ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XXII, № 6, 1987 Математика

УДК 517.538

В. М. МАРТИРОСЯН

О ЗАМЫКАНИИ И БАЗИСНОСТИ НЕКОТОРЫХ СИСТЕМ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Введение

0.1. М. М. Джрбашян для произвольного ограниченного континуума K со связным дополнением и произвольного параметра $s\,(0 \leqslant s \leqslant 1)$ ввел систему рациональных функций $\{M_k^{(s)}(z)\}_0^\infty$ (см. [1—3]). Данная система обобщает систему полиномов Фабера в том смысле, что полюсы функций $M_k^{(s)}(z)$ вместо бесконечности расположены на заданной последовательности $\{\omega_k\}_0^\infty$, лежащей в смежной с K компоненте $G^{(-)} \ni \infty$, и если, в частности, все точки $\omega_k\,(k=0, 1, \cdots)$ сосредоточены в бесконечности, то указанная система обращается в систему полиномов Фабера.

Функции $M_n^{(s)}(z)\,(n=0, 1, \cdots;\ 0 \leqslant s \leqslant 1)$ определяются следующим образом.

Рассматривается ортонормированная на окружности $|w|=1$ система рациональных функций Такенака—Мальмквиста

$$\varphi_0(w) = (1-|\alpha_0|^2)^{1/2} / (1-\bar{\alpha}_0 w),$$

$$\varphi_n(w) = \frac{(1-|\alpha_n|^2)^{1/2}}{1-\bar{\alpha}_n w} \prod_{k=1}^{n-1} \frac{\alpha_k - w}{1-\bar{\alpha}_k w} \frac{|\alpha_k|}{\alpha_k} \quad (n=2, 3, \cdots),$$

где $\alpha_k = 1/\overline{\Phi(\omega_k)}\ (k=0, 1, \cdots)$, $w=\Phi(z)$—функция, конформно отображающая $G^{(-)}$ на область $|w|>1$ и удовлетворяющая условиям нормировки $\Phi(\infty)=\infty$, $\Phi'(\infty)>0$. Тогда функция $M_n^{(s)}(z)$ есть сумма главных частей и постоянных слагаемых в лорановском разложении функции $\varphi_n[\Phi(z)]\,[\Phi'(z)]^s$ в окрестности точек $\{\omega_k\}_0^n$.

В работах [1—3] исследованы вопросы разложения аналитических функций в ряд по системе $\{M_k^{(s)}(z)\}_0^\infty$ в том случае, когда K есть замыкание односвязной жордановой области $G^{(+)}$ со спрямляемой границей Γ и $[\Phi'(\zeta)]^{s-1/2} \in L_2(\Gamma)$.

Дано интегральное представление

$$M_k^{(s)}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\varphi_k[\Phi(\zeta)]\,[\Phi'(\zeta)]^s}{\zeta - z}\, d\zeta, \quad z \in G^{(+)},$$

и определена система функций $\{R_k^{(s)}(z)\}_0^\infty$

$$R_k^{(s)}(z) = [\Phi'(z)]^{1-s}\ [\Phi(z)]^{-1}\ \overline{\varphi_k}\,[\Phi^{-1}(z)],\ \ z \in G^{(+)},$$

которая биортогональна с $\{M_k^{(s)}(z)\}_0^\infty$ в следующем смысле:

$$\int\limits_{\Gamma} R_k^{(s)}(\zeta)\, M_j^{(s)}(\zeta)\, d\zeta = \begin{cases} 0, & k \neq j, \\ 1, & k = j, \end{cases} \quad (k,\ j = 0,\ 1, \cdots);$$

Введены довольно общие классы $K_2^{(s)}(G^{(+)})$, голоморфных в $G^{(+)}$ функций, представимых в виде интеграла типа Коши

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{g(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta, \quad z \in G^{(+)}, \quad (g(\zeta)\, [\Phi'(\zeta)]^{1/2 - s} \in L_2(\Gamma)),$$

и доказано, что если

$$\sum_{k=0}^{\infty} (1 - |\alpha_k|) = \sum_{k=0}^{\infty} (1 - |\Phi(\omega_k)|^{-1}) = +\infty,$$

то функция $f(z) \in K_2^{(s)}(G^{(+)})$ допускает абсолютно и равномерно сходящееся внутри области $G^{(+)}$ разложение

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k M_k^{(s)}(z) \left(\sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^2 < +\infty \right), \tag{0.1}$$

где

$$c_k = c_k(g) = \int\limits_{\Gamma} g(\zeta)\, R_k^{(s)}(\zeta)\, d\zeta\ (k = 0,\ 1, \cdots).$$

В работах [1—3] подробно исследован также случай, когда

$$\sum_{k=0}^{\infty} (1 - |\alpha_k|) = \sum_{k=0}^{\infty} (1 - |\Phi(\omega_k)|^{-1}) < +\infty. \tag{0.2}$$

При условии (0.2) установлено следующее представление ядра Коши:

$$\frac{1}{\zeta - z} = \sum_{k=0}^{\infty} M_k^{(s)}(z)\, R_k^{(s)}(\zeta) +$$

$$+ \frac{[\Phi'(\zeta)]^{1-s}}{2\pi i\, B[\Phi(\zeta)]} \int\limits_{\Gamma} \frac{B[\Phi(\eta)]\, [\Phi'(\eta)]^s}{(\eta - z)\, [\Phi(\zeta) - \Phi(\eta)]}\, d\eta,$$

для $z \in G^{(+)}$, $\zeta \in G^{(-)}$ и почти всех $\zeta \in \Gamma$ ($B(w)$—произведение Бляшке для круга $|w| < 1$ с последовательностью нулей $\{\alpha_k\}_0^{\infty}$). Это привело к эффективному определению разности между функцией $f(z) \in K_2^{(s)} \times (G^{(+)})$ и ее разложением в ряд по системе $\{M_k^{(s)}(z)\}_0^{\infty}$. Отсюда, в качестве непосредственного следствия, была выявлена полная характеристика и структурное представление класса $\overline{K}_2^{(s)}(G^{(+)})$ функций, при условии (0.2) допускающих разложение в абсолютно и равномерно сходящийся ряд вида (0.1). В [1—3] доказано, что $\overline{K}_2^{(s)}(G^{(+)})$, совпадает с классом функций, аналитических в отдельности в каждой из областей $G^{(+)}$, $G^{(-)} \setminus \{\omega_k\}_0^{\infty}$ и являющихся в известном смысле „аналитическими продолжениями“ друг друга через общую границу Γ этих областей; установлено совпадение этих классов с классом функций, представимых внутри этих областей абсолютно и равномерно сходящимся рядом вида (0.1).

Исследованию вопросов разложения аналитических функций в ряды по системам рациональных функций Фабера—Джрбашяна $\{M_k^{(s)}(z)\}_0^\infty$ посвящен ряд работ других авторов (см. [4—9] и [10], гл. VIII).

Отметим, что в работе Г. Ц. Тумаркина [4], посвященной вопросам разложений в ряды по сисиеме $\{M_k^{(1/2)}(z)\}_0^\infty$, анонсирована также теорема 12, в которой утверждается следующее. Если область $G^{(+)}$ такова, что интеграл типа Коши каждой функции из $L_2(\Gamma)$ принадлежит классу E_2, то для функции $f(z)$, представимой таким интегралом, разложение по системе $\{M_k^{(1/2)}(z)\}_0^\infty$ сходится к нему по метрике $L_2(\Gamma)$.

0.2. В работах автора [11, 12] были установлены критерии базисности систем простейших рациональных дробей в их замыканиях в $H_p^\omega[\Delta]$ $(1<p<+\infty,\ -1<\omega<p-1,\ \Delta\subset\mathbf{C}$—угловая область с вершиной в нуле). В работе Ш. А. Григорян [13] были установлены критерии базисности в своих замыканиях некоторых неполных в $H_p^\omega[\Delta]$ $(1<p<+\infty)$ систем рациональных функций—аналогов введенных в работе М. М. Джрбашяна [14] систем рациональных функций $\{m_k^{(s)}(z)\}_1^\infty$.

Выяснилось, что отмеченные системы не могут быть базисами пространства $H_p^\omega[\Delta]$, более того, их неполнота в $H_p^\omega[\Delta]$ недостаточна для базисности.

Естественно возникает задача построения базисных в $H_p^\omega[\Delta]$ систем рациональных функций.

Пусть $\{\lambda_k\}_1^\infty\subset\mathbf{C}\setminus\bar{\Delta}$—произвольная последовательность. В настоящей работе строятся системы рациональных функций $\{R_k(z)\}_1^\infty$, полюсы которых расположены на последовательности $\{\lambda_k\}_1^\infty$. Это аналоги систем Фабера—Джрбашяна $\{M_k^{(s)}(z)\}_0^\infty$.

Приведен критерий полноты систем $\{R_k(z)\}_1^\infty$ в $H_p^\omega[\Delta]$ $(1<p<+\infty$ $-1<\omega<p-1)$, в случае неполноты дана полная внутренняя характеристика их замыканий и выявлены структурные свойства принадлежащих этим замыканиям функций. Установлено, что системы $\{R_k(z)\}_1^\infty$ являются базисами (при $p=2$—базисами Рисса) в своих замыканиях в $H_p^\omega[\Delta]$ как в случае их полноты в $H_p^\omega[\Delta]$, так и в случае неполноты.

§ 1. Обозначения и предварительные сведения

1.1. (а) Для значений $\rho\in(1/2,+\infty)$, $\theta\in\mathbf{R}=(-\infty,+\infty)$ обозначим через

$$\begin{gathered}\Delta=\Delta_\theta(\rho)=\{z\neq0:|\operatorname{Arg}z-\theta|<\pi/(2\rho)\},\\ \Delta^*=\Delta_{\theta^*}(\rho^*)\ (1/\rho+1/\rho^*=2,\ \theta^*=\theta+\pi),\end{gathered}\tag{1.1}$$

взаимно-дополнительные угловые области $(\Delta^*=\mathbf{C}\setminus\bar{\Delta})$, пусть $\partial\Delta$ (или, $\partial\Delta^*$)—их общая граница, пробегаемая в направлении положительного обхода Δ (или Δ^* соответственно). Биссектрису области Δ, с выбранным на ней на правлением возрастания $|z|=\tau$, обозначим через γ_θ:

$$\gamma_0 = \Delta_0(+\infty) = \{z = re^{i0} : r > 0\}. \quad (1.2)$$

(б) Всюду в данной работе полагаем (разумеется, если особо не оговорено противное), что p и ω — вещественные параметры, удовлетворяющие условиям

$$1 \leqslant p < +\infty, \ -1 < \omega < p - 1, \quad (1.3)$$

а параметры q и $\bar{\omega}$ определяются из равенств

$$1/p + 1/q = 1, \ \bar{\omega} = (1 - q)\omega. \quad (1.4)$$

Обозначим через $L_p^\omega[\partial\Delta]$ ($\equiv L_p^\omega[\partial\Delta^*]$) класс измеримых на $\partial\Delta$ функций с конечной нормой

$$\|f; \partial\Delta^*\|_{p,\omega} = \|f; \partial\Delta\|_{p,\omega} = \left\{ \int_{\partial\Delta} |f(\zeta)|^p \, |\zeta|^\omega \, |d\zeta| \right\}^{1/p}. \quad (1.5)$$

Аналогично определяются классы $L_p^\omega[\mathbf{R}]$, $L_p^\omega[\gamma_0]$, $L_p^\omega[\mathbf{R}_+]$ и нормы $\|\cdot; \mathbf{R}\|_{p,\omega}$, $\|\cdot; \gamma_0\|_{p,\omega}$, $\|\cdot; \mathbf{R}_+\|_{p,\omega}$, где $\mathbf{R}_+ = (0, +\infty)$.

Эти же обозначения будем применять для соответсвующих банаховых пространств.

Наконец, обозначим через $H_p^\omega[\Delta]$ класс голоморфных в Δ функций, имеющих конечную норму

$$\|f; \Delta\|_{p,\omega} = \sup_{\gamma_\varphi \subset \Delta} \left\{ \int_0^{+\infty} |f(re^{i\varphi})|^p \, r^\omega \, dr \right\}^{1/p}. \quad (1.6)$$

Отметим, что функции из классов $H_2^\omega[\Delta]$ $(-1 < \omega < 1)$ впервые рассматривались М. М. Джрбашяном [15—17]; в его совместной с А. Е. Аветисяном работе [18] были установлены параметрические представления этих классов (см. также [17], гл. VII).

1.2. Классы $H_p^\omega[\Delta]$ являются естественными обобщениями известных классов H_p в полуплоскости и обладают многими аналогичными свойствами. В частности, имеет место следующее предложение (см. [17], теорему 7.5, и [13, 12]).

Теорема А. *Если $f \in H_p^\omega[\Delta]$, то справедливы устверждения:*

1°. *Существуют некасательные граничные значения $f(\zeta)$, $\zeta \in \partial\Delta$ п. в.*, причем $f(\zeta) \in L_p^\omega[\partial\Delta]$ и*

$$\lim_{\varphi \to \pi/(2p)} \int_0^{+\infty} \left| f(re^{i(\theta \pm \varphi)}) - f\left(re^{i\left(\theta \pm \frac{\pi}{2p}\right)}\right) \right|^p r^\omega \, dr = 0.$$

2°. *Имеет место интегральная формула*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta = \begin{cases} f(z), & z \in \Delta, \\ 0, & z \in \Delta^*. \end{cases}$$

*Если $\Gamma \subset \mathbf{C}$ — одномерное множество, то запись „$\zeta \in \Gamma$ п. в." означает почти всюду на Γ по линейной мере Лебега.

3°. *Для любого значения* $\varphi_0\ (0<\varphi_0<\pi/2\rho))$

$$\max_{|\varphi-\theta|<\varphi_0}\|f(re^{i\varphi})\|=o\,(r^{-(1+\omega)/p},\ \textit{при}\ r\to+0,\ r\to+\infty.$$

Справедливы также следующие утверждения (см. [13, 12]).

Лемма А. *Если* $f\in H_p^{\omega}[\Delta]$ *и* $g\in H_q^{\hat{\omega}}[\Delta]$, *то*

$$\int_{\partial\Delta} f(\zeta)\,g(\zeta)\,d\zeta=0.$$

Лемма Б. $H_p^{\omega}[\Delta]$ *с нормой* $\|\cdot;\ \partial\Delta\|_{p,\,\omega}$ *является замкнутым подпространством банахова пространства* $L_p^{\omega}[\partial\Delta]$, *причем*

$$2^{-1/p}\|f;\ \partial\Delta\|_{p,\,\omega}\leqslant\|f;\ \Delta\|_{p,\,\omega}\leqslant\|f;\ \partial\Delta\|_{p,\,\omega},\ \forall f\in H_p^{\omega}[\Delta].$$

Таким образом, $H_p^{\omega}[\Delta]$ отождествляется с определенным подпространством из $L_p^{\omega}[\partial\Delta]$, а именно, с подпространством граничных функций представителей класса $H_p^{\omega}[\Delta]$. Более того, нормы $\|\cdot;\ \partial\Delta\|_{p,\,\omega}$ и $\|\cdot;\ \Delta\|_{p,\,\omega}$ порождают в $H_p^{\omega}[\Delta]$ одну и ту же топологию. Под сходимостью в $H_p^{\omega}[\Delta]$ мы будем подразумевать сходимость в этой топологии.

Лемма 1.1. *Если* $f\in H_p^{\omega}[\Delta]$, *то справедлива оценка*

$$|f(z)|\leqslant\left(\frac{\rho}{4\pi}\right)^{1/p}\|f;\ \partial\Delta\|_{p,\,\omega}\,|z|^{-(1+\omega)/p}\,\{\cos[\rho(\varphi-\theta)]\}^{-1/p},\qquad(1.7)$$

где $z\in\Delta$, $\varphi=\operatorname{Arg}z\ (|\varphi-\theta|<\pi/(2\rho))$.

Доказательство. Полагая $f(z)\not\equiv0$, рассмотрим голоморфную в полуплоскости $\Delta(1)=\{w:\operatorname{Re}w>0\}$ функцию*

$$F(w)=\rho^{-1/p}f(e^{i\theta}w^{1/\rho})\,w^{(1+\omega-\rho)/(p\rho)}.$$

Легко проверить, что $F\in H_p^0[\Delta(1)]$ и $\|F;\ \partial\Delta(1)\|_{p,\,0}=\|f;\ \partial\Delta\|_{p,\,\omega}$. Поэтому, если $B(w)$—сходящееся произведение Бляшке нулей функции F, то функция $G=\{F/B\}^{p/2}$ принадлежит $H_2^0[\Delta(1)]$ и $\|G;\ \partial\Delta(1)\|_{2,\,0}^2=\|F;\ \partial\Delta(1)\|_{p,\,0}^p$. Представим функцию G в виде интеграла Коши по ее граничным значениям (см. теорему А) и воспользуемся неравенством Коши—Буняковского; будем иметь

$$|G(w)|\leqslant\frac{1}{2\pi}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}|G(iy)|^2\,dy\right\}^{1/2}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dy}{|iy-w|^2}\right\}^{1/2}$$

и вычислив последний интеграл, получим

$$|G(w)|\leqslant(4\pi)^{-1/2}\|G;\ \partial\Delta(1)\|_{2,\,0}\,|w|^{-1/2}\,|\cos(\arg w)|^{-1/2}.$$

Отсюда последовательно возвращаясь к функции f и переменной $z=e^{i\theta}w^{1/\rho}$, придем к оценке (1.7).

---

* Всюду в данной работе выбираются главные ветви рассматриваемых многозначных функций.

Следствие 1.1. *Если последовательность* $\{f_n\}_1^\infty$ *функций из* $H_p^\omega[\Delta]$ *сходится в этом пространстве к функции* f, *то она сходится к* f *также равномерно на любом компакте* $K\subset\Delta$.

Имеет место также следующая теорема (см. [19], стр. 176, и [13, 12]).

Теорема Б. *Если* $f\in L_p^\omega[\partial\Delta]$ и

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\Delta}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta=\begin{cases} f^+(z), & z\in\Delta,\\ f^-(z), & z\in\Delta^*,\end{cases}$$

то справедливы утверждения:

1°. $f^+\in H_p^\omega[\Delta],\ f^-\in H_p^\omega[\Delta^*]$.

2°. *Имеют место оценки*

$$\|f^+;\ \partial\Delta\|_{p,\,\omega}\leqslant A\|f;\ \partial\Delta\|_{p,\,\omega},\ \|f^-;\ \partial\Delta\|_{p,\,\omega}\leqslant A\|f;\ \partial\Delta\|_{p,\,\omega},$$

константа $A\in\mathbf{R}_+$ *зависит только от* p *и* ω.

3°. *Выполняется равенство*

$$f(\zeta)=f^+(\zeta)-f^-(\zeta),\ \zeta\in\partial\Delta\ \text{п. в.}$$

1.3 Известно, что система рациональных функций $\{\Phi_k(w)\}_1^\varkappa(1\leqslant\varkappa\leqslant+\infty)$:

$$\Phi_k(w)=\sqrt{\frac{\operatorname{Im}\mu_k}{\pi}}\frac{1}{w-\bar\mu_k}\prod_{j=1}^{k}\frac{w-\mu_j}{w-\bar\mu_j},\ k\in\overline{1,\ \varkappa}\tag{1.8}$$

ортонормальна на вещественной оси:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Phi_j(x)\,\overline{\Phi_m(x)}\,dx=\delta_{jm}\,(j,\ m\in\overline{1,\ \varkappa}),\tag{1.9}$$

где $\{\mu_k\}_1^\varkappa$ $(\operatorname{Im}\mu_k>0)$—произвольная последовательность комплексных чисел из полуплоскости $\operatorname{Im}w>0$*.

Здесь δ_{jm}—символ Кронекера, а запись $k\in\overline{1,\ \varkappa}$ при $\varkappa<+\infty$ означает, что $k=1,\cdots,\varkappa$, а при $\varkappa=+\infty$ —что $k=1,\ 2,\cdots$.

В той же работе [21] было установлено следующее важное для наших целей представление ядра Коши.

Теорема В. *Для любых значений* w *и* ζ *и для любого* $n\in\overline{1,\ \varkappa}$

$$\frac{1}{2\pi i(\bar\zeta-w)}=\sum_{k=1}^{n}\overline{\Phi_k(\zeta)}\,\Phi_k(w)+\frac{\overline{B_n(\zeta)}\,B_n(w)}{2\pi i(\bar\zeta-w)}.\tag{1.10}$$

$$\left(B_n(w)=\prod_{k=1}^{n}(w-\mu_k)/(w-\bar\mu_k)\right).$$

1.4. Пусть X—банахово, а X^* — его сопряженное пространство. Системы $\{x_k\}_1^\infty\subset X$ и $\{x_k^*\}_1^\infty\subset X^*$ называются биортонормированными, если $x_n^*(x_m)=\delta_{nm}\,(n,\ m=1,\ 2,\cdots)$.

* История вопроса о системе $\{\Phi_k(w)\}_1^\varkappa$ подробно изложена в работе [20].

Система $\{x_k\}_1^\infty \subset X$ называется базисом пространства X, если каждый элемент $x \in X$ разлагается единственным образом в ряд

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k x_k, \quad c_k = c_k(x) \in \mathbf{C},$$

сходящийся по норме пространства X.

Теорема Г. ([22]). *Для того, чтобы система* $\{x_k\}_1^\infty$ *была базисом пространства* X, *необходимо и достаточно выполнение следующих трех условий:* а) $\{x_k\}_1^\infty$ *полна в* X; б) $\{x_k\}_1^\infty$ *имеет биортонормированную с ней систему* $\{x_k^*\}_1^\infty$; в) *существует константа* $C > 0$ *такая, что для любого* $x \in X$

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} x_k^*(x)\, x_k \right\| \leqslant C \|x\| \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

Базис $\{x_k\}_1^\infty$ гильбертова пространства H называется базисом Рисса, если существует ограниченный обратимый ленейный оператор $A: H \to H$, переводящий $\{x_k\}_1^\infty$ в ортонормированный базис пространства H. Следующее утверждение содержится в общей теореме Н. К. Бари [23, 24] (см. также [25], стр. 374—375).

Теорема Д. *Следующие утверждения эквивалентны:*

1°. $\{x_k\}_1^\infty$ — *базис Рисса гильбертова пространства* H.

2°. *Система* $\{x_k\}_1^\infty$ *полна в* H *и существуют константы* C_1, $C_2 (> 0)$ *такие, что для любого натурального* n *и для любых комплексных чисел* $\gamma_1, \cdots, \gamma_n$

$$c_1 \sum_{k=1}^{n} |\gamma_k|^2 \leqslant \left\| \sum_{k=1}^{n} \gamma_k x_k \right\|^2 \leqslant c_2 \sum_{k=1}^{n} |\gamma_k|^2.$$

§ 2. Системы рациональных функций, порожденные угловыми областями

2.1 (а) Пусть $\Lambda = \{\lambda_k\}_1^\varkappa$ $(1 \leqslant \varkappa \leqslant +\infty)$ — произвольная конечная или бесконечная последовательность комплексных чисел из угловой области $\Delta = \Delta_\theta(\rho)$ $(1/2 < \rho < +\infty,\ \theta \in \mathbf{R})$.

Конформное отображение $w = \varphi(z)$ области Δ на нижнюю полуплоскость:

$$w = \varphi(z) = -i(e^{-i\theta} z)^\rho, \quad z \in \Delta, \tag{2.1}$$

переводит последовательность $\{\lambda_k\}_1^\varkappa$ в $\{\overline{\mu}_k\}_1^\varkappa$ $(\mathrm{Im}\ \overline{\mu}_k < 0)$, причем

$$\mu_k = i\,\overline{(e^{-i\theta}\lambda_k)^\rho}, \quad k \in \overline{1, \varkappa}. \tag{2.2}$$

(Запись $k \in \overline{1, \varkappa}$ при $\varkappa < +\infty$ означает $k = 1, \cdots, \varkappa$, а при $\varkappa = +\infty$ — $k = 1, 2, \cdots$).

С последовательностью $\{\mu_k\}_1^\varkappa$ ассоциируем систему рациональных функций $\{\Phi_k(w)\}_1^\varkappa$, ортонормальную на $\mathbf{R}$ (см. (1.8)—(1.9)):

$$\Phi_k(w) = \sqrt{\frac{\operatorname{Im}\mu_k}{\pi}}\,\frac{1}{w-\mu_k}\prod_{j=1}^{k}\frac{w-\mu_j}{w-\bar{\mu}_j},\quad k\in\overline{1,\varkappa},\tag{2.3}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi_j(x)\overline{\Phi_m(x)}\,dx=\delta_{jm}\ (j,\ m\in\overline{1,\varkappa}).\tag{2.4}$$

Далее, положим

$$\nu=(\rho-\omega-1)/p\quad (1<p<+\infty,\ -1<\omega<p-1)\tag{2.5}$$

и рассмотрим систему функций $\{G_k(z)\}_1^{\varkappa}$, где

$$G_k(z)=\Phi_k(\varphi(z))\,(e^{-i\theta}z)^{\nu},\quad k\in\overline{1,\varkappa}.\tag{2.6}$$

Очевидно, что функция $G_k(z)$ мероморфна в Δ и $\{\lambda_j\}_1^k$—последовательность ее полюсов из Δ, с учетом кратностей. Обозначим через $R_k(z)$ сумму главных частей лорановских разложений функции $G_k(z)$ в окрестностях всех ее отличных друг от друга полюсов $\{\lambda_j\}_1^k$.

Таким образом, $R_k(z)$—это рациональная функция с полюсами, лежащими во всех отличных друг от друга точках $z=\lambda_1,\cdots,\lambda_k$ области Δ, причем с теми же главными частями, что и у функции $G_k(z)$.

По аналогии с предложенной в работах [1—3] терминологии, назовем *систему рациональных функций* $\{R_k(z)\}_1^{\varkappa}$ *системой функций, порожденной угловой областью* $\overline{\Delta}^*$ *и последовательностью чисел* $\{\lambda_k\}_1^{\varkappa}\subset\Delta$.

Заметим, что функции $R_k(z)$ $(k=1,\ 2,\cdots)$ определяются посредством приема, аналогичного тому, который был применен при определении функций Фабера—Джрбашяна $M_k^{(\nu)}(z)$ (см. Введение).

Отметим, что когда $\theta=-\pi/2$, $\rho=1$ и $\omega=0$, область $\Delta=\Delta_\theta(\rho)$ есть нижняя полуплоскость $\operatorname{Im}z<0$, последовательность $\{\lambda_k\}_1^{\varkappa}$ совпадает с последовательностью $\{\bar{\mu}_k\}_1^{\varkappa}$, $\nu=0$. Поэтому, как легко видеть, в этом случае $R_k(z)=\Phi_k(z)$, $k\in\overline{1,\varkappa}$.

(б) Заметим, что функция $R_k(z)$ голоморфна в замкнутой угловой области $\overline{\Delta}^*$ и при $z\to\infty$ имеет порядок $O(|z|^{-1})$ равномерно по $\operatorname{Arg}z$, поэтому

$$\{R_k\}_1^{\varkappa}\subset H_p^{\omega}[\Delta^*].\tag{2.7}$$

Лемма 2.1. *При всех* $k\in\overline{1,\varkappa}$

$$R_k(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Delta^*}\frac{\Phi_k(\varphi(\zeta))\,(e^{-i\theta}\zeta)^{\nu}}{\zeta-z}\,d\zeta,\quad z\in\Delta^*.\tag{2.8}$$

Доказательство. Очевидно, что функция $G_k(z)-R_k(z)$ голоморфна в Δ, причем в силу (2.3), (2.1) и (2.6) она имеет порядок $O(|z|^{\nu-\varkappa})+O(|z|^{-1})$, при $z\to\infty$, и порядок $O(|z|^{\nu})+O(1)$, при $z\to 0$, равномерно по $\operatorname{Arg}z$. Поэтому

$$G_k-R_k\in H_p^{\omega}[\Delta].\tag{2.9}$$

Отсюда и из (2.7), в силу теоремы А, для всех $z \in \Delta^*$ будем иметь

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\Delta^*}\frac{G_k(\zeta)-R_k(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta=0,\quad \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\Delta^*}\frac{R_k(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta=R_k(z).$$

Из этих тождеств ввиду (2.6) получаем утверждение леммы.

(в) Рассмотрим теперь систему функций $\{\chi_k\}_1^{\varkappa}$, голоморфных в Δ:

$$\chi_k(z)=\overline{\Phi}_k(\varphi(z))\,\varphi'(z)\,(e^{-i\theta}z)^{-\nu},\ k\in\overline{1,\ \varkappa} \tag{2.10}$$

(полагаем $\overline{\Phi}_k(w)=\overline{\Phi_k(\overline{w})}$). Ввиду (2.1) и (2.3) функция $\chi_k(z)$ имеет порядок $O(|z|^{-\nu-1})$, при $z\to\infty$, и порядок $O(|z|^{\rho-\nu-1})$, при $z\to 0$, равномерно по $\operatorname{Arg} z$, и поэтому

$$\{\chi_k\}_1^{\varkappa}\subset H_q^{\tilde{\omega}}[\Delta]\ (1/p+1/q=1,\ \ \tilde{\omega}=(1-q)\,\omega). \tag{2.11}$$

Лемма 2.2 *Системы $\{R_k\}_1^{\varkappa}$ и $\{\chi_k\}_1^{\varkappa}$ биортогональны в следующем смысле:*

$$\int\limits_{\partial\Delta^*}R_j(\zeta)\,\chi_m(\zeta)\,d\zeta=\delta_{jm}\ (j,\ m\in\overline{1,\ \varkappa}). \tag{2.12}$$

Доказательство. По лемме А из (2.9) и (2.11) следуют равенства

$$\int\limits_{\partial\Delta^*}\{G_j(\zeta)-R_j(\zeta)\}\,\chi_m(\zeta)\,d\zeta=0,$$

а ввиду (2.6), (2.10) и (2.4) имеем

$$\int\limits_{\partial\Delta^*}G_j(\zeta)\,\chi_m(\zeta)\,d\zeta=\int\limits_{\partial\Delta^*}\Phi_j(\varphi(\zeta))\,\overline{\Phi}_m(\varphi(\zeta))\,\varphi'(\zeta)\,d\zeta=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Phi_j(x)\,\overline{\Phi}_m(x)\,dx=\delta_{jm}.$$

Из этих равенств, очевидно, следует (2.12).

(г) Следуя М. М. Джрбашяну (см. [26, 27]), обозначим через $s_k\,(k\in\overline{1,\ \varkappa})$ кратность появления числа λ_k в совокупности $\{\lambda_1,\cdots,\lambda_k\}$.

Наряду с $\{R_k\}_1^{\varkappa}$, рассмотрим систему простейших рациональных дробей $\{r_k\}_1^{\varkappa}$, положив

$$r_k(z)=\frac{(s_k-1)!}{(z-\lambda_k)^{s_k}},\ k\in\overline{1,\ \varkappa}. \tag{2.13}$$

Для произвольного значения $n\in\overline{1,\ \varkappa}$ обозначим через $\operatorname{sp}\{R_k\}_1^n$ и $\operatorname{sp}\{r_k\}_1^n$ линейные оболочки систем $\{R_k\}_1^n$ и $\{r_k\}_1^n$ соответственно.

Лемма 2.3. *Для всех $n\in\overline{1,\ \varkappa}$*

$$\operatorname{sp}\{R_k\}_1^n=\operatorname{sp}\{r_k\}_1^n. \tag{2.14}$$

Доказательство. При любом $k \in \overline{1, n}$ обозначим через $\{z_l\}_1^{m_k}$ совокупность попарно различных чисел, из которых составлена последовательность $\{\lambda_j\}_1^k$, а через $q_l(k)$ обозначим кратность появления числа z_l в этой последовательности. Тогда легко видеть, что для членов $\lambda_j (1 \leqslant j \leqslant k)$, равных z_l, соответствующая кратность s_j принимает последовательно значения от 1 до $q_l(k)$, и поэтому

$$\{r_j(z)\}_1^k = \bigcup_{l=1}^{m_k} \left\{\frac{(m-1)!}{(z-z_l)^m}\right\}_{m=1}^{q_l(k)}. \tag{2.15}$$

С другой стороны, полюсы функции G_k расположены в точках $z = z_l (1 \leqslant l \leqslant m_k)$ и главная часть ее лорановского разложения в окрестности точки $z = z_l$ имеет вид

$$g_k(z;\ z_l) = \sum_{m=1}^{q_l(k)} \frac{a_m(z_l)}{(z-z_l)^m} \ (a_m(z_l) \neq 0 \text{ при } m = q_l(k)). \tag{2.16}$$

Поскольку по определению имеем

$$R_k(z) = \sum_{l=1}^{m_k} g_k(z;\ z_l), \tag{2.17}$$

то, в силу (2.15) и (2.16), ясно, что $\mathrm{sp}\{R_k\}_1^n \subset \mathrm{sp}\{r_k\}_1^n$.

Однако, $\mathrm{sp}\{r_k\}_1^n$—это n-мерное линейное пространство, а в силу (2.12) система $\{R_k\}_1^n$ линейно независима. Значит, $\{R_k\}_1^n$—базис n-мерного линейного пространства $\mathrm{sp}\{r_k\}_1^n$, что и доказывает (2.14).

Следствие 2.1. *При* $\varkappa = +\infty$ *линейные оболочки систем* $\{R_k\}_1^\infty$ *и* $\{r_k\}_1^\infty$ *совпадают.*

2.2. Пусть теперь $\Lambda = \{\lambda_k\}_1^\varkappa (1 \leqslant \varkappa < +\infty)$ — конечная последовательность чисел из Δ, а $B_\varkappa(z)$—конечное произведение Бляшке для угловой области Δ:

$$B_\varkappa(z) = e^{i\eta} \prod_{k=1}^{\varkappa} \frac{(e^{-i\theta} z)^\rho - (e^{-i\theta}\lambda_k)^\rho}{(e^{-i\theta} z)^\rho + (e^{-i\theta}\lambda_k)^\rho} \ (z \in \Delta,\ \eta \in \mathrm{R}). \tag{2.18}$$

Обозначим через $H_p^\omega[\Delta^*;\ \Lambda]$ класс функций g, голоморфных в Δ^* и таких, что

$$1)\ g \in H_p^\omega[\Delta^*];\ 2)\ \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta^*} \frac{g(\zeta)\, B_\varkappa(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = 0,\ z \in \Delta^*. \tag{2.19}$$

Лемма 2.4. *Если* $\varkappa < +\infty$, *то*

$$\mathrm{sp}\{R_k\}_1^\varkappa = \mathrm{sp}\{r_k\}_1^\varkappa = H_p^\omega[\Delta^*;\ \Lambda]. \tag{2.20}$$

Доказательство. Функция $r_k(z)$ голоморфна в Δ^* и имеет порядок $O(|z|^{-1})$ при $z \to \infty$, поэтому $r_k \in H_p^\omega[\Delta^*]$. Кроме того, в точке $z = \lambda_k$ $r_k(z)$ имеет полюс порядка s_k, а $B_\varkappa(z)$— нуль порядка $\geqslant s_k$. Значит, фчнкция $r_k(z) B_\varkappa(z)$ голоморфна в Δ. Она непрерывна в $\overline{\Delta}$ и при $z \to \infty$ $(z \in \Delta)$ имеет порядок $O(|z|^{-1})$ равномерно по $\operatorname{Arg} z$. Поэтому $r_k B_\varkappa \in H_p^\infty[\Delta]$, и по теореме А

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\Delta^*}\frac{r_k(\zeta)\, B_\varkappa(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = 0, \quad z \in \Delta^*.$$

Следовательно, $r_k \in H_p^\infty[\Delta^*; \Lambda]$, так что $\operatorname{sp}\{r_k\}_1^\varkappa \subset H_p^\infty[\Delta^*; \Lambda]$. Рассуждая после этого, как при доказательстве теоремы 7 из работы [12], получим второе из равенств (2.20), после чего остается сослаться на лемму 2.3.

Следствие 2.2. *Если $\varkappa < +\infty$, то $H_p^\infty[\Delta^*; \Lambda]$ является $\varkappa$-мерным подпространством из $H_p^\infty[\Delta^*]$.*

Используя леммы 2.2 и 2.4, получаем также

Следствие 2.3. *При $\varkappa < +\infty$ система рациональных функций $\{R_k\}_1^\varkappa$ является базисом $\varkappa$-мерного линейного пространства $H_p^\infty[\Delta^*; \Lambda]$ и каждый его элемент g единственным образом представим в виде*

$$g(z) = \sum_{k=1}^{\varkappa} c_k R_k(z), \quad \text{где } c_k = c_k(g) = \int\limits_{\partial\Delta^*} g(\zeta)\, \chi_k(\zeta)\, d\zeta. \tag{2.21}$$

§ 3. Замыкание системы $\{R_k\}_1^\infty$ в $H_p^\infty[\Delta^*]$

3.1. Пусть $\Lambda = \{\lambda_k\}_1^\infty$—последовательность чисел из $\Delta = \Delta_\theta(\rho)$, а $\{R_k\}_1^\infty$—система рациональных функций, порожденная угловой областью Δ^* и этой последовательностью. Напомним, что $\{R_k\}_1^\infty \subset H_p^\infty[\Delta^*]$ (см. (2.7)), и докажем утверждение.

Теорема 3.1. *Для полноты системы $\{R_k\}_1^\infty$ в $H_p^\infty[\Delta^*]$ необходимо и достаточно условие*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1 + |\lambda_k|^{2\rho})^{-1}\, Re\,(e^{-i\theta}\lambda_k)^\rho = +\infty. \tag{3.1}$$

Доказательство. Для полноты системы $\{r_k\}_1^\infty$ в $H_p^\infty[\Delta^*]$ необходимо и достаточно условие (3.1) (см. [12], теорему 6), так что, по следствию 2.1, теорема верна.

3.2 (а) Исследуем замыкание линейной оболочки (или кратко—замыкание) системы $\{R_k\}_1^\infty$ в $H_p^\infty[\Delta^*]$ в случае ее неполноты, т. е. когда

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1 + |\lambda_k|^{2\rho})^{-1}\, Re\,(e^{-i\theta}\lambda_k)^\rho < +\infty. \tag{3.2}$$

При отображении $w = \Psi(z)$ области Δ на правую полуплоскость $\Delta(1)$:

$$w = \Psi(z) = (e^{-i\theta} z)^\rho, \quad z \in \Delta, \tag{3.3}$$

$\Lambda = \{\lambda_k\}_1^\infty$ переходит в последовательность $\beta = \{\beta_k\}_1^\infty$ чисел из полуплоскости $\Delta(1)$, где

$$\beta_k = (e^{-i\theta}\lambda_k)^\rho \quad (k = 1, 2, \cdots), \tag{3.4}$$

и в силу (3.2) для нее выполняется условие Бляшке

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1 + |\beta_k|^2)^{-1}\, Re\,\beta_k < +\infty. \tag{3.2'}$$

Поэтому в полуплоскости $\Delta(1)$ сходится произведение Бляшке (см., напр., [28]):

$$B(w;\beta)=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{w-\beta_k}{w+\bar{\beta}_k}\cdot\frac{|1-\beta_k^2|}{1-\beta_k^2}. \tag{3.5}$$

Следовательно, произведение Бляшке для угловой области Δ:

$$B(z)=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{(e^{-i\theta}z)^{\rho}-(e^{-i\theta}\lambda_k)^{\rho}}{(e^{-i\theta}z)^{\rho}+\overline{(e^{-i\theta}\lambda_k)^{\rho}}}\,\frac{|1-(e^{-i\theta}\lambda_k)^{2\rho}|}{1-(e^{-i\theta}\lambda_k)^{2\rho}}, \tag{3.6}$$

сходится в Δ, и ввиду (3.3)—(3.6)

$$B(z)=B(\Psi(z);\beta),\ z\in\Delta. \tag{3.7}$$

Более того, в силу известных свойств произведения Бляшке (см., напр., [28]), имеем

$$|B(z)|\leqslant 1\ (z\in\Delta);\ |B(\zeta)|=1\ (\zeta\in\partial\Delta \text{ п. в.});\ B^{(s_k-1)}(\lambda_k)=0\ (k=1,2,\cdots). \tag{3.8}$$

(б) При условии (3.2) обозначим через $H_p^{\omega}[\Delta^*;\Lambda]$ класс функций g, голоморфных в угловой области Δ^* и удовлетворяющих условиям:

$$1)\ g\in H_p^{\omega}[\Delta^*];\ 2)\ \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Delta^*}\frac{g(\zeta)\,B(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta=0,\ z\in\Delta^*. \tag{3.9}$$

Нетрудно проверить, что $\{r_k\}_1^{\infty}\subset H_p^{\omega}[\Delta^*;\Lambda]$, (см. [12]), и поэтому в силу следствия 2.1 имеем: при условии (3.2)

$$\{R_k\}_1^{\infty}\subset H_p^{\omega}[\Delta^*;\Lambda]. \tag{3.10}$$

Теорема 3.2. *При условии* (3.2) *замыкание системы* $\{R_k\}_1^{\infty}$ *в* $H_p^{\omega}[\Delta^*]$ *совпадает с классом* $H_p^{\omega}[\Delta^*;\Lambda]$.

Доказательство. При условии (3.2) замыкание системы $\{r_k\}_1^{\infty}$ в $H_p^{\omega}[\Delta^*]$ совпадает с $H_p^{\omega}[\Delta^*;\Lambda]$ (см. [12], теорему 7), так что по следствию 2.1 теорема верна.

Следствие 3.1. *При условии* (3.2) $H_p^{\omega}[\Delta^*;\Lambda]$ *с нормой* $\|\cdot;\partial\Delta\|_{p,\omega}$ *является замкнутым подпространством из* $H_p^{\omega}[\Delta^*]$.

(в) Исследуем свойства функций класса $H_p^{\omega}[\Delta^*;\Lambda]$.

Теорема 3.3 *При условии* (3.2) $H_p^{\omega}[\Delta^*;\Lambda]$ *совпадает с классом функций* g, *заданных на множестве* $\mathbf{C}/E$, *где* $E\subset\partial\Delta^*$ *имеет меру нуль и определяется по функции* g, *и удовлетворяющих условиям:*

1) g *голоморфна в* Δ^* *и принадлежит* $H_p^{\omega}[\Delta^*]$;

2) g *мероморфна в* Δ *и* gB *принадлежит* $H_p^{\omega}[\Delta]$;

3) *справедливы равенства*

$$\lim_{\Delta\ni z\to\zeta} g(z)=g(\zeta)=\lim_{\Delta^*\ni z\to\zeta} g(z),\ \zeta\in\partial\Delta^*\setminus E, \tag{3.11}$$

где написанные пределы понимаются в смысле некасательного стремления z *к граничной точке* ζ *изнутри областей* Δ *и* Δ^* *соответственно.*

Доказательство. Если функция g удовлетворяет условиям 1)—3), то из теоремы А сразу следует, что $g \in H_p^\infty[\Delta^*; \Lambda]$.

Обратно, пусть $g \in H_p^\infty[\Delta^*; \Lambda]$. Тогда $g \in H_p^\infty[\Delta^*]$, и поэтому существуют некасательные граничные значения

$$\lim_{\Delta^* \ni z \to \zeta} g(z) = g(\zeta), \ \zeta \in \partial\Delta^* \setminus E_1,$$

причем $E_1 \subset \partial\Delta^*$ имеет меру нуль и $g(\zeta) \in L_p^\infty[\partial\Delta^*]$ (см. теорему А). Отсюда, в силу второго из условий (3.9), на основании теоремы Б заключаем, что положив

$$g(z)\ B(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial\Delta} \frac{g(\zeta)\ B(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \ z \in \Delta,$$

будем иметь $gB \in H_p^\infty[\Delta]$. Поэтому существует предел

$$\lim_{\Delta \ni z \to \zeta} g(z) = g(\zeta), \ \zeta \in \partial\Delta^* \setminus E_2,$$

где $E_2 \subset \partial\Delta^*$ имеет меру нуль. Следовательно, можем доопределить функцию g и считать ее заданной всюду на $\mathbf{C} \setminus E$, где $E = E_1 \cup E_2$, причем ясно, что будут также выполнены условия 1)—3).

В силу доказанной теоремы функции класса $H_p^\infty[\Delta^*; \Lambda]$ допускают мероморфное „продолжение“ из области Δ^* в Δ в том смысле, что выполняются равенства (3.11). В дополнение к этому обозначим через $\overline{\Lambda}$ замыкание множества точек последовательности $\{\lambda_k\}_1^\infty$ и докажем следующее предложение.

Теорема 3.4. *При условии* (3.2) *справедливы утверждения:*

1°. *Функции класса $H_p^\infty[\Delta^*; \Lambda]$ допускают аналитическое продолжение в каждую компоненту открытого множества $\mathbf{C} \setminus \overline{\Lambda}$.*

2°. *Если последовательность $\{g_n\}_1^\infty \subset H_p^\infty[\Delta^*; \Lambda]$ сходится по норме $\|\cdot; \partial\Delta^*\|_{p,\infty}$ к функции g, то она сходится к g также равномерно на любом компакте $K \subset \mathbf{C} \setminus \overline{\Lambda}$.*

Доказательство. Произведение (3.5) равномерно сходится на любом компакте K_1, лежащем в полуплоскости $\overline{\Delta}(1): \mathrm{Re}\, w \geqslant 0$, и не пересекающемся с замыканием $\overline{\beta}$ множества точек последовательности $\{\beta_k\}_1^\infty$ (см., напр., [28], гл. 4 и 8). Значит на K_1 оно непрерывно и $\neq 0$, поэтому

$$\min\{|B(w;\ \beta)| : w \in K_1\} = C_1 > 0. \tag{3.12}$$

Для окружности $C_R(z_0)$ радиуса $R\ (0 < R < +\infty)$ с центром в точке z_0, не содержащем точек множества $\overline{\Lambda}$, положим

$$C_R^+(z_0) = C_R(z_0) \cap \overline{\Delta}, \ C_R^-(z_0) = C_R(z_0) \cap \overline{\Delta}^*.$$

Отображение (3.3) переводит $\overline{\Delta}$ в $\overline{\Delta}(1)$, при этом дуга $C_R^+(z_0)$ переходит в некоторый компакт K_1, не содержащий точек множества $\overline{\beta}$. Отсюда в силу (3.7) и (3.12) получаем оценку

$$\max\{|B(z)|^{-1} : z \in C_R^+(z_0)\} = C_2 < +\infty, \tag{3.12'}$$

где C_2 зависит только от Λ, R и z_0.

Далее, пусть Q—линейная комбинация функций системы $\{R_k\}_1^\infty$. Тогда $Q\in H_p^\infty[\Delta^*]$, $BQ\in H_p^\infty[\Delta]$, значит, по лемме 1.1, имеем

$$|Q(z)|\leqslant(\rho+1)\,\|Q;\ \partial\Delta^*\|_{p,\,\omega}\,|z|^{-(1+\omega)/p}\,\{\cos[\rho^*(\varphi-\theta^*)]\}^{-1/p}, \quad (3.13)$$

при $z\in\Delta^*$, $\varphi=\operatorname{Arg}z\ (|\varphi-\theta^*|<\pi/(2\rho^*))$;

$$Q(z)\leqslant(\rho+1)\,\|Q;\ \partial\Delta^*\|_{p,\,\omega}\,|B(z)|^{-1}\,|z|^{-(1+\omega)/p}\,\{\cos[\rho(\varphi-\theta)]\}^{-1/p}, \quad (3.13')$$

при $z\in\Delta$ и $\varphi=\operatorname{Arg}z\ (|\varphi-\theta|<\pi/(2\rho))$.

Рассмотрим замкнутый круг $\overline{U}(r;\ z_0)$ радиуса $r\,(0<r<+\infty)$ с центром в точке z_0, лежащий в $\mathbb{C}\setminus\overline{\Lambda}$, и выберем число $R>r$ таким, чтобы круг $\overline{U}(R;\ z_0)$ также лежал в $\mathbb{C}\setminus\overline{\Lambda}$. Ясно, что Q голоморфна в $\overline{U}(R;\ z_0)$ и граница $C_R(z_0)$ этого круга составлена из дуг $C_R^+(z_0)$ и $C_R^-(z_0)$. Функцию Q представим в круге $\overline{U}(r;\ z_0)$ интегралом Коши по окружности $C_R(z_0)$ и оценим ее, используя неравенства (3.12′), (3.13), (3.13′). При $z\in\overline{U}(r;\ z_0)$ будем иметь:

$$|Q(z)|\leqslant\frac{1}{2\pi}\left\{\int\limits_{C_R^+(z_0)}+\int\limits_{C_R^-(z_0)}\right\}\frac{|Q(\zeta)|}{|\zeta-z|}\,|d\zeta|<\frac{C_3}{R-r}\,\|Q;\ \partial\Delta^*\|_{p,\,\omega}, \quad (3.14)$$

где $C_3\in\mathbb{R}_+$—константа, не зависящая от z и Q.

Если $g\in H_p^\infty[\Delta^*;\ \Lambda]$, то по теореме 3.2 существует последовательность $\{Q_n\}_1^\infty$ линейных комбинаций функций системы $\{R_k\}_1^\infty$, сходящаяся к g в $H_p^\infty[\Delta^*]$. Тогда

$$\lim_{n,\ m\to+\infty}\|Q_n-Q_m;\ \partial\Delta^*\|_{p,\,\omega}=0,$$

причем в силу (3.14) для всех $n\geqslant1$ и $m\geqslant1$ имеем

$$|Q_n(z)-Q_m(z)|\leqslant\frac{C_3}{R-r}\,\|Q_n-Q_m;\ \partial\Delta^*\|_{p,\,\omega},\quad z\in\overline{U}(r;\ z_0).$$

Следовательно, последовательность $\{Q_n\}_1^\infty$ сходится равномерно в любом круге $\overline{U}(r;\ z_0)\subset\mathbb{C}\setminus\overline{\Lambda}$ и определяет аналитическое продолжение функции g на кмпонентах открытого множества $\mathbb{C}\setminus\overline{\Lambda}$. Этим утверждение 1° доказано.

С другой стороны, заменив в (3.14) Q на Q_n и устремив $n\to+\infty$, для произвольной функции $g\in H_p^\infty[\Delta^*;\ \Lambda]$ получим

$$|g(z)|<\frac{C_3}{R-r}\,\|g;\ \partial\Delta^*\|_{p,\,\omega},\quad z\in\overline{U}(r;\ z_0).$$

Поэтому для любого $n\geqslant1$ будем иметь

$$|g_n(z)-g(z)|\leqslant\frac{C_3}{R-r}\,\|g_n-g;\ \partial\Delta^*\|_{p,\,\omega},\quad z\in\overline{U}(r;\ z_0).$$

Отсюда следует утверждение 2°, Теорема доказана.

Когда последовательность $\{\lambda_k\}_1^\infty$ не имеет конечных предельных точек, функции класса $H_p^\infty[\Delta^*;\ \Lambda]$ обладают особенно наглядной структурой. Именно, справедлива непосредственно следующая из теорем 3.3 и 3.4

Теорема 3.5. *Если*

$$\lim_{k\to+\infty} \lambda_k = \infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^{-2\rho} Re\,(e^{-i\theta}\lambda_k)^{\rho} < +\infty, \tag{3.15}$$

то $H_p^{\infty}[\Delta^*; \Lambda]$ *есть класс функций* g, *мероморфных на всей комплексной плоскоси* $\mathbf{C}$ *и таких, что*

$$1)\ g \in H_p^{\infty}[\Delta^*];\ 2)\ gB \in H_p^{\infty}[\Delta]. \tag{3.16}$$

(в) Исследуем теперь особенности функций из $H_p^{\infty}[\Delta^*; \Lambda]$. Заметим сначала, что в силу теоремы 3.2 полюсы функций класса $H_p^{\infty}[\Delta^*; \Lambda]$ расположены на последовательности $\{\lambda_k\}_1^{\infty}$.

Далее, пусть $\{z_l\}_1^{\infty}$—совокупность попарно различных чисел, из которых составлена последовательность $\{\lambda_k\}_1^{\infty}$ (эта совокупность бесконечна в силу (3.2)). Обозначим через $J(z_l)$ номера членов λ_k, равных z_l (в силу (3.2) $J(z_l) < +\infty$), и докажем теорему.

Теорема 3.6. *Пусть* (3.2) *имеет место и* $g \in H_p^{\infty}[\Delta^*; \Lambda]$. *Тогда*:

1°. *Если* g *не имеет полюсов в* Δ, *то* $g \equiv 0$.

2°. *Если* g *имеет в* Δ *конечное число полюсов, расположенных в точках* $z = z_{l_j}$ $(j \in \overline{1, m})$, *то* g—*рациональная функция и*

$$g(z) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k \in J(z_{l_j})} c_k r_k(z). \tag{3.17}$$

3°. *Если* g *имеет в* Δ *бесконечное число полюсов, расположенных в точках* $z = z_{l_j}$ $(j = 1, 2, \cdots)$, *то эта функция принадлежит замыканию в* $H_p^{\infty}[\Delta^*]$ *системы*

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} \{r_k\}_{k \in J(z_{l_j})}. \tag{3.18}$$

Доказательство. 1°. Поскольку $gB \in H_p^{\infty}[\Delta]$ и g не имеет полюсов в Δ, то $g \in H_p^{\infty}[\Delta]$; кроме того, $g \in H_p^{\infty}[\Delta^*]$. По теореме А будем иметь

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta} \frac{g(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = 0, \quad z \in \Delta \cup \Delta^*,$$

так что в силу теоремы Б g—тождественно нулевая функция.

2°. Пусть $B_{(1)}$—конечное произведение Бляшке для области Δ с нулями в точках $z = \lambda_k$, $k \in \bigcup_{j=1}^{m} J(z_{l_j})$, $B_{(2)} = B/B_{(1)}$, где B—произведение (3.6). Поскольку $gB \in H_p^{\infty}[\Delta]$ и g не имеет полюсов в нулях произведения $B_{(2)}$, то $gB_{(1)} \in H_p^{\infty}[\Delta]$. Кроме того, $g \in H_p^{\infty}[\Delta^*]$. Отсюда на основании леммы 2.4 получаем (3.17).

Аналогично доказывается утверждение 3°. Только здесь нужно через $B_{(1)}$ обозначить произведение с нулями в точках $z=\lambda_k$, $k \in \bigcup_{j=1}^{\infty} \times J(z_{l_j})$, и вместо леммы 2.4 воспользоваться теоремой 3.2.

Теорема 3.7. *При условии* (3.2) *каждая функция g из класса $H_p^{\omega}[\Delta^*; \Lambda]$ аналитична вне замыкания множества своих полюсов и не имеет изолированных особенностей на $\partial\Delta^*$.*

Доказательство. В силу утверждений 1° и 2° теоремы 3.6 достаточно рассмотреть случай, когда функция g имеет в Δ бесконечное число полюсов, расположенных в точках $z = z_{l_j}$ $(j=1, 2, \cdots)$.

Обозначим через Λ_g подпоследовательность тех членов из $\{\lambda_k\}_1^{\infty}$, номера которых принадлежат множеству индексов $\bigcup_{j=1}^{\infty} J(z_{l_j})$. По теоремам 3.6 (3°) и 3.2 имеем: $g \in H_p^{\omega}[\Delta^*; \Lambda_g]$, так что в силу теоремы 3.4 (1°) функция g аналитична в $\mathbf{C} \setminus \overline{\Lambda}_g$, причем $\overline{\Lambda}_g = \overline{\{z_{l_j}\}}_{j=1}^{\infty}$. Остается заметить, что все предельные точки множества $\overline{\Lambda}_g$ лежат на $\partial\Delta^*$.

В теоремах 5.6 и 5.7, очевидно, содержится полная информация о расположении особеннностей функций класса $H_p^{\omega}[\Delta^*; \Lambda]$.

Примечания. Классы $H_2^{\mp}\{\lambda_k\} \equiv H_2^{0}[\Delta_{\pi/2}(1); \Lambda]$ были введены М. М. Джрбашяном [26, 27] в связи с вопросами выявления внутренней характеризации замыканий неполных систем рациональных дробей и обобщенных систем Мюнца-Саса. В дальнейшем, при различных предположениях относительно параметров p, ω и ρ, классы $H_p^{\omega}[\Delta^*; \Lambda]$ рассматривались в ряде работ (см. [11—13, 29—32]).

Утверждения теорем 3.4 (1°) и 3.5 для специального случая, когда $p=2$, $\omega=0$ и $\rho=1$ были установлены отличными от предложенных в данной работе способами М. М. Джрбашяном [27] и В. Х. Мусояном [32]. Следует, однако, отметить, что доказательство указанных утвеждений в [27] опиралось на возможности представления соответствующего произведения Бляшке в виде отношения двух целых функций, а в [32] существенно использовалась гильбертова структура пространства $H_2^{\mp}\{\lambda_k\}$. Поэтому предложенные в [27], [32] способы доказательства указанных утверждений неприемлемы для рассмотренного нами более общего случая.

§ 4. Разложения в ряды по системе $\{R_k\}_1^{\infty}$

Пусть, как и в предыдущем параграфе, $\Lambda = \{\lambda_k\}_1^{\infty}$ — последовательность чисел из $\Delta = \Delta_\theta(\rho)$, а $\{R_k\}_1^{\infty}$ — система рациональных функций, порожденная угловой областью $\overline{\Delta}^*$ и этой последовательностью. Наряду с $\{R_k\}_1^{\infty}$ рассмотрим систему функций $\{\chi_k\}_1^{\infty} \subset H_q^{\tilde{\omega}}[\Delta]$, которая в следующем смысле:

$$\int\limits_{\partial L} R_j(\zeta)\,\chi_m(\zeta)\,d\zeta = \delta_{jm}\ (j,\ m=1,\ 2,\cdots), \tag{4.1}$$

биортогональна с системой $\{R_k\}_1^\infty$ (см. (2.10)—(2.12)).

С каждой функцией $f\in L_p^\omega[\partial\Delta^*]$, очевидно, ассоциируется ряд

$$f\sim\sum_{k=1}^{\infty} c_k(f)\,R_k,\ c_k(f)=\int\limits_{\partial\Delta^*} f(\zeta)\,\chi_k(\zeta)\,d\zeta. \tag{4.2}$$

С целью исследования вопросов сходимости таких рядов на пространстве $L_p^\omega[\partial\Delta^*]$ определим последовательность линейных операторов $\{S_n(z;\ f)\}_1^\infty$, положив для любого $f\in L_p^\omega[\partial\Delta^*]$

$$S_n(z;\ f)=\sum_{k=1}^{n} c_k(f)\,R_k(z)\ (n=1,\ 2,\cdots), \tag{4.3}$$

и предварительно докажем следующее предложение.

Лемма 4.1. 1°. *Для любой функции $f\in L_p^\omega[\partial\Delta^*]$ имеем*

$$\|S_n(\zeta;\ f);\ \partial\Delta^*\|_{p,\,\omega}\leqslant B\|f;\ \partial\Delta^*\|_{p,\,\omega}\ (n=1,\ 2,\cdots), \tag{4.4}$$

константа $B\in\mathbf{R}_+$ зависит только от p и ω.

2°. *Если $\gamma_1,\cdots,\gamma_m$—произвольные комплексные числа и*

$$P_m(z)=\sum_{k=1}^{m}\gamma_k\,R_k(z), \tag{4.5}$$

то при значениях $p=2$ и $-1<\omega<1$ выполняются оценки

$$\sum_{k=1}^{m}|\gamma_k|^2\leqslant\rho\|P_m;\ \partial\Delta^*\|_{2,\,\omega}^2\leqslant(C/\rho)\sum_{k=1}^{m}|\gamma_k|^2, \tag{4.6}$$

константа $C\in\mathbf{R}_+$ зависит только от ω.

Доказательство. 1°. Рассмотрим функцию

$$F(x)=(ix)^{-\nu/\rho} f(e^{i\theta}(ix)^{1/\rho}),\ x\in\mathbf{R}\ \text{п. в.} \tag{4.7}$$

Легко видеть, что

$$\|F;\ \mathbf{R}\|_{p,\,0}=\rho^{1/p}\|f;\ \partial\Delta^*\|_{p,\,\omega}, \tag{4.8}$$

причем ввиду (2.1) и (2.10) справедливы равенства

$$c_k(f)=c_k^*(F),\ c_k^*(F)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(x)\,\overline{\Phi_k(x)}\,dx,\ (k=1,\ 2,\ \cdots). \tag{4.9}$$

Отсюда в силу (4.3) и (2.8) имеем

$$S_n(z;\ f)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\Delta^*}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} c_k^*(F)\,\Phi_k(\varphi(\zeta))\,(e^{-i\theta}\zeta)^\nu}{\zeta-z}\,d\zeta,\ z\in\Delta^*.$$

Следовательно, по теореме Б

$$\|S_n(\zeta;\ f);\ \partial\Delta^*\|_{p,\,\omega}\leqslant A\|\sum_{k=1}^{n} c_k^*(F)\,\Phi_k(\varphi(\zeta))\,(e^{-i\theta}\zeta)^\nu;\ \partial\Delta^*\|_{p,\,\omega},$$

константа $A \in \mathbf{R}_+$ зависит только от p и ω. Однако,

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} c_k^*(F)\, \Phi_k(\varphi(\zeta))\, (e^{-i\theta}\zeta)^*;\ \partial\Delta^* \right\|_{p,\,\omega} =$$

$$= \rho^{-1/p} \left\| \sum_{k=1}^{n} c_k^*(F)\, \Phi_k(x);\ \mathbf{R} \right\|_{p,\,0},$$

и поэтому, если обозначим

$$S_n^*(w;\ F) = \sum_{k=1}^{n} c_k^*(F)\, \Phi_k(w)\ (n = 1,\ 2, \cdots), \tag{4.10}$$

то при всех $n \geqslant 1$ будем иметь

$$\| S_n(\zeta;\ f);\ \partial\Delta^* \|_{p,\,\omega} \leqslant A\, \rho^{-1/p} \| S_n^*(x;\ F);\ \mathbf{R} \|_{p,\,0}. \tag{4.11}$$

Воспользуемся формулой представления ядра Коши (см. теорему В): для любых значений w и ζ и для любого $n \geqslant 1$

$$\frac{1}{2\pi i(\bar{\zeta} - w)} = \sum_{k=1}^{n} \overline{\Phi_k(\zeta)}\, \Phi_k(w) + \frac{\overline{B_n(\zeta)}\, B_n(w)}{2\pi i(\bar{\zeta} - w)} \tag{4.12}$$

$$\left(B_n(w) = \prod_{k=1}^{n} (w - \mu_k)/(w - \bar{\mu}_k) \right).$$

Положим в этом представлении $\zeta = x$, умножим обе его части на $F(x)$ и проинтегрируем; ввиду (4.9) и (4.10) при $\operatorname{Im} w > 0$ получим

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(x)}{x - w}\, dx = S_n^*(w;\ F) + \frac{B_n(w)}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(x)}{B_n(x)}\, \frac{dx}{x - w}.$$

Тогда, по теореме Б, справедливы оценки

$$\| S_n^*(x;\ F);\ \mathbf{R} \|_{p,\,0} \leqslant A_1 \| F;\ \mathbf{R} \|_{p,\,0}\ (n = 1,\ 2, \cdots), \tag{4.13}$$

константа $A_1 \in \mathbf{R}_+$ зависит только от p. Отсюда на основании (4.11) и (4.8) приходим к оценкам (4.4) с константой $B = A A_1$.

2°. Заметим, что полагая $\gamma_{m+1} = \cdots = \gamma_n = 0$ при $n > m$, можем написать

$$P_m(z) = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k R_k(z)\ (n \geqslant m),$$

причем в силу (4.1)

$$\gamma_k = \int_{\partial\Delta^*} P_m(\zeta)\, \chi_k(\zeta)\, d\zeta\ \ (k \in \overline{1,\ n}).$$

Поэтому

$$S_n(z;\ P_m) = P_m(z)\ (n \geqslant m). \tag{4.14}$$

С другой стороны, поскольку $\{\Phi_k\}_1^\infty$—ортонормированная в $L_2[\mathbf{R}]$ система (см. (2.4)), то из (4.8) и (4.9) по неравенству Бесселя будем иметь

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k(f)|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |c_k^*(F)|^2 \leqslant \| F;\ \mathbf{R} \|_{2,\,0}^2 = \rho \| f;\ \partial\Delta^* \|_{2,\,\omega}^2, \tag{4.15}$$

для любого $f \in L_2^{\omega}[\partial\Delta^*]$; в частности

$$\sum_{k=1}^{m} |\gamma_k|^2 \leqslant \rho \| P_m;\ \partial\Delta^* \|_{2,\omega}^2. \qquad (4.16)$$

Далее, по равенству Парсеваля из (4.10) имеем

$$\| S_n^*(x;\ F);\ \mathbf{R} \|_{2,0}^2 = \sum_{k=1}^{n} |c_k^*(F)|^2 \ (n = 1,\ 2, \cdots),$$

поэтому в силу (4.11) и (4.9) для любого $f \in L_2^{\omega}[\partial\Delta^*]$

$$\| S_n(\zeta;\ f);\ \partial\Delta^* \|_{2,\omega}^2 \leqslant (A^2/\rho) \sum_{k=1}^{n} |c_k(f)|^2 \ (n = 1,\ 2, \cdots),$$

константа $A \in \mathbf{R}_+$ зависит только от ω. В частности, ввиду (4.14)

$$\| P_m;\ \partial\Delta^* \|_{2,\omega}^2 \leqslant (A^2/\rho) \sum_{k=1}^{m} |\gamma_k|^2,$$

и учитывая также (4.16), получим (4.6).

Теорема 4.1 *Если последовательность* $\Lambda = \{\lambda_k\}_1^{\infty}$ *удовлетворяет условию* (3.1):

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1 + |\lambda_k|^{2\rho})^{-1} \operatorname{Re}(e^{-i\theta} \lambda_k)^{\rho} = +\infty,$$

то система $\{R_k\}_1^{\infty}$ *является базисом пространства* $H_p^{\omega}[\Delta^*]$ *и любая функция* $f \in H_p^{\omega}[\Delta^*]$ *разлагается в ряд*

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(f) R_k(z),\ c_k(f) = \int_{\partial\Delta^*} f(\zeta) \chi_k(\zeta)\, d\zeta, \qquad (4.17)$$

сходящийся к f *по норме* $\| \cdot;\ \partial\Delta^* \|_{p,\omega}$, *а также равномерно на любом компакте* $K \subset \Delta^*$.

Доказательство. В силу леммы 4.1 (1°) и теоремы 3.1 из теоремы Г следует, что $\{R_k\}_1^{\infty}$ — базис $H_p^{\omega}[\Delta^*]$, так что в силу (4.1) f разлагается в ряд (4.17), сходящийся в $H_p^{\omega}[\Delta^*]$. Остается использовать следствие 1.1.

Аналогично, с использованием теорем 3.2 и 3.4 доказывается

Теорема 4.2 *Если последовательность* $\Lambda = \{\lambda_k\}_1^{\infty}$ *удовлетворяет условию* (3.2):

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1 + |\lambda_k|^{2\rho})^{-1} \operatorname{Re}(e^{-i\theta} \lambda_k)^{\rho} < +\infty,$$

то система $\{R_k\}_1^{\infty}$ *является базисом пространства* $H_p^{\omega}[\Delta^*;\ \Lambda]$ *и любая функция* $g \in H_p^{\omega}[\Delta^*;\ \Lambda]$ *разлагается в ряд*

$$g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(g) R_k(z),\ c_k(g) = \int_{\partial\Delta^*} g(\zeta) \chi_k(\zeta)\, d\zeta, \qquad (4.18)$$

сходящийся к g *по норме* $\| \cdot;\ \partial\Delta^* \|_{p,\omega}$, *а также равномерно на любом компакте* $K \subset \mathbf{C} \setminus \overline{\Lambda}$.

Заметим теперь, что при значениях $-1<\omega<1$, $L_2^{\omega}[\partial\Delta^*]$, $H_2^{\omega}[\Delta^*]$ и при условии (3.2)— $H_2^{\omega}[\Delta^*;\ \Lambda]$—гильбертовы пространства со скалярным произведением

$$(f, g)=\int\limits_{\partial\Delta^*} f(\zeta)\,\overline{g(\zeta)}\,|\zeta|^{\omega}\,|d\zeta|.$$

Теорема 4.3. *При условии* (3.1) *система* $\{R_k\}_1^{\infty}$ *является базисом Рисса гильбертова пространства* $H_2^{\omega}[\Delta^*]$ $(-1<\omega<1)$, *и любая функция* $f\in H_2^{\omega}[\Delta^*]$ *разлагается в ряд* (4.17), *безусловно сходящийся к* f *по норме* $\|\cdot;\ \partial\Delta^*\|_{2,\omega}$, *а также равномерно и абсолютно на любом компакте* $K\subset\Delta^*$.

Доказательство. В силу леммы 4.1 (2°) и теоремы 3.1, на основании теоремы Д получаем, что система $\{R_k\}_1^{\infty}$ является базисом Рисса, а значит, и безусловным базисом пространства $H_2^{\omega}[\Delta^*]$. Поэтому ряд (4.17) при любой перестановке сходится к f по норме $\|\cdot;\ \partial\Delta^*\|_{2,\omega}$, а также равномерно на любом компакте $K\subset\Delta^*$ (см. следствие 1.1). Из безусловной сходимости ряда вытекает ее абсолютная сходимость.

Аналогично доказывается

Теорема 4.4. *При условии* (3.2) *система* $\{R_k\}_1^{\infty}$ *является базисом Рисса гильбертова пространства* $H_2^{\omega}[\Delta^*;\ \Lambda]$ $(-1<\omega<1)$ *и любая функция* $g\in H_2^{\omega}[\Delta^*;\ \Lambda]$ *разлагается в ряд* (4.18), *безусловно сходящийся к* g *по норме* $\|\cdot;\ \partial\Delta^*\|_{2,\omega}$, *а также равномерно и абсолютно на любом компакте* $K\subset C\setminus\overline{\Lambda}$.

В заключение отметим, что результаты данной работы и работ автора [11], [12], [30] распространяются на случай макенхауптовых весов общего вида.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 28. II. 1986

Վ. Մ. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ. Ռացիոնալ ֆունկցիաների որոշ համակարգերի փակույթի ու բազիսության մասին (*ամփոփում*)

Աշխատանքում կառուցվել են ռացիոնալ ֆունկցիաների համակարգեր, որոնք բազիս են իրենց փակույթներում: Մոտավորությունը իրականացվում է անկյունային տիրույթներում Հարդիի դասի տիպի դասերում: Բերվել է այդ համակարգերի լրիվության հայտանիշը, իսկ նրանց ոչ լրիվ լինելու դեպքում տրվել է փակույթների բնութագրումը:

V. M. MARTIROSIAN. *On the closure and basisity of certain systems of rational functions* (summary)

In the paper systems of rational functions are constructed which form basis in their closures. The approximation is in Hardy type spaces in angular domains.

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. М. Джрбашян.* О разложимости аналитических функций в ряд по рациональным функциям с заданным множеством полюсов, Изв. АН Арм.ССР, серия физ.-мат. наук, 1957, 10, 21—29.
2. *М. М. Джрбашян.* Разложение по системам рациональных функций с фиксированными полюсами, ДАН СССР, 1962, 143, 17—20.

3. *М. М. Джрбашян.* Разложения по системам рациональных функций с фиксированными полюсами, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», 1967, 2, 3—51.
4. *Г. Ц. Тумаркин.* Разложение аналитических функций в ряд по рациональным дробям с заданным множеством полюсов, Изв. АН Арм.ССР, серия физ.-мат. наук, 1961, 14, 9—31.
5. *Г. С. Кочарян.* Об одном обобщении рядов Лорана и Фурье, Изв. АН Арм.ССР, серия физ.-мат. наук, 1958, 11, 3—14.
6. *Г. С. Кочарян.* О приближении рациональными функциями в комплексной области, Изв. АН Арм.ССР, серия физ.-мат. наук, 1958, 11, 53—77.
7. *А. М. Лукацкий.* Разложения в ряды по системе рациональных функций. Матем. сб., 1973, 90, 544—557.
8. *А. М. Лукацкий.* О разложении в ряды по системе рациональных функций М. М. Джрбашяна, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», 1973, 8, 102—122.
9. *А. М. Лукацкий.* О системе рациональных функций М. М. Джрбашяна для произвольного континуума, Сиб. матем. ж., 1974, 15, 208—221.
10. *П. К. Суетин.* Ряды по многочленам Фабера, М., «Наука», 1984, 336 с.
11. *В. М. Мартиросян.* Базисность некоторых систем аналитических функций и решение интерполяционной задачи в области угла, ДАН Арм.ССР, 1976, 63, 278—283.
12. *В. М. Мартиросян.* Замыкание и базисность некоторых биортогональных систем и решение кратной интерполяционной задачи в угловых областях, ДАН СССР, 1979, 245, 24—27; Изв. АН Арм.ССР, «Математика», 1978, 13, 490—531.
13. *Ш. А. Григорян.* О базисности неполных систем рациональных функций в угловой области, Изв. АН Арм.ССР, «Матемаика», 1978, 13, 460—489.
14. *М. М. Джрбашян.* Биортогональные системы рациональных функций и представления ядра Коши, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», 1973, 8, 384—409.
15. *М. М. Джрбашян.* Об интегральном представлении функций, непрерывных на нескольких лучах (Обобщение интеграла Фурье), Изв. АН СССР, сер. матем., 1954, 19, 427—448.
16. *М. М. Джрбашян.* Об одном новом интегральном преобразовании и его применения в теории целых функций, ДАН СССР, 1954, 95, 1133—1136; Изв. АН СССР, сер. матем., 1955, 19, 133—180.
17. *М. М. Джрбашян.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, М., «Наука», 1966, 671 с.
18. *М. М. Джрбашян, А. Е. Аветисян.* Интегральные представления некоторых классов функций, аналитических в области угла, ДАН СССР, 1958, 120, 457—460; Сиб. матем. ж., 1960, 1, 383—426.
19. *Е. Титчмарш.* Введение в теорию интеграла Фурье, М.—Л., Гостехиздат, 1948, 479 с.
20. *М. М. Джрбашян.* Представление и замкнутость некоторых ортогональных систем, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», 1979, 14, 446—493.
21. *М. М. Джрбашян.* Биортогональные системы рациональных функций и наилучшее приближение ядра Коши на вещественной оси, Матем. сб., 1974, 95 (137), 418—444.
22. *Б. С. Кашин, А. А. Саакян.* Ортогональные ряды, М., «Наука», 1984, 495 с.
23. *Н. К. Бари.* О базисах в гильбертовом пространстве, ДАН СССР, 1946, 54, 383—386.
24. *Н. К. Бари.* Биортогональные системы и базисы в гильбертовом пространстве, Уч. зап. МГУ, 1951, 4, вып. 148, 69—107.
25. *И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов, М., «Наука», 1965, 448 с.
26. *М. М. Джрбашян.* О пополнении и замыкании неполной системы функций $\{e^{-\nu_k x} x^{s_k-1}\}_1^\infty$ ДАН СССР, 1961, 14, 539—542.
27. *М. М. Джрбашян.* Характеристика замкнутых линейных оболочек двух семейств неполных систем аналитических функций, Матем. сб., 1981, 114 (156), 3—84.
28. *К. Горфман.* Банаховы пространства аналитических функций, М., ИИЛ, 1963, 311 с.

29. *С. А. Акопян, И. О. Хачатрян*. О замыкании незамкнутых систем функций типа Миттаг—Леффлера, Изв. АН СССР, сер. матем., 1976, 40, 96—116.
30. *В. М. Мартиросян*. О замкнутости систем функций типа Миттаг—Леффлера и систем простейших рациональных дробей, ДАН АрмССР, 1976, 62, 269—274.
31. *М. М. Джрбашян*. Базисность некоторых биортогональных систем и решение кратной интерполяционной задачи в классах H_p в полуплоскости, ДАН СССР, 1977, 234, 517—520; Изв. АН ССР, сер. матем., 1978, 42, 1322—1384.
32. *В. Х. Мусоян*. Суммирование биортогнальных разложений по неполным системам экспонент и рациональных функций, Изв. АН АрмССР, Математика, 1986, 21, 163—186.