$ *задачи Коши*

$$Lu=0,\ (t,\ x)\in\Omega, \tag{1.13}$$

$$\lim_{t\to+0} O(u)=g(x)=(g_1(x),\cdots,\ g_m(x)). \tag{1.14}$$

Пример 1.1. Единственное решение задачи Коши $(m=1)$

$$u_t-\lambda'(t)\,u_x+a'(t)\,u(t,\ x)=0,\ t>0,\ x\in R^1,$$

$$\lim_{t\to+0} O(u)=g(x)\in H^{\infty},$$

$$O(u)=[\exp(a(t)-i\lambda(t)D)]\,u(t,\ x),\quad D=\frac{1}{i}\,\frac{\partial}{\partial x},$$

имеет вид $u=g(x+\lambda(t))\exp[-a(t)]$. Отметим, что эта задача имеет смысл, даже если функции $a'(t)$, $\lambda'(t)$ имеют при $t=0$ неинтегрируемые особенности, например $a(t)=t^{-5}$, $\lambda(t)=it^{-6}$. Если $a'(t)$, $\lambda'(t)\in$ $\in L_1[0,\ T]$, то разность $O(u)-u$ стремится к нулю при $t\to0$ и мы получаем обычную задачу Коши (см. замечание 1.3 пункта 1).

Теорема 1 малоэффективна, так как для постановки задачи (1.14) необходимо знать ф. с. р. двойственного уравнения. Следует ожидать, что в тех случаях, когда известна двойная асимптотика ф. с. р. при $t\to0$ и $\xi\to\infty$, постановку задачи (1.14) можно упростить. Мы осуществим этот план для эллиптического уравнения с особенностью, заменив задачу Коши весовой задачей Дирихле (см. п. 3°).

3°. Эллиптический случай. Весовая задача Дирихле. Рассмотрим уравнение (1.1). Пусть $q(t)$ — вещественная, положительная функция класса $C^2(]0,\ T])$ такая, что выполнены следующие условия:

$$q_0=\inf_{t\in]0,\ T]}\{q(t)\}>0, \tag{1.15}$$

$$\rho_0=\int_0^T\left(\frac{|q''(\tau)|}{8\,q^{3/2}}+\frac{5\,|q'(\tau)|^2}{32\,q^{5/2}}\right)d\tau<\infty, \tag{1.16}$$

$$|q'(t)\,q^{-\frac{3}{2}}(t)|<4\gamma_0,\ \gamma_0=\frac{2}{(2\,e^{2\rho_0}-1)^2}-1, \tag{1.17}$$

$$\int_0^T\sqrt{q(s)}\,ds=\infty \tag{1.18}$$

Введем вспомогательные весовые функции

$$\mu_k(t)=q^{\frac{1}{4}-\frac{k}{2}}(t)\,d(t),\ d(t)=\exp\int_T^t\sqrt{q(\tau)}\,d\tau, \tag{1.19}$$

пространство $Q(H^s)$ — пополнение $C^\infty(\Omega)$-функций по норме

$$|u|_Q^2 = \sup_{t \in]0, T]} \sum_{k=0}^{2} \mu_k^2(t) \|\partial_t^k u\|_{s-\alpha}^2, \tag{1.20}$$

и пространство $B(H^s)$ — пополнение $C^\infty(R_+^{n+1})$-функций по норме

$$|u|_B^2 = \sup_{t \in]0, \infty[} \sum_{k=0}^{2} \sigma_k^2(t) \|\partial_t^k u\|_{s-\alpha}^2, \tag{1.21}$$

здесь $\|\cdot\|_s$ — норма пространства Соболева $H^s = H^s(R_x^n)$,

$$\alpha = \begin{cases} 0, & k=0, \\ \dfrac{1}{2}, & k=1, \\ \dfrac{3}{2}, & k=2, \end{cases} \quad \sigma_k(t) = \begin{cases} \mu_k(t), & t \leqslant T, \\ 1, & t > T. \end{cases} \tag{1.22}$$

Теорема 2. *В условиях* (1.15)—(1.18) *весовая задача Дирихле*

$$u_{tt} + \Delta u = q(t)\, u + f(t, x), \quad (t, x) \in \Omega, \tag{1.1}$$

$$\lim_{t \to +0} \|\mu_0(t)\, u(t, x) - \Phi_1(x)\| = 0, \tag{1.23}$$

$$\lim_{t \to T-0} \|u(t, x) - \Phi_2(x)\| = 0, \tag{1.24}$$

при

$$\Phi_1 \in H^s, \ \Phi_2 \in H^{s+\frac{1}{2}}, \ f(t, x)\, q^{-\frac{1}{4}}(t) \in C([0, T], H^s), \ s \geqslant \frac{3}{2}$$

имеет единственное решение $u \in Q(H^s)$ *причем справедливы оценки*

$$|u|_Q^2 \leqslant c \left\{ \|\Phi_1\|_s^2 + \|\Phi_2\|_{s+\frac{1}{2}}^2 + \int_0^T \frac{\|f(\tau, x)\|_s^2}{\sqrt{q(\tau)}}\, d\tau + \sup_{t \in]0, T]} \left[\frac{d^2(t) \|f\|_s^2}{q^{3/2}(t)} \right] \right\}, \tag{1.25}$$

где постоянная с зависит только от q_0 *и* ρ_0 (см. (1.15) *и* (1.16)).

Замечание 1.4. Если $f \equiv 0$, то $4\gamma_0$ в (1.17) можно заменить произвольной постоянной.

Рассмотрим задачу Дирихле для однородного уравнения (1.1) в полупространстве $R_+^{n+1} = \{(t, x),\ t > 0,\ x \in R^n\}$. Пусть $q(t)$ — вещественная, положительная функция класса $C^2(]0, \infty[)$, удовлетворяющая для некоторого $T > 0$ условиям (1.15), (1.16) и

$$\int_T^\infty |q(\tau)|\, d\tau \leqslant M < \infty, \tag{1.26}$$

$$q'(t)\, q^{-\frac{3}{2}}(t) < N < \infty, \quad t \in]0, T], \tag{1.27}$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T \frac{dt}{\sqrt{q(t)}} \geqslant \sqrt{\frac{8}{q_0}}. \tag{1.28}$$

Теорема 3. *В условиях* (1.15), (1.16), (1.26)—(1.28) *весовая задача Дирихле*

$$u_{tt}+\Delta u=q(t)u,\ q(0)=\infty,\ (t,x)\in R_+^{n+1}, \qquad \lim_{t\to+0}\|\mu_0(t)u(t,x)-\Phi(x)\|=0, \tag{1.29}$$

имеет единственное решение, причем справедливы оценки

$$|u|_B\leqslant c\|\Phi\|_s, \tag{1.30}$$

где постоянная c *зависит только от* q_0, M, N.

Пример 1.2. Если ρ, δ, σ — положительные постоянные и $p>2$, $\delta>2$, то функции

$$\frac{\rho}{t^\delta},\ \frac{\rho}{t^2}|\ln t|^p,\ \exp\left(\frac{\rho}{t^\sigma}\right)$$

удовлетворяют условиям (1.5)—(1.18) теоремы 2.

Пример 1.3. Функция

$$q(t)=\rho t^{-2\delta}(1+t^\gamma)^2,\ \delta>1,\ \frac{1}{2}<\delta-\gamma<1,\ \rho>0$$

удовлетворяет условиям (1.15), (1.16), (1.26)—(1.28) теоремы 3.

Пример 1.4. Уравнение

$$u_{tt}+\lambda^2(t)u_{xx}=q_1(t)u+\sigma_1(t)\Lambda u+b(t)u_t+f(t,x), \tag{1.31}$$

$\lambda(0)=0$, $b(0)=q_1(0)=\infty$, Λ — п. д. о. с символом $\langle\xi\rangle=\sqrt{1+|\xi|^2}$, преобразованием

$$\tau=\int_0^t\lambda(s)\,ds,\quad u=\mu(t)\,w(\tau,x)\quad \mu(t)=\lambda^{-\frac{1}{2}}(t)\exp\left\{\int_a^t\left(\frac{b(s)}{2}\right)ds\right\}$$

сводится к уравнению

$$w_{\tau\tau}+w_{xx}=\sigma(t)\Lambda w+q(t)w+\frac{f(t,x)}{\mu\lambda^2(t)}, \tag{1.32}$$

или, применением x-преобразования Фурье к уравнению

$$\hat{w}_{\tau\tau}=Q\hat{w}+\frac{\hat{f}}{\mu\lambda^2},\quad Q=|\xi|^2+\sigma(t)\langle\xi\rangle+q(t),$$

где

$$\sigma(t)=\frac{\sigma_1(t)}{\lambda^2(t)},\quad q(t)=\lambda^{-2}\left(q_1+\frac{b^2}{4}-\frac{b_t}{2}+\frac{\lambda_{tt}}{2\lambda}-\frac{3\lambda_t^2}{4\lambda^2}\right).$$

К уравнению (1.32) при $\sigma\equiv0$ применимы теоремы 2, 3. При $\sigma\geqslant0$ и некоторых дополнительных условиях для уравнения (1.32) можно доказать аналоги теорем 2, 3.

Замечание 1.5. Если функция $p(t,x)$ подчинена $q(t)$, т. е. выполнено условие

$$\|p\|_s^2<q_0\cdot q(t)\cdot d^2(t), \tag{1.33}$$

то теорема 2 остается справедливой и для уравнения

$$[\partial_t^2+\Delta-q(t)-p(t,\ x)]u=f(t,\ x), \text{ при малом } T. \qquad (1.34)$$

Замечание 1.6. Пусть функция $q(t)+b(t)$ удовлетворяет условиям теоремы 2. Для того, чтобы решение весовой задачи Дирихле для возмущенного уравнения

$$u_{tt}+\Delta u=[q(t)+b(t)]u(t,\ x),\ q(0)=\infty,\ t,\ x)\in\Omega, \qquad (1.35)$$

$\lim\limits_{t\to+0}\mu_0 u=\Phi_1(x)$, $\lim\limits_{t\to T-0}u=\Phi_2(x)$ (поточечная сходимость) было единственным необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{t\to 0}\sqrt[4]{\frac{q(t)}{q(t)+b(t)}}\exp\int_t^T\frac{b(\tau)\,d\tau}{\sqrt{q(\tau)}+\sqrt{q(\tau)+b(\tau)}}\neq 0. \qquad (1.36)$$

Например, для функций $q=t^{-4}$, $b=-t^{-3}$, $t^{-3}/\ln t$ условие (1.36) нарушено, а для функций $q=t^{-4}$, $b=t^{-3}$, $t^{-3}/\ln^2 t$ выполнено.

Замечание 1.7. Если $q(t)\in L_1[0,\ T]$, то для уравнения (1.1) корректна обычная задача Дирихле (без веса).

§ 2. Доказательство теоремы

Доказательство теоремы 1 проводится аналогично доказательству соответствующей теоремы из [13] (см. § 5).

I случай: $g(x)\in\prod\limits_{j=1}^{m}H^{\infty}$. Так как решение u начальной задачи (1.13), (1.14) мы ищем в классе $C^m(]0,\ T],\ H^{\infty})$, то существует x-преобразование Фурье решения $\hat{u}(t,\ \xi)\in C^m(]0,\ T],\ L_{2\,\mathrm{comp}}(R_x^n))$. Далее из (1.5), (1.6), (1.14) получаем явную формулу для решения

$$u(t,\ x)=\sum_{j=1}^{m}\varphi_j(t,\ D)\,g_j(x). \qquad (2.1)$$

Если $g\in\prod\limits_{j=1}^{m}H^{\pm\infty}$, то эта формула имеет смысл (так как $\varphi_j(t,\ \xi)\in C^m(]0,\ T],\ A)$, то $\varphi_j(t,\ D)\colon H^{\pm\infty}\to H^{\pm\infty}$). Непосредственно проверяется, что функция (2.1) удовлетворяет уравнению $Lu=0$. Начальные условия (1.14) следуют из операторного тождества

$$O(u)=O\left(\sum_{j=1}^{m}\varphi_j(t,\ D)\,g_j(x)\right)=g(x). \qquad (2.2)$$

Итак теорема существования в этом случае доказана.

Единственность решения при фиксированной ф. с. р. очевидна.

II случай: $g(x)\in\prod\limits_{j=1}^{m}H^{-\infty}$. Покажем, что и в этом случае решение задачи (1.13), (1.14) опять задается формулой (2.1), имеющей смысл и в этом случае. Начальные условия следуют из тождества (2.2). Действие оператора $A(t, D)$ в $H^{-\infty}$ определяется формулой

$$\langle A(t, D)u, v\rangle = \langle u, A(t, -D)v\rangle,\ u(x)\in H^{-\infty},\ v(x)\in H^{\infty}, \quad (2.3)$$

поэтому для любой функции $v(x)\in H^{\infty}$, в силу $\varphi_j(t, \xi)\in \operatorname{Ker}\tilde{L}$, имеем

$$\langle Lu, v\rangle = \sum_{j=1}^{m}\left\langle \partial_t\varphi_j(t, D) + \sum_{k=0}^{m-2} A_k(t, D)\,\partial_t^k\varphi_j(t, D)\right| \Phi_j(x), v\rangle =$$

$$= \sum_{j=1}^{m}\langle \Phi_j(x), \left|\partial_t^m\varphi_j(t, -D) + \sum_{k=0}^{m-2} A_k(t, -D)\,\partial_t^k\varphi_j(t, -D)\right| v\rangle = 0,$$

откуда следует, что $Lu = 0$. Для доказательства единственности заметим, что из предположения $u(\cdot, x)$, $\Phi(x)\in H^{-\infty}$ следует существование x-преобрзазований Фурье этих функций $\hat{u}(\cdot, \xi), \hat{\Phi}(\xi)\in$ $\in L_{2\,\mathrm{loc}}(R^n_\xi)$ и уравнение $Lu = 0$ эквивалентно уравнению $\hat{L}\hat{u} = 0$, из которого следует единственность, ввиду формул (1.5), (1.6).

Доказательство замечания 1.1 Инвариантность оператора $O(u)$ относительно преобразования $\varphi\to b(t)\varphi$, $u(t, x)\to b(t)u$ следует из формулы $O_{b\varphi}(\widehat{bu}) = O_\varphi(\hat{u})$, которая, в свою очередь, следует из свойства вронскиана $W(b\varphi_1, \cdots, b\varphi_m) = b^m(t)\,W(\varphi_1, \cdots, \varphi_m)$.

Преобразованием $\tau = w(t)$, $w_t' \neq 0$ при $t\in]0, T]$ ф. с. р. $\varphi(t, \xi)$ преобразуется в ф. с. р. $\psi(\tau, \xi) \equiv \varphi(w^{-1}(\tau), \xi)$. Пусть $\hat{v}(\tau, \xi) = \hat{u}\times$ $\times(w^{-1}(\tau), \xi)$. Инвариатность оператора $O_\varphi(\hat{v})$ следует из соотношения $O_\varphi(\hat{u}) = O_\psi(\hat{v})$ (здесь $W(\psi) = \det\|\partial_\tau^{k-1}\psi_j\|_{k, j=1}^{m}$).

Доказательство замечания 1.2. Так как φ и ψ—ф. с. р. уравнения $\hat{L}\hat{u} = 0$, то существует невырожденная матрица $F(\xi)$ такая, что $\psi(t, \xi) = F(\xi)\,\varphi(t, \xi)$. Дифференцируя это равенство $s-1$ раз по t, получим систему $\partial_t^{s-1}\psi_k = F_{kj}(\xi)\,\partial_t^{s-1}\varphi_j$, $s, k, j = 1, \cdots, m$, из которой получаем явное выражение для матрицы $F(\xi)$:

$$F_{kj}(\xi) = \frac{1}{W(\varphi)}\,W(\varphi_1, \cdots, \varphi_{j-1}, \psi_k, \varphi_{j+1}, \cdots, \varphi_m),\ k, j = 1, \cdots, m. \quad (2.4)$$

Из этой формулы следует аналитичность $F(\xi)$ при $m\geqslant 2$ и $\xi\in(R^n)'$.

При $m = 1$ скалярная функция $F(\xi)$ находится из соотношения

$$F(\xi) = \frac{\psi(t, \xi)}{\varphi(t, \xi)} = \frac{\psi(\tau, \xi)}{\varphi(\tau, \xi)},\ t, \tau\in]0, T].$$

Если при $\xi = \xi_0$ аналитичность $F(\xi)$ нарушается, то $\varphi(t, \xi_0) = 0$ для всех $t\in]0, T]$, что невозможно, так как $\varphi(t, \xi)$ — ф. с. р..

Остальная часть замечания 1.2 слудует из формул

$$W(\psi) = (\det F)\cdot W(\varphi),$$

$$O_\varphi(\hat{u}) = ({}^{tr}F)\cdot O_\psi(\hat{u}),$$

§ 3. ВКБ-оценки. Доказательство теоремы 2

Применяя к уравнению (1.1) x-преобразование Фурье

$$\hat{u}(t, \xi) = \int e^{-ix\xi} u(t, x)\, dx,$$

получим вспомогательное обыкновенное дифференциальное уравнение с параметром ξ:

$$\hat{u}_{tt} - Q(t, \xi)\hat{u} = \hat{f}(t, \xi), \quad t \in]0, T[, \tag{3.1}$$

$$Q(t, \xi) = |\xi|^2 + q(t), \quad |\xi|^2 = \xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2. \tag{3.2}$$

Пусть функция $Q(t)$ комплекснозначна, дважды непрерывно дифференцируема на $]0, T]$ и удовлетворяет следующим условиям:

$$Q(t) \neq 0, \quad t \in]0, T], \tag{3.3}$$

существует ветвь корня $\sqrt{Q}$ класса $C^2(]0, T])$, такая, что

$$\operatorname{Re}\sqrt{Q} > 0. \tag{3.4}$$

Ввведем обозначения

$$S(t, T) = \int_t^T \sqrt{Q(\tau)}\, d\tau, \quad \rho(t, T) = \left| \int_t^T \left| \frac{Q_{\tau\tau}}{8Q^{3/2}} - \frac{5Q_\tau^2}{32Q^{5/2}} \right| (\tau)\, d\tau \right|, \tag{3.5}$$

$$\begin{gathered} \delta_1(t, T) = 2[-1 + \exp\{\rho(t, T)\}], \\ \delta_2(t, T) = \delta_1(t, T) + \left| \frac{Q_t}{4Q^{3/2}}(t) \right| \cdot [1 + \delta_1(t, T)], \end{gathered} \tag{3.6}$$

$$\begin{gathered} \psi_1^0(t) = Q^{-\frac{1}{4}}(t) \exp\{-S(t, T)\}, \\ \psi_2^0(t) = Q^{-\frac{1}{4}}(t) \exp\{S(t, T)\}. \end{gathered} \tag{3.7}$$

Хорошо известна следующая (см., например, [12])

Лемма 3.1. *В условиях* (3.3)—(3.4) *и*

$$\rho(0, t) < \infty, \quad \rho(t, T) < \infty, \quad t \in]0, T[, \tag{3.8}$$

уравнение $\psi''(t) = Q(t)\psi$ *имеет решения* $\psi_{1,2}(t)$ *такие, что при* $t \in]0, T]$, $j = 1, 2$ *справедливы ВКБ-оценки*:

$$\left| \frac{\psi_j(t)}{\psi_j^0(t)} - 1 \right| \leqslant \delta_1(t, T\delta_{j2}), \quad \left| \frac{\psi_{jt}(t)}{\sqrt{Q}\psi_j^0(t)} - (-1)^j \right| \leqslant \delta_2(t, T\delta_{j2}), \tag{3.9}$$

здесь δ_{jk} — символ Кронеккера.

Замечание 3.1. Функции $\psi_{1,2}(t)$, существование которых утверждается в лемме 3.1, линейно независимы, если

$$\left| \frac{Q_t}{4Q^{3/2}}(t) \right| < \gamma_0, \quad t \in]0, T], \tag{3.10}$$

где постоянная γ_0 определяется формулой (1.17) с заменой $q(t)$ на $Q(t)$.

Условия (3.8) леммы 3.1 можно огрубить, потребовав выполнения условия (1.16), так как $\rho(0, t) \leqslant \rho_0$, $\rho(t, T) \leqslant \rho_0$.

Итак, в условиях (1.15)—(1.17) к уравнению

$$[\partial_t^2 - |\xi|^2 - q(t)]\varphi(t, \xi) = 0 \tag{3.11}$$

можно применить лемму 3.1, из которой следует существование ф. с. р. $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ уравнения (3.11) такой, что имеют место оценки

$$\left|\frac{\varphi_j(t, \xi)}{\varphi_j^0(t, \xi)} - 1\right| \leqslant \delta_1(t, T\delta_{j2}), \quad \left|\frac{\varphi_{jt}}{\varphi_j^0 \sqrt{Q}} - (-1)^j\right| \leqslant \delta_2(t, T\delta_{j2}), \; j = 1, 2; \tag{3.12}$$

здесь в отличие от (3.7), мы используем регуляризованные ВКБ-решения уравнения (3.11):

$$\varphi_{1,2}^0(t, \xi) = Q^{-\frac{1}{4}}(t, \xi) \exp\left\{\pm \int_t^T \sqrt{q(s)}\, ds \pm \int_0^t [\sqrt{q(s)} - \sqrt{Q(s, \xi)}]\, ds\right\}. \tag{3.13}$$

Общее решение уравнения (3.1) можно записать в виде

$$u(t, \xi) = C_1(\xi)\varphi_1(t, \xi) + C_2(\xi)\varphi_2(t, \xi) + \widehat{V}(t, \xi), \tag{3.14}$$

$$\widehat{V}(t, \xi) = \frac{1}{W(\varphi_2, \varphi_1)}\left[\varphi_1(t, \xi)\int_0^t \varphi_2 \widehat{f}(\tau, \xi)\, d\tau + \varphi_2(t, \xi)\int_t^T \varphi_1 \widehat{f}(\tau, \xi)\, d\tau\right]. \tag{3.15}$$

Из условия (1.18) следует, что

$$\lim_{t \to +0} \mu_0(t)\varphi_1^0(t, \xi) = 1, \quad \lim_{t \to +0} \mu_0(t)\varphi_2^0(t, \xi) = 0 \tag{3.16}$$

и (ввиду (3.12))

$$\lim_{t \to 0} \mu_0(t)\varphi_1(t, \xi) = 1, \quad \lim_{t \to +0} \mu_0(t)\varphi_2(t, \xi) = 0. \tag{3.17}$$

Поэтому при условии

$$f(t, x)\, q^{-\frac{1}{4}}(t) \in C([0, T], H^s), \quad W(\varphi_1, \varphi_2) = 1 \tag{3.18}$$

подставляя (3.14) в краевые условия (1.23), (1.24) формально получим соотношения

$$\lim_{t \to +0} \mu_0(t)\widehat{u}(t, \xi) = C_1(\xi) = \widehat{\Phi}_1(\xi),$$

$$\widehat{u}(T, \xi) = \left[C_1(\xi) - \int_0^T \varphi_2 \widehat{f}(\tau, \xi)\, d\tau\right]\varphi_1(T, \xi) + C_2(\xi)\varphi_2(T, \xi) = \widehat{\Phi}_2(\xi),$$

из которых находим функции $C_{1,2}(\xi)$. Подставив полученные формулы в (3.14) и дифференцируя k раз по t, получим ($k = 0, 1, 2$)

$$\partial_t^k \widehat{u} = \widehat{\Phi}_1 \partial_t^k \varphi_1 + \partial_t^k \widehat{V} + \frac{\partial_t^k \varphi_2(t, \xi)}{\varphi_2(T, \xi)}\left[\widehat{\Phi}_2 + \varphi_1(T, \xi)\left(\int_0^T \varphi_2 \widehat{f}\, d\tau - \widehat{\Phi}_1\right)\right], \tag{3.19}$$

где, ввиду (3.15)

$$\hat{V}_t = \frac{1}{w(\varphi_2, \varphi_1)} \left[\varphi_{1t}(t, \xi) \int_0^t \varphi_2 \hat{f}(\tau, \xi)\, d\tau + \varphi_{2t}(t, \xi) \int_t^T \varphi_1 \hat{f}(\tau, \xi)\, d\tau \right], \quad (3.20)$$

$$\hat{V}_{tt} = Q(t, \xi)\, \hat{V} + \hat{f}(t, \xi).$$

Перейдем к получению коэрцитивных оценок.

Обозначив

$$<\xi> = \sqrt{1 + \frac{|\xi|^2}{q_0}}, \quad \lambda_0(\tau, t) = \exp\left\{ - \left| \int_\tau^t \sqrt{q(s)}\, ds \right| \right\} \quad (3.21)$$

ввиду (1.15), получаем

$$\max\{q_0 <\xi>^2,\ q(t)\} \leqslant Q(t, \xi) \leqslant q(t) <\xi>^2, \quad (3.22)$$

$$Q^{\frac{k}{2} - \frac{1}{4}}(t, \xi) \leqslant q^{\frac{k}{2} - \frac{1}{4}}(t) <\xi>^a, \quad k = 0, 1, 2. \quad (3.23)$$

Из ВКБ-оценок (3.12) получаем при $k = 0, 1, 2$

$$\partial_t^k \varphi_1(t, \xi) \ll Q^{\frac{k}{2}} \varphi_1^0 \ll \frac{Q^{\frac{k}{2} - \frac{1}{4}}}{d(t)} \exp\left\{ \int_0^t (\sqrt{q} - \sqrt{Q})\, ds \right\} \ll \frac{<\xi>^{a}}{\mu_k(t)}.\text{*} \quad (3.24)$$

Далее при $t < \tau < T$, $k = 0, 1, 2$ имеем оценки

$$\varphi_2(\tau, \xi)\, \partial_t^k \varphi_2(t, \xi) \ll \frac{\lambda_0(\tau, t) <\xi>^a q^{\frac{k}{4} - \frac{1}{2}}}{\sqrt[4]{Q(\tau)}}, \quad (3.25)$$

а при $0 < \tau < t$ — оценки

$$\varphi_2(\tau, \xi)\, \partial_t^k \varphi_1(t, \xi) \ll \frac{\lambda_0(\tau, t) <\xi>^a}{\sqrt[4]{Q(\tau)}} \cdot q^{\frac{k}{4} - \frac{1}{2}}. \quad (3.26)$$

Далее из (3.12) имеем $\varphi_2(T, \xi) = \varphi_2^0(T, \xi)$, поэтому

$$\frac{\partial_t^k \varphi_2(t, \xi)}{\varphi_2(T, \xi)} \ll Q^{\frac{1}{4}}(T, \xi)\, Q^{\frac{k}{2} - \frac{1}{4}}(t, \xi) \exp \int_T^t \sqrt{Q(s)}\, ds \ll d(t) \times$$

$$\times <\xi>^k q^{\frac{k}{2} - \frac{1}{4}}. \quad (3.27)$$

Из оценок (3.22)—(3.27) и представления (3.19) получаем при $t \in]0, T]$ оценки ($k = 0, 1, 2$)

$$\mu_k(t)\, \partial_t^k \hat{u} \ll |\hat{\Phi}_1| \cdot <\xi>^a + d^2(t) <\xi>^k |\hat{\Phi}_2| +$$
$$+ d(t)\, \delta_{k2} \cdot |\hat{f}(t, \xi)| \cdot q^{-\frac{1}{2}}(t) + d(t) <\xi>^a \int_0^T \frac{|\hat{f}(\tau, \xi)|}{\sqrt[4]{q(\tau)}}\, d\tau, \quad (3.28)$$

из которых применением формулы Планшереля получаем априорные оценки

---

* Для функций $f(x)$, $g(x)$ на пространстве X мы пишем, следуя И. М. Виноградову, $f \ll g$, если существует постоянная $C > 0$ такая, что $|f(x)| < C|g(x)|$ для всех $x \in X$.

$$
\mu_k^2(t)\,\|\partial_t^k u\|_{s-\alpha}^2 \ll \|\Phi_1\|_s^2 + d^1(t)\,\|\Phi_2\|_{k-\alpha+s}^2 +
$$

$$
+ d^2(t) \int_0^T \frac{\|f(\tau, x)\|_s^2}{\sqrt{q(\tau)}}\, d\tau + \frac{d^2(t)}{q^{3/2}(t)}\,\delta_{k2}\|f(t, x)\|_{s-\frac{3}{2}}^2, \tag{3.29}
$$

из которых следует оценка (1.25) и утверждение единственности решения.

Докажем существование решения задачи (1.1), (1.23), (1.24). Из формулы (3.19), применяя обратное преобразование Фурье, получаем формальную формулу для решения искомой задачи:

$$
u(t, x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{ix\xi} \Big\{ \hat{V}(t, \xi) + \hat{\Phi}_1(\xi)\,\varphi_1(t, \xi) +
$$

$$
+ \frac{\varphi_2(t, \xi)}{\varphi_2(T, \xi)} \Big[\hat{\Phi}_2(\xi) + \varphi_1(T, \xi) \Big(\int_0^T \varphi_2 \hat{f}(\tau, \xi)\, d\tau - \hat{\Phi}_1(\xi) \Big) \Big] \Big\} d\xi. \tag{3.30}
$$

Если $\Phi_{1,2} \in C_0^\infty(R_x^n)$, $f(t, x)\, q^{-\frac{1}{4}}(t) \in C([0, T], C_0^\infty)$, то эта формула имеет смысл и является решением задачи (1.1), (1.23), (1.24). Действительно, в силу теоремы Пэли—Винера, интегралы в (3.30) сходятся, уравнение (1.1) проверяется непосредственной подстановкой, а проверка начальных условий следует из формулы Планшереля и теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла. Например,

$$
\lim_{t \to +0} \|\mu_0 u - \Phi_1\|^2 = \lim_{t \to +0} \|\mu_0 \hat{u} - \hat{\Phi}_1\|^2 = 0.
$$

Если же $\Phi_1 \in H^s$, $\Phi_2 \in H^{s+\frac{1}{2}}$, $f q^{-\frac{1}{4}} \in C([0, T], H^s)$, то приближая эти функции $C_0^\infty(R_x^n)$-функциями, существование решения искомой задачи получаем предельным переходом в оценке (1.25).

§ 4. Доказательство теоремы 3

Асимптотическое поведение ф. с. р. уравнения

$$
\hat{u}_{tt} = (q(t) + |\xi|^2)\, \hat{u}(t, \xi) \tag{4.1}
$$

при больших t описывается следующей леммой (см. [14], с. 450):

Лемма 4.1. *Пусть в уравнении* (4.1) $|\xi| > 0$ *и* $q(t)$ — *вещественная непрерывная функция, определенная при больших* t *и удовлетворяющая условию*

$$
\int_T^\infty |q(\tau)|\, d\tau \leqslant M < \infty \tag{4.2}
$$

для некоторого $T > 0$. *Тогда уравнение* (4.1) *имеет решения* $u_0(t)$, $u_1(t)$ *такие, что равномерно по* $|\xi|$

$$\begin{aligned}&\lim_{t\to\infty}\left(u_0-\exp(-t|\xi|)\right)=\lim_{t\to\infty}\left[u_0'(t)+|\xi|\exp(-t|\xi|)\right]=0,\\&\lim_{t\to-\infty}\left[u_1-\exp(t|\xi|)\right]=\lim_{t\to-\infty}\left[u_1'(t)-|\xi|\exp(t|\xi|)\right]=0.\end{aligned}\tag{43}$$

Отметим, что условие (4.2) леммы 4.1 можно ослабить (см. [14]).

В условиях теоремы 3, общее решение уравнения (4.1) (растущее при $\xi\to\infty$ не быстрее полинома) запишется в виде

$$\hat{u}(t,\xi)=\begin{cases}C_1(\xi)\varphi_1(t,\xi)-C_2(\xi)\varphi_2(t,\xi), & t<T,\\ C_3(\xi)\psi(t,\xi), & t>T,\end{cases}\tag{4.4}$$

где

$$\lim_{t\to\infty}\left[\psi-2\exp(-t|\xi|)\right]=\lim_{t\to\infty}\left[\psi_t+2|\xi|\exp(-t|\xi|)\right]=0,\tag{4.5}$$

а $\varphi_1(t,\xi)$, $\varphi_2(t,\xi)$ удовлетворяют оценкам (3.12). Так как решение $\hat{u}(t,\xi)$ должно быть дважды непрерывно дифференцируемым по t, то получаем следующие условия склейки при $t=T$:

$$\begin{aligned}&C_1(\xi)\varphi_1(T,\xi)-C_2(\xi)\varphi_2(T,\xi)=C_3(\xi)\psi(T,\xi),\\&C_1(\xi)\varphi_{1t}(T,\xi)-C_2(\xi)\varphi_{2t}(T,\xi)=C_3(\xi)\psi_t(T,\xi),\\&C_1(\xi)\varphi_{1tt}(T,\xi)-C_2(\xi)\varphi_{2tt}(T,\xi)=C_3(\xi)\psi_{tt}(T,\xi).\end{aligned}\tag{4.6}$$

В силу того, что функции ψ, φ_1, φ_2 удовлетворяют уравнению (4.1) и $q(T)>0$, третье из соотношений (4.6) вытекает из первого. Из первых двух соотношений (4.6) получаем

$$C_2(\xi)=\frac{\psi\varphi_{1t}-\psi_t\varphi_1}{\psi\varphi_{2t}-\psi_t\varphi_2}C_1=\frac{W(\psi,\varphi_1)}{W(\psi,\varphi_2)}C_1(\xi),\quad C_3(\xi)=\frac{W(\varphi_1,\varphi_2)}{W(\psi,\varphi_2)}C_1(\xi).\tag{4.7}$$

Итак, общее решение уравнения (4.1) ($C_1(\xi)$ мы заменили на $\hat{\Phi}(\xi)$) имеет вид

$$\hat{u}(t,\xi)=\begin{cases}\left[\varphi_1(t,\xi)-\dfrac{W(\psi,\varphi_1)}{W(\psi,\varphi_2)}\varphi_2(t,\xi)\right]\hat{\Phi}(\xi), & t\leqslant T,\\ \dfrac{W(\varphi_1,\varphi_2)}{W(\psi,\varphi_2)}\hat{\Phi}(\xi)\psi(t,\xi), & t\geqslant T.\end{cases}\tag{4.8}$$

Перейдем к получению априорных оценок. Оценим вронскиан $W(\psi,\varphi_2)$ снизу при больших $|\xi|$. Выбрав T достаточно большим, из (4.5) имеем

$$\psi(t,\xi)\geqslant\exp(-t|\xi|),\quad -\psi_t(t,\xi)\geqslant|\xi|\exp(-t|\xi|),\quad t\in[T,\infty[.\tag{4.9}$$

Далее из (3.12)

$$\varphi_2(T,\xi)=\varphi_2^0(T,\xi)\geqslant q^{-\frac14}(T)<\xi>^{-\frac12}\exp\left(\int_0^T\frac{|\xi|^2\,dt}{\sqrt{q}+\sqrt{Q}}\right),\tag{4.10}$$

$$\frac{\varphi_{2t}(T,\xi)}{\varphi_2^0(T,\xi)\sqrt{Q(T,\xi)}}-1\geqslant-\frac{|Q_t|}{4Q^{3/2}}(T,\xi).\tag{4.11}$$

Из условия (1.28) следует при $|\xi| > \sqrt{q_0}$ оценка

$$\int_0^T \frac{|\xi|\,dt}{\sqrt{Q}+\sqrt{q}} = \int_0^T \frac{2|\xi|}{1+\sqrt{1+\frac{1}{q}|\xi|^2}}\,\frac{dt}{2\sqrt{q}} \geqslant \sqrt{\frac{a_0}{8}}\int_0^T \frac{dt}{\sqrt{q(t)}} \geqslant T,$$

поэтому

$$|W(\psi, \varphi_2)|_{t=T} \geqslant \varphi_2^0 (T, \xi)\, e^{-T|\xi|}\left[\sqrt{Q(T, \xi)} - \frac{|Q_t|}{4Q}(T, \xi) + |\xi|\right] \geqslant \tag{4.12}$$

$$\geqslant \frac{\sqrt{|\xi|}}{2}\exp\left\{|\xi|\left(\int_0^T \frac{|\xi|\,dt}{\sqrt{Q}+\sqrt{q}} - T\right)\right\} \geqslant \frac{\sqrt{<\xi>}}{2}.$$

Докажем оценку

$$|W(\psi, \varphi_2)| \geqslant c > 0, \text{ при } |\xi| < \eta, \tag{4.13}$$

где η — достаточно большая постоянная. При фиксированном $\xi = \xi_0$ вронскиан $W(\psi, \varphi_2) \neq 0$, иначе существовало бы $b(\xi_0)$ такое, что $\psi(t, \xi_0) = b(\xi_0)\,\varphi_2(t, \xi_0)$, а это означало бы существование решения $\psi(t, \xi)$, равного $+0$ при $t = +0$ и $t = +\infty$ ($\psi \to 0$ при $t \to \infty$ и $\varphi_2 \to +0$ при $t \to 0$) и поэтому имеющего локальный положительный максимум, что ввиду условия $Q(t) = \psi_{tt}/\psi > 0$ невозможно. Тогда $|W(\psi, \varphi_2)| > 0$ и в некоторой окрестности ξ_0. Неравенство $|W(\psi, \varphi_2)| \geqslant c$ можно распространить на весь компакт $|\xi| \leqslant \eta$, покрыв его малыми окрестностями, в каждом из которых справедливо это неравенство.

Объединив (4.12) и (4.13), мы получаем

$$|W(\psi, \varphi_2)| \geqslant c\sqrt{<\xi>}. \tag{4.14}$$

Аналогично неравенству (4.12) доказываются оценки:

$$|W(\psi, \varphi_1)|_{t=T} \ll \sqrt{<\xi>}\exp\left\{\int_0^T (\sqrt{q} - \sqrt{Q})\,d\tau - T|\xi|\right\}, \tag{4.15}$$

$$|W(\varphi_1, \varphi_2)|_{t=T} \ll \frac{1}{<\xi>^{\frac{3}{2}}}, \tag{4.16}$$

$$\partial_t^k \varphi_2(t, \xi) \ll \frac{d^2(t)}{\mu_k(t)} <\xi>^{a} \exp\left\{\int_0^T (\sqrt{Q} - \sqrt{q})\,d\tau\right\}. \tag{4.17}$$

Дифференцируя решение (4.8) k раз по t, получаем, с учетом (4.5), (4.14)—(4.17), (3.24) при $k = 0, 1, 2$, оценки

$$\partial_t^k \hat{u} \ll \begin{cases} \left[\exp\left(\int_0^t (\sqrt{q} - \sqrt{Q})\,d\tau\right) + d^2(t)\exp(-T|\xi|)\right]\dfrac{<\xi>^{a}|\hat{\Phi}(|\xi|)}{\mu_k(t)}, & t \leqslant T, \\ |\hat{\Phi}(\xi)| <\xi>^{-\frac{7}{2}}\exp(-t|\xi|), & t > T. \end{cases} \tag{4.18}$$

Выбрасывая фигурирующие здесь экспоненты, получаем:

$$\sigma_k^2(t)\,|\partial_t^k \widehat{u}(t, \xi)|^2 \ll |\widehat{\Phi}(\xi)|<\xi>^{2\alpha}, \quad t\in]0, \infty[, \tag{4.19}$$

откуда и следует оценка (1.30) (интегрированием по ξ и применением формулы Планшереля).

Окончание доказательства теоремы 3 мы опускаем, так как оно аналогично доказательству теоремы 2.

Замечание 4.1. Полученные нами оценки (1.30) грубее обычных коэрцитивных оценок для эллиптических операторов (в нашей оценке (1.30) есть потеря гладкости $\frac{1}{2}$ по сравнению с обычными оценками для классической задачи Дирихле в полупространстве).

Чтобы получить более тонкие оценки, чем (1.30) необходимо заменить условие (1.28) более жестким условием

$$\sqrt{\frac{q_0}{2}}\int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{q(\tau)}} \geqslant ct^\beta, \quad t\in]0, T], \ \beta\geqslant 1. \tag{4.20}$$

Тогда из (4.18) получаем при $t\in]0, \infty[$, $k=0, 1, 2$ оценки

$$\sigma_k(t)\,\partial_t^k \widehat{u} \ll |\widehat{\Phi}(\xi)|<\xi>^{\alpha}\left[\exp\left(-\frac{c}{2}|\xi|t^\beta\right)+\exp(-t|\xi|)\right], \tag{4.21}$$

из которых, ввиду формулы

$$\int_0^\infty \tau^{\alpha-1}e^{-\beta\tau}\,d\tau=\frac{\Gamma(\alpha)}{\beta^\alpha},$$

получаем

$$\int_0^\infty \sigma_k^2(t)\,|\partial_t^k \widehat{u}|^2\,dt \ll |\widehat{\Phi}(\xi)|^2<\xi>^{2\alpha-\frac{1}{\beta}}, \tag{4.22}$$

или, интегрированием по ξ и применением формулы Планшереля, получаем обещанную более тонкую, чем (1.30) оценку

$$\sum_{k=0}^{2}\int_0^\infty \sigma_k^2(t)\,\|\partial_t^k u\|^2_{s-\alpha+\frac{1}{2\beta}}\,dt \ll \|\Phi\|_s^2. \tag{4.23}$$

Доказательство замечания 1.5. Заменив в оценках (1.25) $f(t, x)$ на $f(t, x)+p(t, x)\,u(t, x)$ получаем оценку

$$\sum_{k=0}^{2}\mu_k^2(t)\,\|\partial_t^k u\|^2_{s-\alpha} \ll \|\Phi_1\|_s^2+\|\Phi_2\|^2_{s+\frac{1}{2}}+\int_0^T \frac{\|f+pu\|_s^2}{\sqrt{q(\tau)}}\,d\tau+$$

$$+\sup_{]0, T]}\left[\frac{d^2(t)}{q^{3/2}(t)}\left(\|f\|^2_{s-\frac{3}{2}}+\|pu\|^2_{s-\frac{3}{2}}\right)\right],$$

из которой, в условии (1.33), применением леммы Гронуолла получаем оценку (1.25) для уравнения (1.34).

Теорема единственности для уравнения (1.34) следует из неравенства (1.25), а теорему существования мы докажем методом последовательных приближений:

$$u(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n, \quad u_0 = \omega_0,$$

$$[\partial_t^2 + \Delta - q(t)]\,\omega_0 = f(t, x),$$

$$[\partial_t^2 + \Delta - q(t)]\,\omega_n = p\omega_{n-1} + f(t, x),$$

здесь вспомогательные функции

$$u_n = \omega_n - \omega_{n-1}, \quad n = 1, 2, \cdots$$

удовлетворяют уравнениям

$$[\partial_t^2 + \Delta - q(t)]\,u_n = pu_{n-1}$$

с нулевыми данными Дирихле (1.23), (1.24).

Из оценок (3.29) при $\Phi_1 = \Phi_2 = 0$ имеем

$$\sum_{k=0}^{2} \| q^{\frac{1}{4} - \frac{k}{2}} \partial_t^k u_{n+1} \|_{s-k}^2 \ll \frac{\| pu_n \|_s^2}{q^{3/2}} + \int_0^T \frac{\| pu_n \|_s^2}{\sqrt{q(\tau)}}\, d\tau, \tag{4.24}$$

а при $k = 0$ имеем (интегрированием (3.29) при $k = 0$):

$$\int_0^T \| \mu_0 u_0 \|_s^2\, dt \leqslant cT \left[\| \Phi_1 \|_s^2 + \| \Phi_2 \|_s^2 + \int_0^T \frac{\| f(\tau, x) \|_s^2}{\sqrt{q(\tau)}}\, d\tau \right]. \tag{4.25}$$

Далее, ввиду (1.33)

$$\frac{\| pu_n \|_s^2}{q_0 \sqrt{q}} \leqslant \sqrt{q(t)}\, \| u_n \|_s^2 < c \int_0^T \frac{\| pu_{n-1} \|_s^2}{\sqrt{q(\tau)}}\, d\tau \leqslant$$

$$\leqslant c^{n-1} q_0^{n-1} T^{n-2} \int_0^T \sqrt{q(\tau)}\, \| u_1 \|_s^2\, d\tau \leqslant c^n q_0^n T^{n-1} \int_0^T \| \mu_0 u_0 \|_s^2\, d\tau, \tag{4.26}$$

и при $T < \dfrac{1}{cq_0}$ сходимость ряда $u = \sum\limits_0^{\infty} u_n$ следует из оценок

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{2} \mu_k^2(t) \| \partial_t^k u_n \|_s^2 \leqslant c_1 d^2(t) \left[\| \Phi_1 \|_s^2 + \| \Phi_2 \|_s^2 + \int_0^T \frac{\| f(\tau, x) \|_s^2}{\sqrt{q(\tau)}}\, d\tau \right] \times$$

$$\times \sum_{n=0}^{\infty} (cq_0 T)^n. \tag{4.27}$$

Доказательство замечания 1.6. Если функция $q(t) + b(t)$ удовлетворяет условиям теоремы 2, то общее решение уравнения (1.35) имеет вид осциллирующего интеграла (см. формулу (3.30)):

$$u(t, x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{ix\xi} \Big[\widehat{\Phi}_1(\xi) \varphi_1(t, \xi) + (\widehat{\Phi}_2(\xi) -$$

$$- \varphi_1(T, \xi) \widehat{\Phi}_1(\xi)) \frac{\varphi_2(t, \xi)}{\varphi_2(T, \xi)} \Big] d\xi, \tag{4.28}$$

где функции φ_1, φ_2 удовлетворяют оценкам (3.12) с заменой $q(t)$ на $q(t) + b(t)$. Обозначив

$$\mu_b(t) = (q + b)^{\frac{1}{4}} \exp\left\{ \int_T^t \sqrt{q + b}\,(\tau)\, d\tau \right\}, \tag{4.29}$$

имеем (см. (3.17)):

$$\lim_{t \to 0} \mu_b \varphi_1 = 1, \quad \lim_{t \to 0} \mu_b \varphi_2 = 0, \tag{4.30}$$

откуда применением теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла, получаем начальное условие

$$\lim_{t \to 0} [\mu_b(t)\ u(t, x)] = \Phi_1(x). \tag{4.31}$$

Если произвольная функция $\mu(t)$ такова, что существует предел $\lim\limits_{t \to 0} \frac{\mu(t)}{\mu_b(t)}$, то имеет смысл начальное условие

$$\lim_{t \to 0} [\mu(t)\ u(t, x)] = \Phi_1(x), \tag{4.32}$$

причем для единственности решения задачи (1.1), (4.32), т. е. для того, чтобы

$$\text{из } \lim_{t \to 0} \mu u = 0 \text{ следовало } \Phi(x) = 0 \tag{4.33}$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{t \to 0} \frac{\mu(t)}{\mu_b(t)} \neq 0. \tag{4.34}$$

Действительно, это утверждение следует из соотношения

$$0 = \lim_{t \to 0} \mu u = (\lim_{t \to 0} \mu_b u) \left(\lim_{t \to 0} \frac{\mu}{\mu_b} \right) = \Phi(x) \lim \frac{\mu}{\mu_b} \cdot$$

В частности, если в качестве $\mu(t)$ выбрать весовую функцию $\mu_0 = q^{\frac{1}{4}}(t) \exp \int_T^t \sqrt{q(s)}\, ds$ невозмущенного уравнения $u_{tt} + \Delta u = q(t)\, u$, то условие (4.34) принимает вид (1.36).

В качестве примера, иллюстрирующего теорему 2, приведем решение краевой задачи

$$u_{tt} + u_{xx} = q(t)\, u, \quad 0 < t < T, \quad 0 < x < l, \quad q(0) = \infty, \tag{4.35}$$

$$u(0;\ t) = u(\pi,\ t) = 0 \tag{4.36}$$

$$\lim_{t \to 0} \mu_0(t)\, u = f_1(x), \quad u(T, x) = f_2(x), \quad x \in [0, l],$$

$$\mu_0(t) \equiv q^{\frac{1}{4}}(t) \exp \int_T^t \sqrt{q(s)}\, ds.$$

Методом разделения перемнных находим решение

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} [a_k v_k(t) + b_k w_k(t)] \sin kx$$

краевой задачи (4.35), (4.36). Здесь v_k, $w_k(t)$ — линейно независимые решения обыкновенных дифференциальных уравнений

$$v''(t) + q_k v(t) = 0, \quad q_k(t) \equiv q(t) + k^2.$$

В условиях ВКБ-леммы (см. [14], с. 450):

$$q(t) > 0, \; q(t) \in C^2 [0, T], \; q^{-\frac{1}{4}} (q^{-\frac{1}{4}})'' \in L_1 [0, T], \; \int_0^T \sqrt{q(s)}\, ds = \infty,$$

имеем

$$v_k(t) = [1 + \varepsilon_1(t)]\, q_k^{-\frac{1}{4}} \exp \int_T^t \sqrt{q_k(s)}\, ds, \quad \lim_{t \to 0} \varepsilon_j(t) = 0, \; j = 1, 2,$$

$$w_k(t) = [1 + \varepsilon_2(t)]\, q_k^{-\frac{1}{4}} \exp \left\{ \int_t^T \sqrt{q_k(s)}\, ds + \int_0^T (\sqrt{q} - \sqrt{q_k})\, ds \right\}.$$

Нетрудно показать, что при фиксированных k

$$\lim_{t \to 0} \mu v_k = 0, \quad \lim_{t \to 0} (w_k \cdot \mu) = 1.$$

Выбирая решения v_k, w_k так, чтобы $v_k(T) = 1$, $w_k(T) = 0$, из начальных условий

$$\lim_{t \to 0} \mu u = \sum_1^{\infty} b_k \sin kx = f_1(x), \quad u(T, x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx = f_2(x),$$

найдем обычным способом коэффициенты a_k, b_k. Отметим, что ввиду $w_k(0) = \infty$ решение $u(t, x)$ при $t \to 0$ будет неограниченным.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 19.XII.1985

Գ. Ռ. ՀՈՎՀԱՆՆԻՍՅԱՆ. Կոշու կշռային և Դիրիխլեի խնդիրների մասին եզրին եզակիություն ունեցող մասնակի ածանցյալներով հավասարումների համար *(ամփոփում)*

Վերնագրում նշված հավասարումների համար կշռային Կոշու տվյալներով խնդրի համար ապացուցվում են Կոշի-Կովալևսկայայի տիպի թեորեմներ։

Էլիպտական հավասարման համար ապացուցվում է կշռային Դիրիխլեի խնդրի միարժեք լուծելիությունը և կոէրցիտիվ գնահատականները։

G. R. OGANESIAN. *Weighted Cauchy and Dirichlet probems for the singular differential equations* (summary)

In the paper versions of Cauchy—Kovalevskaya theorem for weighted initial value problems are proved.

For elliptic equation $u_{tt} + \Delta u = q(t)\,u$, $q(+0) = \infty$ in the domain $0 < t < T$, $x \in R^n$ the correctness of Dirichlet problem $\lim\limits_{t \to 0} \{\mu(t)\, u(t, x)\} = \Phi_1(x)$, $u(T, x) = \Phi_2(x)$, $\mu = q^{1/4}(t) \exp \int\limits_T^t \sqrt{q(s)}\, ds$ is proved.

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. В. Келдыш.* О некоторых случаях вырождения уравнений эллиптического типа на границе области, ДАН СССР, 77, № 2, 1951, 181—183.
2. *А. В. Бицадзе.* Уравнения смешанного типа, М., ВИНИТИ, 1959.
3. *С. А. Терсенов.* Введение в теорию уравнений, вырождающихся на границе, Новосибирск, НГУ, 1973.
4. *О. А. Олейник.* Об уравнениях эллиптического типа, вырождающихся на границе области, ДАН СССР, 87, № 6, 1952, 885—888.
5. *С. Г. Михлин.* Вырождающиеся эллиптические уравнения, Вестник ЛГУ, 3, № 8, 1954, 19—48.
6. *М. И. Вишик.* Краевые задачи для эллиптических уравнений, вырождающихся на границе области, Мат. сб., 35 (77), № 3, 1954, 513—568.
7. *А. Б. Нерсесян.* Задача Коши для симметрической гиперболической системы, вырождающейся на начальной гиперплоскости, ДАН СССР, 196, № 2, 1971, 289—292.
8. *А. С. Калашников.* О некоторых задачах для линейных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами во всем пространстве и для одного класса вырождающихся уравнений в полупространстве, Мат. сб., 85 (127), № 2, 1971, 189—200.
9. *И. А. Киприянов.* Об одном классе сингулярных эллиптических операторов, Дифференц. уравнения, 7, № 11, 1971, 2066—2077.
10. *Г. Р. Оганесян.* О начальной задаче с заданными вронскианами, Изв. АН АрмССР, сер. матем., 15, № 4, 1980, 292—309.
11. *Г. В. Дикополов, Г. Е. Шилов.* О корректных краевых задачах для уравнений в частных производных в полупространстве, Изв. АН СССР, сер. матем., 24, 1960, 369—380.
12. *М. В. Федорюк.* Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений, М. «Наука», 1983.
13. *Ю. А. Дубинский.* Алгебра псевдодифференциальных операторов с аналитическими символами и ее приложения к математической физике, УМН, 37, № 5, 1982, 97—137.
14. *Ф. Хартман.* Обыкновенные дифференциальные уравнения, М., «Мир», 1970.
15. *A. Weinstein.* The singular solutions and the Cauchy problem for generalized Tricomi equations, Commun. pure and appl. math., VII, № 1, 105—116, 1954.
16. *H. Tahara.* Singular hyperbolic systems. III. On the Cauchy problem for fuchsian hyperbolic partial diff. equations, J. Fac. Sci. Univ, Tokyo, sec. 1A, v. 27, № 3, 1980, 465—507.
17. *F. Treves.* On the theory of linear partial diff. operators with analitic coefficients. Trans. Amer. Math. Soc., 137, 1969, 1—20.