ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XXII, № 6, 1987 Математика

УД 517.98

А. И. САРГСЯН

НЕСАМОСОПРЯЖЕННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОМЕРНОЙ СИСТЕМЫ ДИРАКА СО СПЕКТРАЛЬНЫМ ПАРАМЕТРОМ В ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ

Введение

В настоящей работе рассматривается одномерный оператор Дирака со спектральным параметром в граничных условиях, а именно, изучается следующая задача:

$$\begin{aligned} &u'(x) - \{p(x) + \lambda\}\, v(x) = 0, \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ &v'(x) + \{q(x) + \lambda\}\, u(x) = 0, \end{aligned} \tag{0.1}$$

с граничными условиями

$$u(0)\cos\alpha + v(0)\sin\alpha = 0, \tag{0.2}$$

$$v(1) - \lambda u(1) = 0, \tag{0.3}$$

где $p(x)$ и $q(x)$—комплекснозначные функции с интегрируемыми первыми производными на отрезке $[0,1]$.

Нельзя ожидать, что система собственных и присоединенных векторов (с. п. в.) задачи (0.1)—(0.3) образует минимальную систему в пространстве вектор-функций $L_2[0,1] \oplus L_2[0,1]$ (см., например, [1]) и поэтому нужно рассматривать другие пространства: либо пространство (см. [1], [2]) $L_2[0,1] \oplus L_2[0,1] \otimes \mathbf{C}$ ($\mathbf{C}$—множество комплексных чисел), либо пространство гладких на отрезке $[0,1]$ функций (см. [1]).

Цель настоящей работы—построить соответствующее пространство и доказать, что в этом пространстве с. п. в. задачи (0,1) — (0.3) образуют базис Рисса. При реализации этих целей мы будем следовать методам, изложенным в работе [1].

§ 1. Построение вспомогательного оператора

В этом параграфе по исходной задаче (0.1)—(0.3) будет построен линейный оператор H такой, что рассматриваемая граничная задача будет эквивалентна линейной задаче $\mathrm{H}y = \lambda y$, где y—элемент пространства, в котором рассматривается оператор H. Такая линеаризация может быть проведена многими способами. Основным в данном вопросе является выбор пространства, в котором действует оператор H.

Обозначим через $\mathbf{W}_2^k$ пространство двухкомпонентых вектор-функций $f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix}$, где $f_1(x)$ и $f_2(x)$—элементы соболевского пространства $\mathbf{W}_2^k[0,1]$ (пространство гладких функций на отрезке $[0,1]$, имеющих $k-1$ абсолютно непрерывных производных и k-ю производную из $L_2[0,1]$) с нормой:

$$\|f\|_{W_2^k}=\|f^{(k)}\|_{L_2}+\|f\|_{L_2},$$

где $L_2=L_2[0,1]\oplus L_2[0,1]$. Пусть $\mathbf{W}_{2,u}^1$ означает подпространство тех элементов пространства $\mathbf{W}_2^1$, которые удовлетворяют граничному условию (0.2):

$$\mathbf{W}_{2,u}^1=\{y\in\mathbf{W}_2^1: y_2(0)\cos\alpha+y_1(0)\sin\alpha=0\}. \tag{1.1}$$

В пространстве $\mathbf{W}_{2,u}^1$ определим оператор $\mathbf{H}$:

$$\mathbf{H}y=\begin{pmatrix}-y_2'(x)+p(x)y_1(x)\\ -y_1'(x)-q(x)y_2(x)\end{pmatrix} \tag{1.2}$$

со следующей областью определения:

$$\begin{gathered}D_{\mathrm{H}}=\{y\in\mathbf{W}_2^2: y_2(0)\cos\alpha+y_1(0)\sin\alpha=0,\\ y_1(1)-[-y_1'(1)-q(1)y_2(1)]=0,\\ [-y_1'(0)-q(0)y_2(0)]\cos\alpha+[-y_2'(0)+p(0)y_1(0)]\sin\alpha=0\}.\end{gathered} \tag{1.3}$$

Лемма 1.1. *Область определения D_{H} оператора $\mathbf{H}$ всюду плотна в пространстве $\mathbf{W}_{2,u}^1$.*

Доказательство. Необходимо доказать, что для любого $\varepsilon>0$ и для любого $\tilde{y}\in\mathbf{W}_{2,u}^1$ найдется такая вектор-функция $y\in D_{\mathrm{H}}$, что

$$\|y-\tilde{y}\|_{W_2^1}<\varepsilon. \tag{1.4}$$

Для любого $\tilde{y}\in\mathbf{W}_{2,u}^1$ всегда можно подобрать $u(x)\in\mathbf{W}_{2,u}^2$ так, чтобы $\|\tilde{y}-u\|_{W_2^1}<\frac{\varepsilon}{2}$. Это возможно в силу того, что $\mathbf{W}_2^1$ есть замыкание пространства $\mathbf{W}_2^2$ по норме $\mathbf{W}_2^1$. Теперь подберем вектор-функцию $v(x)$ так, чтобы $u(x)+v(x)\in D_{\mathrm{H}}$. Вначале положим $v_1(0)=v_2(0)=v_1(1)=v_2(1)=0$ и подставим вектор-функцию $u(x)+v(x)$ в (1.3). Получим систему

$$\begin{gathered}u_2(0)\cos\alpha+u_1(0)\sin\alpha=0,\\ u_1(1)+u_1'(1)+v_1'(1)+q(1)u_2(1)=0,\\ [-u_1'(0)-v_1'(0)-q(0)u_2(0)]\cos\alpha+[u_2'(0)+v_2'(0)-p(0)u_1(0)]\sin\alpha=0,\end{gathered}$$

которая, очевидно, всегда разрешима относительно $v_1'(0)$, $v_2'(0)$, $v_1'(1)$.

Теперь осталось потребовать, чтобы $v(x)\in\mathbf{W}_2^2$ и $\|v\|_{W_2^1}<\varepsilon/2$. Легко проверить, что вектор-функцию $v(x)$ из пространства $\mathbf{W}_2^2$ с фиксированными значениями производной в точках 0 и 1 и нулями на концах всегда можно сделать сколь угодно малой по норме $\mathbf{W}_2^1$. Положив $y(x)=u(x)+v(x)$, получим соотношение (1.4).

Лемма 1.2. *Функции Грина задачи* (0.1) — (0.3) *и оператора* $(\mathrm{H} - \lambda I)$ *совпадают.*

Доказательство следует из определения функции Грина и выражений (0.1)—(0.3), (1.2) и (1.3).

Действительно, из (1.2) видно, что выражения (0.1) и $(\mathrm{H} - \lambda I)$ совпадают, а из того, что функция Грина $G(x, \xi; \lambda)$ исходной задачи удовлетворяет условиям (0.2) и (0.3), следует, что $G(x, \xi; \lambda)$ удовлетворяет и условию (1.3). Верно также и обратное утверждение.

Следствие. Собственные значения (с. з.), как полюса функции Грина, исходной задачи и оператора H совпадают, включая их кратности.

Лемма 1.3. *Каждой цепочке с. п. в.* $y^0, \cdots, y^h$ *исходной задачи, отвечающей с. з.* λ_0, *соответствует цепочка с. п. в.* $\widehat{y}^0, \cdots, \widehat{y}^h$ *оператора* H, *отвечающая тому же с. з.* λ_0.

Доказательство следует из леммы 1.4 работы [1] как частный случай.

§ 2. Построение матрицы-функции Грина

Матрица-функция Грина задачи (0.1)—(0.3) по лемме 1.2, соответственно, и для оператора $(\mathrm{H} - \lambda I)$ имеет различные представления. Но для дальнейшего нужен определенный вид матрицы-функции Грина, который и будет построен в настоящем параграфе.

Обозначим через $\varphi(x, \lambda) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x, \lambda) \\ \varphi_2(x, \lambda) \end{pmatrix}$ решение задачи (0.1), (0.2), а через $\psi(x, \lambda) = \begin{pmatrix} \psi_1(x, \lambda) \\ \psi_2(x, \lambda) \end{pmatrix}$ — решение задачи (0.1), (0.3). Тогда, как известно (см., например, [3]) имеет место следующее представление матрицы-функции Грина задачи (0.1)—(0.3):

$$G(x, \xi; \lambda) = \frac{1}{\omega(\lambda)} \begin{cases} \psi(x, \lambda)\, \varphi^{T}(\xi, \lambda), & \xi < x, \\ \varphi(x, \lambda)\, \psi^{T}(\xi, \lambda), & \xi > x, \end{cases} \tag{2.1}$$

где

$$\omega(\lambda) = W\{\varphi, \psi\} = \begin{vmatrix} \varphi_1(x, \lambda) & \varphi_2(x, \lambda) \\ \psi_1(x, \lambda) & \psi_2(x, \lambda) \end{vmatrix} \tag{2.2}$$

определитель Вронского, а $\varphi^{T}(x, \lambda) = (\varphi_1(x, \lambda), \varphi_2(x, \lambda))$.

С другой стороны, также известно [3] следующее асимптотическое представление вектор-функции $\varphi(x, \lambda)$, при $|\lambda| \to \infty$:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x, \lambda) &= \cos\{\lambda x - \alpha + A_0(x)\} + O(\lambda^{-1}), \\ \varphi_2(x, \lambda) &= \sin\{\lambda x - \alpha + A_0(x)\} + O(\lambda^{-1}), \end{aligned} \tag{2.3}$$

где

$$A_0(x) = \frac{1}{2} \int_0^x [p(s) + q(s)]\, ds.$$

Для асимптотического представления вектор-функции $\psi(x, \lambda)$ справедлива следующая

Лемма 2.1. *Решение задачи* (0 .1), (0.3)— *вектор-функция* $\psi(x, \lambda)$ *при* $|\lambda|\to\infty$ *допускает следующее асимптотическое представление*:

$$\psi_1(x, \lambda)=\lambda\cos\{\lambda(x-1)+A_1(x)\}-\sin\{\lambda(x-1)+A_1(x)\}+$$
$$+\frac{p(0)-q(0)}{4}\cos\{\lambda(x+1)+A_1(x)\}-$$
$$-\frac{p(x)-q(x)}{4}\cos\{\lambda(x-1)+A_1(x)\}+$$
$$+\frac{1}{8}\int_1^x[p(s)-q(s)]^2\,ds\cdot\sin\{\lambda(x-1)+A_1(x)\}+O(\lambda^{-1}), \tag{2.4}$$

$$\psi_2(x, \lambda)=\lambda\sin\{\lambda(x-1)+A_1(x)\}+\cos\{\lambda(x-1)+A_1(x)\}+$$
$$+\frac{p(x)-q(x)}{4}\sin\{\lambda(x-1)+A_1(x)\}+$$
$$+\frac{p(0)-q(0)}{4}\cdot\sin\{\lambda(x+1)+A_1(x)\}-$$
$$-\frac{1}{8}\int_1^x[p(s)-q(s)]^2\,ds\cdot\cos\{\lambda(x-1)+A_1(x)\}+O(\lambda^{-1}), \tag{2.4'}$$

где

$$A_1(x)=\int_1^x[p(s)+q(s)]\,ds.$$

Доказательство. Легко видеть, что решение системы (0.1), удовлетворяющее условию

$$u(1)=1,\ v(1)=\lambda,$$

удовлетворяет системе интегральных уравнений

$$u(x, \lambda)=\lambda\sin\lambda(x-1)+\cos\lambda(x-1)+$$
$$+\int_1^x v(s, \lambda)\,p(s)\cos\lambda(x-s)\,ds-\int_1^x u(s, \lambda)\,q(s)\sin\lambda(x-s)\,ds,$$
$$v(x, \lambda)=\lambda\cos\lambda(x-1)-\sin\lambda(x-1)- \tag{2.5}$$
$$-\int_1^x v(s, \lambda)\,p(s)\sin\lambda(x-s)\,ds-\int_1^x u(s, \lambda)\,q(s)\cos\lambda(x-s)\,ds.$$

Очевидно, что функции $u=u(x, \lambda)$ и $v=v(x, \lambda)$ удовлетворяют также и граничному условию (0.3).

Обозначим через $R(u, v)$ и $Q(u, v)$, соответственно, интегралы, входящие в уравнения системы (2.5) и положим $u=u^0+v^1$, $v=v^0+v^1$. Тогда систему (2.5) можно разбить на две системы:

$$\left.\begin{aligned} u^0(x, \lambda) &= \cos\lambda(x-1) + R(u^0, v^0), \\ v^0(x, \lambda) &= -\sin\lambda(x-1) + Q(u^0, v^0), \end{aligned}\right\} \tag{2.6}$$

$$\left.\begin{aligned} u^1(x, \lambda) &= \lambda\sin\lambda(x-1) + R(u^1, v^1), \\ v^1(x, \lambda) &= \lambda\cos\lambda(x-1) + Q(u^1, v^1) \end{aligned}\right\}. \tag{2.7}$$

Интегральные уравнения (2.6) и (2.7) являются уравнениями типа Вольтерра, и поэтому могут быть решены методом последовательных приближений. Решим систему (2.6), заменяя, ради удобства, u^0, v^0 на u, v.

Пусть $u_0(x, \lambda) = \cos\lambda(x-1)$, $v_0(x, \lambda) = -\sin\lambda(x-1)$ и при $k > 1$ положим

$$u_k(x, \lambda) = \int_1^x v_{k-1}(s, \lambda)\, p(s) \cos\lambda(x-s)\, ds -$$

$$- \int_1^x u_{k-1}(s, \lambda)\, q(s) \sin\lambda(x-s)\, ds,$$

$$v_k(x, \lambda) = -\int_1^x v_{k-1}(s, \lambda)\, p(s) \sin\lambda(x-s)\, ds -$$

$$- \int_1^x u_{k-1}(s, \lambda)\, q(s) \cos\lambda(x-s)\, ds.$$

Тогда из равномерной сходимости последовательных приближений, доказательство которой мы опускаем, следует, что

$$u(x, \lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x, \lambda), \quad v(x, \lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(x, \lambda). \tag{2.8}$$

Покажем, что $u_k(x, \lambda)$ и $v_k(x, \lambda)$ имеют представления

$$\begin{aligned} u_k(x, \lambda) &= \frac{1}{k!} A_1^k(x) \begin{cases} (-1)^n \cos\lambda(x-1) + O(\lambda^{-1}), & k = 2n, \\ (-1)^{n+1} \sin\lambda(x-1) + O(\lambda^{-1}), & k = 2n+1, \end{cases} \\ v_k(x, \lambda) &= \frac{1}{k!} A_1^k(x) \begin{cases} (-1)^{n+1} \sin\lambda(x-1) + O(\lambda^{-1}), & k = 2n, \\ (-1)^n \cos\lambda(x-1) + O(\lambda^{-1}), & k = 2n+1. \end{cases} \end{aligned} \tag{2.9}$$

Действительно, при $k = 1$ имеем

$$u_1(x, \lambda) = -\int_1^x p(s) \sin\lambda(s-1) \cos\lambda(x-s)\, ds -$$

$$- \int_1^x q(s) \cos\lambda(s-1) \sin\lambda(x-s)\, ds =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_1^x p(s)[\sin\lambda(x-1)+\sin\lambda(2s-x-1)]\,ds-$$

$$-\frac{1}{2}\int_1^x q(s)[\sin\lambda(x-1)-\sin\lambda(2s-x-1)]\,ds = -A_1(x)\sin\lambda(x-1)+O(\lambda^{-1}), \tag{2.10}$$

$$v_1(x,\lambda) = \int_1^x p(s)[\sin\lambda(s-1)\sin\lambda(x-s)\,ds-$$

$$-\int_1^x q(s)\cos\lambda(s-1)\cos\lambda(x-s)\,ds=$$

$$=\frac{1}{2}\int_1^x p(s)[\cos\lambda(2s-x-1)-\cos\lambda(x-1)]\,ds-$$

$$-\frac{1}{2}\int_1^x q(s)[\cos\lambda(2s-x-1)+\cos\lambda(x-1)]\,ds=-A_1(x)\cos\lambda(x-1)+O(\lambda^{-1}).$$

В этих равенствах величина $O(\lambda^{-1})$ получается при интегрировании по частям оставшихся интегралов с учетом дифференцируемости функций $p(x)$ и $q(x)$ по условию задачи.

Допустим теперь, что для $k=1, 2, \cdots, m-1$ формулы (2.9) уже доказаны. Докажем их для $k=m$. Мы имеем

$$u_m(x,\lambda) = -\frac{1}{(m-1)!}\int_1^x A_1^{m-1}(s)\sin\lambda(s-1)\,p(s)\cos\lambda(x-s)\,ds-$$

$$-\frac{1}{(m-1)!}\int_1^x A_1^{m-1}(s)\cos\lambda(s-1)\,q(s)\sin\lambda(x-s)\,ds+O(\lambda^{-1}).$$

Используя те же преобразования, что и в (2.10), отсюда получим

$$u_m(x,\lambda) = -\frac{\sin\lambda(x-1)}{(m-1)!}\int_1^x \frac{p(s)+q(s)}{2}A_1^{m-1}(s)\,ds+O(\lambda^{-1})=$$

$$=-\sin\lambda(x-1)\int_1^x \frac{A_1^{m-1}(s)}{(m-1)!}\,dA_1(s)+O(\lambda^{-1})=$$

$$=-\frac{A_1^m(x)}{m!}\sin\lambda(x-1)+O(\lambda^{-1}).$$

Поступая аналогичным образом, мы получим

$$v_m(x, \lambda) = \frac{1}{(m-1)!} \int_1^x A_1^{m-1}(s) \sin\lambda(s-1)\, p(s) \sin\lambda(x-s)\, ds -$$

$$- \frac{1}{(m-1)!} \int_1^x A_1^{m-1}(s) \cos\lambda(s-1)\, q(s) \cos\lambda(x-s)\, ds + O(\lambda^{-1}) =$$

$$= \frac{A_1^m(x)}{m!} \cos\lambda(x-1) + O(\lambda^{-1}).$$

Используя теперь представление (2.8), находим

$$u^0(x, \lambda) = \cos\lambda(x-1) \cdot \left\{1 - \frac{A_1^2(x)}{2!} + \frac{A_1^4(x)}{4!} - \dots\right\} -$$

$$- \sin\lambda(x-1) \cdot \left\{A_1(x) - \frac{A_1^3(x)}{3!} + \frac{A^5(x)}{5!} - \dots\right\} + O(\lambda^{-1}) =$$

$$= \cos\{\lambda(x-1) + A_1(x)\} + O(\lambda^{-1}),$$

$$v^0(x, \lambda) = -\sin\{\lambda(x-1) + A_1(x)\} + O(\lambda^{-1}). \tag{2.11}$$

Система (2.7) решается аналогично (без умножения на λ внеинтегральных членов она решена в работе [4]). Поэтому, используя результат работы [4], легко получить

$$u^1(x, \lambda) = \lambda \sin\{\lambda(x-1) + A_1(x)\} + \frac{B(x)}{4} \sin\{\lambda(x-1) + A_1(x)\} +$$

$$+ \frac{B(0)}{4} \sin\{\lambda(x+1) + A_1(x)\} - \frac{1}{8} \int_1^x B^2(s)\, ds \cdot \cos\{\lambda(x-1) + A_1(x)\} +$$

$$+ O(\lambda^{-1}),$$

$$v^1(x, \lambda) = \lambda \cos\{\lambda(x-1) + A_1(x)\} - \frac{B(x)}{4} \cos\{\lambda(x-1) + A_1(x)\} +$$

$$+ \frac{B(0)}{4} \cos\{\lambda(x+1) + A_1(x)\} + \frac{1}{8} \int_1^x B^2(s)\, ds \cdot \sin\{\lambda(x-1) +$$

$$+ A_1(x)\} + O(\lambda^{-1}),$$

где обозначено $B(x) = p(x) - q(x)$.

Полагая наконец

$$\psi_1(x, \lambda) = v^0(x, \lambda) + v^1(x, \lambda), \quad \psi_2(x, \lambda) = u^0(x, \lambda) + u^1(x, \lambda),$$

мы получим формулы (2.4). Лемма доказана.

Для получения явного вида матрицы-функции Грина (2.1) остается вычислить асимптотику функции (2.2), т. е. $\omega(\lambda)$ при $|\lambda| \to \infty$.

Из формул (2.2), (2.3) и (2.4) следует

$$\omega(\lambda)=\cos\{\lambda x-\alpha+A_0(x)\}\cdot\lambda\sin\{\lambda(x-1)+A_1(x)\}-$$
$$-\sin\{\lambda x-\alpha+A_0(x)\}\cdot\lambda\cos\{\lambda(x-1)+A_1(x)\}+O(1)=$$
$$=-\lambda\sin\left\{-\frac{1}{2}\int_0^1[p(s)+q(s)]\,ds-\lambda+\alpha\right\}+O(1). \qquad (2.12)$$

§ 3. Полнота с. п. в. оператора H

Для доказательства полноты с. п. в. необходимо найти оценку для матрицы-функции Грина $G(x, \xi; \lambda)$ при больших $|\lambda|$, а для этого необходимо выяснить асимптотическое расположение с. з. Справедлива

Лемма 3.1. *Собственные значения оператора* H *асимптотически простые, лежат в полосе* $|Im\lambda_n|\leqslant C$, *(C—постоянная) и при* $|\lambda|\to\infty$ *имеют вид*

$$\lambda_n=\pi n-\theta+O(n^{-1}), \qquad (3.1)$$

где

$$\theta=\frac{1}{2}\int_0^1[p(s)+q(s)]\,ds-\alpha.$$

Доказательство. Собственные значения исходной задачи (0.1)—(0.3), соответственно, и оператора H будут корнями уравнения

$$\varphi_1(1, \lambda)-\lambda\varphi_2(1, \lambda)=0. \qquad (3.2)$$

Тогда из (2.3) получим

$$\operatorname{ctg}\{\lambda-\alpha+A_0(1)\}=\lambda+O(1), \qquad (3.3)$$

откуда видно, что корни уравнения (3.2) находятся вблизи точек $\pi n-\theta$. Положим $\lambda_n=\pi n-\theta+\delta_n$ и подставим в уравнение (3.3). В результате несложных вычислений получим

$$\operatorname{tg}\delta_n=\frac{1+O(n^{-1})}{\pi n-\theta+\delta_n},$$

откуда, учитывая, что при малых δ_n имеем $\operatorname{tg}\delta_n\approx\delta_n$, находим, что $\delta_n=O(n^{-1})$, что и доказывает (3.1).

Замечание. Из равенства (2.12) видно, что λ_n, определенные в (3.1), являются одновременно и нулями определителя $\omega(\lambda)$, т. е. полюсами матрицы-функции Грина $G(x, \xi; \lambda)$.

Теорема 3.1. *Собственные и присоединенные векторы оператора* H *образуют полную и минимальную систему в пространстве* $\mathbf{W}^1_{2,\alpha}$.

Доказательство. Вначале необходимо получить оценку резольвенты $(H-\lambda I)^{-1}$ при больших $|\lambda|$ вне кружков $B(\lambda, \varepsilon)$, содержащих с. з. Для этого достаточно получить оценку $\|(H-\lambda I)^{-1}\|_{W_2^1}$ вне двойного угла сколь угодно малого раствора, содержащего действительную ось.

Пусть

$$y(x, \lambda)=\begin{pmatrix} y_1(x, \lambda) \\ y_2(x, \lambda) \end{pmatrix}=(\mathrm{H}-\lambda I)^{-1} f=\int_0^1 G(x, \xi; \lambda) f(\xi)\, d\xi, \quad (3.4)$$

$$\|y(x, \lambda)\|_{W_2^1}=\|y(x, \lambda)\|_{L_2}+\|y'_x(x, \lambda)\|_{L_2}. \quad (3.5)$$

Согласно представлению (2.1) матрицы-функции Грина

$$y_1(x, \lambda)=\frac{1}{\omega(\lambda)}\left\{\psi_1(x, \lambda)\int_0^x [\varphi^{\mathrm{T}} f](s)\, ds+\varphi_1(x, \lambda)\int_x^1 [\psi^{\mathrm{T}} f](s)\, ds\right\},$$

$$(3.6)$$

$$y_2(x, \lambda)=\frac{1}{\omega(\lambda)}\left\{\psi_2(x, \lambda)\int_0^x [\varphi^{\mathrm{T}} f](s)\, ds+\varphi_2(x, \lambda)\int_0^1 [\psi^{\mathrm{T}} f](s)\, ds\right\},$$

где $[u^{\mathrm{T}} v](s)=u_1(s) v_1(s)+u_2(s) v_2(s)$.

Используя явный вид решений $\varphi(x, \lambda)$ и $\psi(x, \lambda)$ из равенств (2.3) и (2.4) и подставляя их в (3.6), после несложных вычислений получим, что при $|\lambda|\to\infty$ справедлива оценка

$$\|y(x, \lambda)\|_{L_2}\leqslant C_1 |\lambda|^{-1/2}\|f\|_{L_2}. \quad (3.7)$$

Далее, в силу (1.2) запишем (3.4) в виде

$$y_2'(x, \lambda)=p(x) y_1(x, \lambda)+\lambda y_1(x, \lambda)+f_1(x),$$

$$-y_1'(x, \lambda)=q(x) y_2(x, \lambda)+\lambda y_2(x, \lambda)-f_2(x),$$

откуда, в силу (3.7), находим оценку

$$\|y'_x(x, \lambda)\|_{L_2}\leqslant C_2 |\lambda|^{1/2}\|f\|_{L_2}. \quad (3.8)$$

Оценку (3.8) можно существенно уточнить, но в данном случае в этом нет необходимости. Окончательно, в силу (3.7) и (3.8), мы имеем оценку

$$\|(\mathrm{H}-\lambda I)^{-1} f\|_{W_2^1}\leqslant C|\lambda|^{-1/2}(1+\lambda)\|f\|_{W_2^1}. \quad (3.9)$$

Заметим, что $\ker(\mathrm{H}^{-1})^*=\mathbf{W}^1_{2,\,a}\ominus\overline{D}_{\mathrm{H}}=0$.

Теперь воспользуемся хорошо известным результатом, фактически доказанным М. В. Келдышем [5] (см. [1]).

Пусть A-оператор с дискретным спектром в H и $\|(A-\lambda I)^{-1}\|_{\mathrm{H}}\leqslant C|\lambda|^{N}$ на трех лучах раствора меньше π и $\ker(A^{-1})^*=0$. Тогда система с. п. в. оператора A полна в пространстве H.

Легко видеть, что система $\{z_k\}_1^\infty$, сопряженная к $\{y_k\}_1^\infty$ — с. п. в. оператора H, в данном случае также полна. Следовательно, обе эти системы минимальны в пространстве $\mathbf{W}^1_{2,\,a}$.

§ 4. Базисность с. п. в. оператора H

Определение. *Пусть H, H_1 — гильбертовы пространства и $H_1 \subseteq H$. Систему $\{e_k\}_1^\infty$ назовем безусловным базисом в H_1, относительно нормы пространства H, если эта система минимальна в H_1 и каждый элемент $x \in H_1$ разлагается в ряд*

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k,$$

который безусловно сходится по норме пространства H. После нормировки $|e_k| \asymp 1$ система $\{e_k\}_1^\infty$ называется базисом Рисса.

Пусть $y_{k_1}, \cdots, y_{k_m}$ — с. п. в. оператора $\mathbf{H}$, отвечающие с. з. λ_k, а $B(\lambda_k, \varepsilon)$ — кружок радиуса ε, содержащий λ_k. Тогда, согласно работе [5]

$$\sum_{k=k_1}^{k_m} (f, z_k)\, y_k = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial B(\lambda_k, \varepsilon)} (\mathbf{H} - \lambda I)^{-1} f\, d\lambda, \tag{4.1}$$

где $\{z_k\}$ — система, сопряженная к $\{y_k\}$ в пространстве $\mathbf{W}^1_{l,\,a}$.

Воспользуемся следующей леммой работы [1].

Лемма 4.1. *Пусть $S = \{\lambda : |Im\,\lambda| \leqslant C\}$ и $R(\lambda)$ — мероморфная функция с полюсами вида (3.1), а вне области $G = \bigcup\limits_k B(\lambda_k, \varepsilon)$. Предположим, что $\eta(x, \lambda)$ и $\xi(x, \lambda)$ в S допускают разложения*

$$\eta(x, \lambda) = \eta(x) + O(\lambda^{-1}),\ \xi(x, \lambda) = \xi(x) + O(\lambda^{-1}),$$

где $\eta(x)$, $\xi(x)$ — ограниченные функции. Тогда при малых ε область G разбивается на непересекающиеся кружки и

$$\int\limits_{\partial B(\lambda_m, \varepsilon)} e^{i\lambda x}\, \eta(x, \lambda) \int\limits_0^1 e^{i\lambda s}\, \xi(s, \lambda) f(s)\, ds\, R(\lambda)\, d\lambda = c_m\, \varphi_m(x), \tag{4.2}$$

где $c_m = c_m(f)$ для любого $f \in L_2[0, 1]$ образуют последовательность из l_2, а $\{\varphi_m(x)\}$ — бесселева система в $L_2[0, 1]$.

Из представления (3.6) и асимптотических формул (2.3) и (2.4) видно, что функции $y_1(x, \lambda)$ и $y_2(x, \lambda)$ удовлетворяют условиям леммы 4.1.

Покажем, что производные $y_1'(x, \lambda)$ и $y_2'(x, \lambda)$ также удовлетворяют условиям леммы 4.1. Очевидно, что достаточно это показать на функциях $f \in \overset{\circ}{\mathbf{W}}{}^1_2$, т. е. $f(0) = f(1) = 0$. Из (3.6) мы имеем

$$y_1'(x, \lambda) = \frac{1}{\omega(\lambda)} \left\{ \psi_1'(x, \lambda) \int\limits_0^x [\varphi^{\top} f](s)\, ds + \varphi_1'(x, \lambda) \int\limits_x^1 [\psi^{\top} f](s)\, ds + \right.$$

$$\left. + \psi_1(x, \lambda)\, [\varphi^{\top} f](x) - \varphi_1(x, \lambda)\, [\psi^{\top} f](x). \right. \tag{4,3}$$

С учетом (1.2) представим (4.3) в виде

$$y_1'(x,\lambda)=-\frac{q(x)+\lambda}{\omega(\lambda)}\left\{\psi_2(x,\lambda)\int_0^x\left[\frac{\varphi_1'(s,\lambda)}{p(s)+\lambda}f_1(s)-\frac{\varphi_1'(s,\lambda)}{q(s)+\lambda}f_2(s)\right]ds+\right.$$

$$\left.+\varphi_2(x,\lambda)\int_x^1\left[\frac{\psi_2'(s,\lambda)}{p(s)+\lambda}f_1(s)-\frac{\psi_1'(s,\lambda)}{q(s)+\lambda}f_2(s)\right]ds-f_2(x).\right. \tag{4.4}$$

В (4.4) проинтегрировав по частям с учетом того, что $f\in \mathring{W}_2^1$, и из асимптотического представления (2.12), нетрудно видеть, что $y_1'(x,\lambda)$ представима в виде суммы членов, каждый из которых удовлетворяет условиям леммы 4.1. Аналогично доказывается и для $y_2'(x,\lambda)$.

Таким образом, получаем, что справедливы равенства

$$\sum_m \int_{\partial B(\lambda_m,\varepsilon)} \{y_1(x,\lambda)+y_1'(x,\lambda)\}\,d\lambda=\sum_m a_m\,g_m(x),$$
$$\sum_m \int_{\partial B(\lambda_m,\varepsilon)} \{y_2(x,\lambda)+y_2'(x,\lambda)\}\,d\lambda=\sum_m b_m\,h_m(x), \tag{4.5}$$

где a_m, $b_m\in l_2$, а $\{g_m(x)\}$ и $\{h_m(x)\}$ — бесселевы системы в $L_2[0,1]$. А с другой стороны известно (см. [1]), что $\sum\limits_m a_m\,g_m(x)$ и $\sum\limits_m b_m\,h_m(x)$ безусловно сходятся по норме $L_2[0,1]$.

На основании последнего замечания и соотношений (4.1) и (4.2) справедлива

Теорема 4.1. *Собственные и присоединенные функции оператора* H *образуют базис Рисса в пространстве* $\mathbf{W}_{2,u}^1$.

В заключение приношу глубокую благодарность А. А. Шкаликову, под руководством которого выполнена настоящая работа.

Всесоюзный заочный
машиностроительный институт

Поступила 17.IX 1986

Ա. Ի. ՍԱՐԳՍՅԱՆ. Եզրային պայմաններում սպեկտրալ պարամետր պարունակող Դիրակի միաչափ սիստեմի համար ոչ ինքնահամալուծ խնդիր *(ամփոփում)*

Հոդվածում ապացուցվում է, որ (0.1)—(0.3) (տես հիմնական տեքստում) եզրային խնդրի սեփական և միակցված վեկտոր-ֆունկցիաների սիստեմը կազմում է Ռիսսի բազիս հարթ ֆունկցիաների հատուկ ձևով կառուցված տարածության մեջ։

A. I. SARGSIAN. *Nonconjugated problem for one-dimensional Dirac system with spectral parameter in the boundary conditions* (summary)

The paper proves that the system of eigen—and associated vector-functions of the boundary problem (0.1)—(0.3) form a Riss basis in a certain space of smooth functions.

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. А. Шкаликов*. Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях, Труды семинара им. И. Г. Петровского, 1983, вып. 9, 190—229.

2. *A. Digksma*. Eigenfunction exponsions for a class of G-selfadjoint ordinary differential operators with boundary conditions containing the eigenvalue parameter, Proc. of the Royal Society of Edinburg, 1971.

3. *Б. М. Левитан, И. С. Саргсян*. Введение в спектральную теорию, М., «Наука», 1970.

4. *Э. Абдукадыров*. Вычисление регуляризованного следа для системы Дирака, Вестник Моск. ун-та, серия матем., механика, № 4, 1967, 17—24.

5. *М. В. Келдыш*. О полноте собственных функций некоторых классов несамосопряженных оператоорв, УМН, 26, № 4, 1971, 15—41.