ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XXII, № 6, 1987 Математика

УДК 517.53

М. М. ДЖРБАШЯН

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ В КОМПЛЕКСНОЙ ОБЛАСТИ

В работах автора [1], [2], [3] содержались построения весовых базисных систем в смысле Рисса для пространства $L_2(0, \sigma)$ вектор-функций с числом компонент $n = 1, 3, 4$.

В работе [1] был развит метод построения базисной системы в случае пространства $L_2(0,\sigma)$ вектор-функций с числом компонент $n = 4$. При этом, лишь в заключении этой статьи устанавливался важнейший факт — что эти системы могут быть порождены путем постановки и решения особой краевой задачи на кресте типа

$$e_+\{\sigma\} = \{z = re^{i\frac{\pi}{2}k} : 0 \leqslant r \leqslant \sqrt{\sigma};\ k = -1, 0, 1, 2\}$$

в комплексной плоскости.

В работе [3] давалось построение базисов Рисса для случая вектор-функций из $L_2(0, \sigma)$ с числом компонент $n = 3$. Однако, вопрос об их связи с краевой задачей в комплексной области оставался вне рассмотрения.

В настоящей статье на первый план выдвигается задача типа Коши в комплексной области (§ 1) и две неординарные краевые задачи (§ 2) для особого рода дифференциальных операторов дробного порядка. Эти задачи порождают системы собственных чисел $\{\lambda_k\}_0^\infty$, а также системы собственных функций $\{E_{3/2}(\lambda_n z, \mu)\, z^{\frac{3}{2}\mu-1}\}_0^\infty$ на конфигурации типа

$$\Pi(\sigma) = \{z = re^{i\frac{2\pi}{3}j} : 0 \leqslant r \leqslant \sigma^{2/3};\ j = -1, 0, 1\}.$$

На основе некоторых ранних результатов автора (§ 2, теорема 1) проводится доказательство полноты систем собственных функций этих задач в классе функций $X(z)$ $(z \in \Pi(\sigma))$, подчиненных условию

$$\int_{\Pi(\sigma)} |X(z)|^2 |z|^{-1/2} |dz| < +\infty.$$

Задача о базисности найденных систем собственных функций будет предметом отдельной статьи.

§ 1. Задача типа Коши

1.1. Приведем сначала определение и основные свойства интегродифференциальных операторов Римана-Лиувилля, необходимые в последующем изложении. Эти свойства более полно и с доказательствами приведены в монографии автора ([4], гл. IX, § 1).

(а) 1°. Интегралом порядка α $(0<\alpha<+\infty)$ от функции $f(x)\in L(0,\ l)$ $(0<l<+\infty)$ с началом в точке $x=0$ принято называть функцию

$$D^{-\alpha}f(x)\equiv\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x(x-t)^{\alpha-1}f(t)\,dt,\ x\in(0,\ l]. \tag{1.1}$$

При этом будем иметь также $D^{-\alpha}f(x)\in L(0,\ l)$.

2°. В каждой точке Лебега функции $f(x)\in L(0,\ l)$, и значит, почти всюду на $(0,\ l)$

$$\lim_{\alpha\to+0}D^{-\alpha}f(x)=f(x).$$

Поэтому естественно положить

$$D^{-0}f(x)\equiv f(x),\ x\in(0,\ l). \tag{1.1'}$$

3°. Если числа α_k $(0<\alpha_k<+\infty,\ k=1,\ 2)$ произвольны, то для любой функции $f(x)\in L(0,\ l)$ почти всюду на $(0,\ l)$

$$D^{-\alpha_1}\{D^{-\alpha_1}f(x)\}=D^{-\alpha_1}\{D^{-\alpha_2}f(x)\}=D^{-(\alpha_1+\alpha_2)}f(x). \tag{1.2}$$

(б) Пусть число α $(0<\alpha<+\infty)$ задано, а целое число $p\geqslant 1$ определяется из условия $p-1<\alpha\leqslant p$.

Если $f(x)\in L(0,\ l)$ и функция

$$\frac{d^{p-1}}{dx^{p-1}}\{D^{-(p-\alpha)}f(x)\}$$

почти всюду на $(0,\ l)$ имеет производную, то функцию

$$D^{\alpha}f(x)\equiv\frac{d^p}{dx^p}\{D^{-(p-\alpha)}f(x)\},\ x\in(0,\ l) \tag{1.3}$$

принято называть производной порядка α от $f(x)$ с началом в точке $x=0$.

Ввиду (1.1'), при $\alpha=p\geqslant 1$ целом будем иметь

$$D^pf(x)=f^{(p)}(x).$$

Из определения (1.3), в силу (1.1'), в частности следует: если $0\leqslant\alpha\leqslant 1$, то почти для всех $x\in(0,\ l)$

$$D^{\alpha}f(x)=\frac{d}{dx}\{D^{-(1-\alpha)}f(x)\}. \tag{1.3'}$$

Из определений (1.1) и (1.3) следует формула

$$D^{\alpha}\left\{\frac{x^{\gamma}}{\Gamma(1+\gamma)}\right\}=\frac{x^{\gamma-\alpha}}{\Gamma(1+\gamma-\alpha)}\ (-1<\gamma<+\infty,\ -\infty<\alpha<+\infty). \tag{1.4}$$

В заключение приведем еще три свойства операторов Римана-Лиувилля.

4°. Пусть $f(x)\in L(0,\ l)$, тогда почти всюду на $(0,\ l)$

$$1)\ D^{\alpha}D^{-\beta}f(x)=D^{-(\beta-\alpha)}f(x)\ (\beta\geqslant\alpha\geqslant 0), \tag{1.5}$$

$$2)\ D^{\alpha}D^{-\beta}f(x)=D^{\alpha-\beta}f(x)\ (\alpha\geqslant\beta\geqslant 0), \tag{1.6}$$

если правая часть существует почти всюду на $(0, l)$.

3) При $0 \leqslant \alpha < +\infty$ и $0 < \beta \leqslant 1$

$$D^{-\alpha} D^{\beta} f(x) = D^{\beta-\alpha} f(x) - [D^{-(1-\beta)} f(t)]\Big|_{t=0} \times \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}. \qquad (1.7)$$

(в) Наконец, отметим, что определения и свойства операторов $D^{-\alpha}$ и D^{α} могут быть распространены на функции комплексной переменной. Для этого предположим, что функция $f(z)$ определена на римановой поверхности G^{∞} функции $\operatorname{Ln} z$, или более общо, в области $G \subseteq G^{\infty}$, звездообразной относительно точки ветвления $z = 0$ указанной поверхности.

Если на данном интервале $(0, z_0) \subset G \subseteq G^{\infty}$, соединяющем точки $z = 0$ и $z_0 \in G$, функция $f(z)$ удовлетворяет надлежащим условиям, то для любой точки $z \in (0, z_0)$ оператор $D^{-\alpha} f(z)$ $(-\infty < \alpha < +\infty)$ может быть определен способом, вполне аналогичным приведенному выше.

Например, вместо формул (1.1) и (1.3) будем иметь

$$D^{-\alpha} f(z) \equiv \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^z (z-\zeta)^{\alpha-1} f(\zeta)\, d\zeta, \quad 0 < \alpha < +\infty,$$

$$D^{\alpha} f(z) \equiv \frac{d^p}{dz^p} [D^{-(\alpha-p)} f(z)], \quad p-1 < \alpha \leqslant p, \quad p \geqslant 1. \qquad (1.8)$$

При этом, разумеется, что свойства 1°—4° интегродифференциального оператора останутся в силе.

1.2. Перейдем теперь к постановке и решению задач типа Коши на поверхности G^{∞} для одного модельного интегродифференциального уравнения дробного порядка.

(а) На поверхности G^{∞} введем в рассмотрение функцию

$$e_{\mu}(z, \lambda) = E_{3/2}(\lambda z^{2/3}, \mu)\, z^{\mu-1}, \quad \mu \in (0, +\infty), \qquad (1.9)$$

понимая под $z^{2/3}$ и $z^{\mu-1}$ их главные ветви.

Лемма 1.1 *Функция* $e_{\mu}(z, \lambda)$ *удовлетворяет уравнению*

$$D^{2/3} e_{\mu}(z, \lambda) = \frac{z^{\mu-5/3}}{\Gamma(\mu - 2/3)} + \lambda e_{\mu}(z, \lambda), \quad z \in G^{\infty} \qquad (1.10)$$

и начальному условию

$$D^{-(1-\mu)} e_{\mu}(z, \lambda)|_{z=0} = 1. \qquad (1.11)$$

Доказательство. Из разложения

$$e_{\mu}(z, \lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \frac{z^{\frac{2k}{3}+\mu-1}}{\Gamma\left(\mu + \frac{2k}{3}\right)}, \qquad (1.12)$$

пользуясь формулой (1.4) для значения $\alpha = 2/3$, получим

$$D^{2/3} e_\mu(z, \lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k D^{2/3} \left| \frac{z^{\frac{2k}{3}+\mu-1}}{\Gamma\left(\mu + \frac{2k}{3}\right)} \right| =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \frac{z^{\frac{2(k+1)}{3}+\mu-1}}{\Gamma\left(\mu + \frac{2(k-1)}{3}\right)} = \frac{z^{\mu-5/3}}{\Gamma(\mu - 2/3)} + \lambda \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \frac{z^{\frac{2k}{3}+\mu-1}}{\Gamma\left(\mu + \frac{2k}{3}\right)}.$$

Отсюда, ввиду разложения (1.12), следует формула (1.10) леммы.

Далее, вновь пользуясь формулой (1.4), но для значения $\alpha = \mu - 1$, будем иметь

$$D^{-(1-\mu)} e_\mu(z, \lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k D^{\mu-1} \left| \frac{z^{\frac{2k}{3}+\mu-1}}{\Gamma\left(\mu + \frac{2k}{3}\right)} \right| =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k z^{\frac{2k}{3}}}{\Gamma\left(1 + \frac{2k}{3}\right)} = E_{3/2}(\lambda z^{2/3}, 1).$$

Отсюда будет следовать справедливость начального условия (1.11), так как $E_{3/2}(0, 1) = 1$.

(б) Наложив на параметр μ дополнительное ограничение, а именно, полагая всюду ниже, что

$$2/3 \leqslant \mu \leqslant 1, \tag{1.13}$$

покажем, что для оператора

$$L_\mu e(z) \equiv D^{1/3} e(z) - \frac{z^{\mu-5/3}}{\Gamma(\mu - 2/3)} \tag{1.14}$$

на определенных классах функций $e(z)$ имеет место представление

$$L_\mu e(z) = D^{-(\mu-2/3)} D^\mu e(z). \tag{1.14'}$$

Лемма 1.2. *При условии* (1.13) *функция* $e_\mu(z, \lambda)$ *является также решением следующей однородной задачи типа Коши:*

$$\begin{gathered} L_\mu e(z) = \lambda e(z), \quad z \in G^\infty, \\ D^{-(1-\mu)} e(z)|_{z=0} = 1. \end{gathered} \tag{1.15}$$

Доказательство. Применив формулу (1.7) для значений $\alpha = \mu - 2/3 \geqslant 0$ и $\beta = \mu \leqslant 1$, в силу (1.11) и (1.10), получим

$$D^{-(\mu-2/3)} D^\mu e_\mu(z, \lambda) =$$

$$= D^{2/3} e_\mu(z, \lambda) - \{D^{-(1-\mu)} e_\mu(z, \lambda)\}\Big|_{z=0} \frac{z^{\mu-5/3}}{\Gamma(\mu - 2/3)} =$$

$$= D^{2/3} e_\mu(z, \lambda) - \frac{z^{\mu-5/3}}{\Gamma(\mu - 2/3)} = \lambda e_\mu(z, \lambda).$$

(в) Обозначим через $L_2(G^\infty)$ множество функций Φ, измеримых на любом интервале вида $(0, z_0)$, $z_0 \in G^\infty$, для которых конечна величина

$$\int_{(0,\, z_0)} |\Phi(z)|^2 \, |dz|.$$

В заключение данного пункта докажем следующую теорему единственности.

Теорема 1.1. *Если* $2/3 \leqslant \mu \leqslant 1$, *то обе задачи типа Коши* (1.10)—(1.11) *и* (1.14)—(1.15) *в классе* $L_2(G^\infty)$ *имеют единственное решение*

$$e^*(z) \equiv e_\mu(z, \lambda) = E_{3/2}(\lambda z^{2/3}, \mu) z^{\mu-1}.$$

Доказательство. Согласно леммам 1.1 и 1.2, функции $e_\mu(z, \lambda)$ являются решением обеих вышеприведенных задач Коши. При этом они из класса $L_2(G^\infty)$ для любого $\mu > 1/2$, и значит, для $2/3 < \mu = 1$. Поэтому, если $e^{(1)}(z)$ и $e^{(2)}(z)$ суть, соответственно, другие решения задач (1.10)—(1.11) и (1.14)—(1.15) из того же класса $L_2(G^\infty)$, то положив

$$\Phi^{(i)}(z) = e^{(i)}(z) - e_\mu(z, \lambda) \quad (i = 1, 2),$$

приходим к решениям задачи

$$L_\mu \Phi(z) = \lambda \Phi(z), \qquad D^{-(1-\mu)} \Phi(z)|_{z=0} = 0 \tag{1.17}$$

в классе $L_2(G^\infty)$.

Следовательно, для доказательства теоремы достаточно установить, что в классе $L_2(G^\infty)$ решение задачи (1.17) может быть только тривиальным, т. е., что $\Phi(z) \equiv 0$, $z \in G^\infty$.

Пользуясь свойством (1.7) при $\alpha = \mu - 2/3$ и $\beta = \mu$, в силу начального условия (1.17), получим

$$L_\mu \Phi(z) = D^{-(\mu-2/3)} D^\mu \Phi(z) =$$

$$= D^{2/3} \Phi(z) - \{D^{-(1-\mu)} \Phi(z)\}|_{z=0} \frac{z^{\mu-5/3}}{\Gamma(\mu - 2/3)} = D^{2/3} \Phi(z) = \lambda \Phi(z), \; z \in G^\infty.$$

Напишем полученную формулу в виде

$$\frac{d}{dz} D^{-1/3} \Phi(z) = \lambda \Phi(z)$$

и проинтегрируем ее по z. Тогда почти для всех $z \in G^\infty$ будем иметь

$$D^{-1/3} \Phi(z) - \{D^{-1/3} \Phi(z)\}|_{z=0} = \lambda \int_0^z \Phi(\zeta) \, d\zeta, \tag{1.18}$$

причем интеграл справа является непрерывной функцией на G^∞.

Из равенства (1.18) следует, что $\{D^{-1/3} \Phi(z)\}|_{z=0} = C_0 \neq \infty$, поскольку как интеграл порядка 1/3 функция $D^{-1/3} \Phi(z)$ почти во всех

точках $z \in G^{\infty}$ конечна и, таким образом, эта функция также непрерывна всюду на G^{∞}.

Применим теперь к обеим частям равенства (1.18) оператор $D^{-2/3}$. Тогда, в силу свойств (1.2) и (1.4), получим

$$D^{-1}\Phi(z) = C_0 D^{-2/3}\left\{\frac{z^0}{\Gamma(1+0)}\right\} + \lambda D^{-5/3}\Phi(z) =$$

$$= C_0 \frac{z^{2/3}}{\Gamma(1+2/3)} + \lambda D^{-5/3}\Phi(z), \quad z \in G^{\infty}.$$

Дифференцируя это равенство по z, т. е. применив к обеим его частям оператор D^1, получим

$$\Phi(z) = C_0 \frac{z^{-1/3}}{\Gamma(2/3)} + \lambda D^{-2/3}\Phi(z), \; z \in G^{\infty}. \tag{1.19}$$

Если же к равенству (1.18) применить оператор $D^{-2/3}$, то получим

$$D^{-2/3}\Phi(z) = C_0 D^{-1/3}\left\{\frac{z^0}{\Gamma(1+0)}\right\} + \lambda D^{-1/3}\Phi(z) =$$

$$= C_0 \frac{z^{1/3}}{\Gamma(4/3)} + \lambda D^{-4/3}\Phi(z), \; z \in G^{\infty}. \tag{1.20}$$

Наконец, из (1.19) и (1.20) следует представление

$$\Phi(z) = C_0 \frac{z^{1/3}}{\Gamma(2/3)} + \lambda C_0 \frac{z^{2/3}}{\Gamma(4/3)} + \lambda^2 D^{-2}\Phi(z), \; z \in G^{\infty}. \tag{1.21}$$

Отсюда, во-первых, следует, что функция $\Phi(z)$ непрерывна на всей поверхности G^{∞}, за исключением, быть может, точки $z = 0$.

Во-вторых, применив к равенству (1.21) оператор $D^{-(1-\mu)}$ $(2/3 \leqslant \mu \leqslant 1)$, получим

$$D^{-(1-\mu)}\Phi(z) = C_0 \frac{z^{2/3-\mu}}{\Gamma(5/3-\mu)} + \lambda C_0 \frac{z^{4/3-\mu}}{\Gamma(7/3-\mu)} +$$

$$+ \lambda^2 D^{-(3-\mu)}\Phi(z), \; z \in G^{\infty}. \tag{1.22}$$

При этом, легко видеть, что

$$|D^{-(3-\mu)}\Phi(z)| \leqslant \frac{1}{\Gamma(3-\mu)} \int_0^z |z-\zeta|^{2-\mu} |\Phi(\zeta)| |d\zeta|.$$

Отметим теперь, что при $z \to 0$, в силу начального условия (1.17), имеем $D^{-(1-\mu)}\Phi(z) \to 0$, и как легко видеть, также $D^{-(3-\mu)}\Phi(z) \to 0$. Итак, переходом к пределу $z \to 0$ в (1.22) заключаем, что предположение $C_0 \neq 0$ приводит к противоречию.

Итак, $C_0 = 0$ и равенства (1.20) — (1.21) принимают вид

$$\Phi(z) = \lambda D^{-2/3}\Phi(z) = \lambda^2 D^{-2}\Phi(z), \; z \in G^{\infty}. \tag{1.23}$$

Умножим (1.23) на λ^{-2} и устремим $\lambda \to \infty$. Тогда будем иметь равенство

$$D^{-2}\Phi(z)=\frac{1}{\Gamma(2)}\int_0^z(z-\zeta)\,\Phi(\zeta)\,d\zeta=0,\quad z\in G^\infty,$$

двукратным дифференцированием которого по z получим

$$D^{-1}\Phi(z)=\int_0^z\Phi(\zeta)\,d\zeta\equiv 0,\ \text{т. е. }\Phi(z)\equiv 0,\ z\in G^\infty.$$

Теорема полностью доказана.

1.3 (а) Наряду с оператором Римана-Лиувилля на поверхности G^∞, или же в областях $G\subseteq G^\infty$, звездообразных относительно точки $\{0\}\in G$, на надлежащих классах аналитических функций $\Phi(z)$ определим оператор

$$I_{3/2}^{-\alpha}\Phi(z)\equiv I^{-\alpha}\Phi(z)=\frac{3}{2\Gamma(\alpha)}\int_0^z(z^{3/2}-\zeta^{3/2})^{\alpha-1}\Phi(\zeta)\,d\zeta,\quad z\in G^\infty. \qquad (1\,24)$$

Как и раньше мы полагаем, что $\alpha\in(0,+\infty)$—любое, функция $\Phi(z)$ определена на G^∞ или на $G\subseteq G^\infty$, и интегрирование производится по интервалу $(0,\ z)\subset G$.

Из определения (1.24), после замен переменных $z=w^{2/3}$ и $\zeta=\omega^{2/3}$ непосредственно получим

$$]I^{-\alpha}\Phi(z)]\big|_{z=w^{2/3}}=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^w(w-\omega)^{\alpha-1}\Phi(\omega^{2/3})\,\omega^{-1/3}\,d\omega,$$

и, тем самым, справедлива формула

$$[I^{-\alpha}\Phi(z)]\big|_{z=w^{2/3}}\equiv D^{-\alpha}[\Phi(w^{2/3})\,w^{-1/3}],\ w\in G^\infty, \qquad (1.25)$$

позволяющая выразить оператор $I^{-\alpha}$ посредством оператора $D^{-\alpha}$ Римана—Лиувилля.

Как легко убедиться, обращением (1.25) является формула

$$[D^{-\alpha}\Psi(w)]\big|_{w=z^{3/2}}\equiv I^{-\alpha}[\Psi(z^{3/2})\,z^{1/2}],\ z\in G^\infty. \qquad (1.25')$$

Отсюда, в силу свойства 2° операторов Римана-Лиувилля, получим

$$I^{0}\Phi(z)=z^{-1/2}\,\Phi(z),\qquad z\in G^\infty. \qquad (1.25'')$$

$$I^{-1}\Phi(z)=\frac{3}{2}\int_0^z\Phi(\zeta)\,d\zeta,$$

Путем замены переменной интегрирования $\zeta=z\tau^{2/3}$ в формуле (1.24) для оператора $I^{-\alpha}$ приходим также к представлению

$$I^{-\alpha}\Phi(z)=\frac{z^{\frac{3\alpha-1}{2}}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1(1-\tau)^{\alpha-1}\Phi(z\,\tau^{2/3})\,\tau^{-1/3}\,d\tau,\ z\in G^\infty. \qquad (1.24')$$

где вновь $\alpha \in (0, +\infty)$ любое.

Аналогично оператору дробного дифференцирования D^{α} $(0 < \alpha < +\infty)$ можно определить и оператор I^{α} для всех $\alpha \in (0, +\infty)$. Однако мы ограничимся его определением для значений $\alpha \in (0, 1)$, положив

$$I^{\alpha}\Phi(z) \equiv \frac{2}{3}\frac{d}{dz}\{I^{-(1-\alpha)}\Phi(z)\}, \quad z \in G^{\infty}. \tag{1.26}$$

Отсюда, в силу отмеченных выше формул (1.25″), получим следующие их аналоги:

$$I^{+0}\Phi(z) = \Phi(z), \qquad z \in G^{\infty}.$$

$$I^{1}\Phi(z) = \frac{2}{3}\frac{d}{dz}\{z^{-1/2}\Phi(z)\},$$

(6) Теперь введем в рассмотрение функцию

$$Y_{\mu}(z, \lambda) = E_{3/2}(\lambda z, \mu)\, z^{\frac{3\mu}{2}-1}, \quad z \in G^{\infty} \tag{1.27}$$

и заметим, что ввиду определения (1.9) функции $e_{\mu}(z, \lambda)$ справедливы тождества

$$Y_{\mu}(z, \lambda) = e_{\mu}(z^{3/2}, \lambda)\, z^{1/2},$$

$$e_{\mu}(z, \lambda) = Y_{\mu}(z^{2/3}, \lambda)\, z^{-1/3}, \qquad z \in G^{\infty}. \tag{1.28}$$

Пользуясь разложением

$$Y_{\mu}(z, \lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{k} \frac{z^{k+\frac{3\mu}{2}-1}}{\Gamma\left(\mu + \frac{2k}{3}\right)} \tag{1.27′}$$

и формулой (1.24′), для любого $\alpha \cup (0, +\infty)$ получим

$$I^{-\alpha} Y_{\mu}(z, \lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{k} I^{-\alpha}\left\{\frac{z^{k+\frac{3\mu}{2}-1}}{\Gamma\left(\mu + \frac{2k}{3}\right)}\right\} =$$

$$= \frac{z^{\frac{3(\mu+\alpha-1)}{2}}}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda z)^{k}}{\Gamma\left(\mu + \frac{2k}{3}\right)} \int_{0}^{1} (1-\tau)^{\alpha-1} \tau^{\frac{2k}{3}+\mu-1}\, d\tau =$$

$$= z^{\frac{3(\mu+\alpha-1)}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda z)^{k}}{\Gamma\left(\mu + \alpha + \frac{2k}{3}\right)} = E_{3/2}(\lambda z, \mu + \alpha)\, z^{\frac{3(\mu+\alpha-1)}{2}}. \tag{1.29}$$

Отсюда, полагая вновь, что условие (1.3) $2/3 \leqslant \mu \leqslant 1$ выполнено, из (1.29) при $\alpha = 1 - \mu$ получим, что

$$I^{-(1-\mu)}\, Y_\mu(z,\lambda) = E_{3/2}(\lambda z, 1).$$

и поэтому

$$I^{(1-\mu)}\, Y_\mu(z,\lambda)|_{z=0} = E_{3/2}(0,1) = 1.$$

Для значения же $\alpha = 1/3$ из (1.29) будем иметь

$$I^{1/3}\, Y_\mu(z,\lambda) = E_{3/2}(\lambda z, \mu + 1/3)\, z^{\frac{3\mu}{2}-1}. \tag{1.30}$$

Наконец, из (1.30), пользуясь определением (1.26), для $\alpha = 2/3$ получим

$$I^{2/3}\, Y_\mu(z,\lambda) = \frac{2}{3}\frac{d}{dz}\{I^{1/3}\, Y_\mu(z,\lambda)\} =$$

$$= \frac{2}{3}\frac{d}{dz}\left\{E_{3/2}(\lambda z, \lambda + 1/3)\, z^{\frac{3\mu}{2}-1}\right\} = \frac{2}{3}\frac{d}{dz}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k z^{k+\frac{3\mu}{2}-1}}{\Gamma\left(\mu+\frac{2k}{3}\right)} =$$

$$= \frac{z^{\frac{3\mu}{2}-2}}{\Gamma(\mu-2/3)} + \lambda z^{\frac{3\mu}{2}-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda z)^k}{\Gamma\left(\mu+\frac{2k}{3}\right)} =$$

$$= \frac{z^{\frac{3\mu}{2}-2}}{\Gamma(\mu-2/3)} + \lambda\, Y_\mu(z,\lambda).$$

В итоге нами доказана следующая

Лемма 1.2. *Функция* $Y_\mu(z,\lambda)$ *удовлетворяет уравнению*

$$I^{2/3}\, Y_\mu(z,\lambda) = \frac{z^{\frac{3\mu}{2}-2}}{\Gamma(\mu-2/3)} + \lambda\, Y_\mu(z,\lambda),\ z \in G^\infty \tag{1.31}$$

и начальному условию

$$I^{-(1-\mu)}\, Y_\mu(z,\lambda)|_{z=0} = 1. \tag{1.32}$$

(в) Теперь ecстественно ставить задачу, аналогичную задаче типа Коши для оператора $I^{2/3}$ и выявить условия для ее разрешимости и единственности решения.

С этой целью условимся обозначать через $L_2^* = L_2^*(G^\infty)$ множество функций $\Psi(z)$, измеримых на любом интервале $(0, w_0)$ $(w_0 \in G^\infty)$ и удовлетворяющих условию

$$\int_{(0,\, w_0)} |\Psi(w)|^2\, |w|^{-1/2}\, |dw| < +\infty,\ w_0 \in G^\infty.$$

Теорема 1.2. *При условии*

$$2/3 \leqslant \mu \leqslant 1$$

задача типа Коши

$$I^{2/3}\,Y(w)=\frac{w^{\frac{3\mu}{2}-2}}{\Gamma(\mu-2/3)}+\lambda\,Y(w),\ w\in G^{\infty},$$

$$I^{-(1-\mu)}\,Y(w)|_{w=0}=1 \tag{1.33}$$

в классе $L_2^{\bullet}$ *имеет единственное решение*

$$Y^{*}(w)\equiv Y_{\mu}(w,\ \lambda)=E_{3/2}(\lambda w,\ \mu)\ w^{\frac{3\mu}{2}-1}.$$

Доказательство. Пусть функции $Y(w)$ и $e(z)$ определены на G^{∞} и связаны эквивалентными соотношениями

$$e(z)=Y(z^{2/3})\,z^{-1/3},\ z\in G^{\infty}\ \text{ и }\ Y(w)=e(w^{3/2})\,w^{1/2},\ w\in G^{\infty}.$$

Тогда утверждения

$$e(z)\in L_1(G^{\infty})\ \text{ и }\ Y(w)\in L_2^{\bullet}(G^{\infty})$$

равносильны. Это легко следует из равенства интегралов

$$\int\limits_{(0,\,z_0)}|e(z)|^2\,|dz|=\frac{3}{2}\int\limits_{(0,\,w_0)}|Y(w)|^2\,|w|^{-1/2}\,|dw|,\ w_0=z_0^{2/3}\in G^{\infty}.$$

Предположим, что функция $Y(w)\in L_2^{\bullet}$ удовлетворяет уравнению (1.33), которое после замен $Y(w)=e(w^{3/2})\,w^{1/2}$ и $w=z^{2/3}$ может быть записано также в виде

$$z^{-1/3}\,I^{2/3}\{e(w^{2/3})\,w^{1/2}\}|_{w=z^{2/3}}=$$

$$=\frac{z^{\mu-\frac{5}{3}}}{\Gamma(\mu-2/3)}+\lambda e(z),\ z\in G^{\infty}. \tag{1.34}$$

Однако в силу определения (1.26) оператора $I^{2/3}$ после надлежащих преобразований имеем

$$I^{2/3}\,\Omega(w)\Big|_{w=z^{2/3}}=\frac{2}{3}\frac{d}{dw}\{I^{-1/3}\,\Omega(w)\}\Big|_{w=z^{2/3}}=$$

$$=z^{1/3}\frac{d}{dz}\left\{\frac{1}{\Gamma(1/3)}\int\limits_0^z(z-\omega)^{1/3-1}\,\Omega(\omega^{2/3})\,\omega^{-1/3}\,d\omega\right\}.$$

Поэтому, подставив сюда $\Omega(w)=e(w^{3/2})\,w^{1/2}$ и заметив, что тогда $\Omega(w^{2/3})\,w^{-1/3}=e(w)$, получим

$$I^{2/3}\{e(w^{3/2})\,w^{1/2}\}|_{w=z^{2/3}}=$$

$$=z^{1/3}\frac{d}{dz}\left\{\frac{1}{\Gamma(1/3)}\int\limits_0^z(z-\omega)^{1/3-1}\,e(\omega)\,d\omega\right\}=z^{2/3}\,D^{2/3}\,e(z).$$

Отсюда и из (1.34) следует, что функция $e(z)=Y(z^{2/3})\,z^{-1/3}$ является решением уравнения

$$D^{2/3}\,e(z)=\frac{z^{\mu-5/3}}{\Gamma(\mu-2/3)}+\lambda e(z),\quad z\in G^{\infty}.$$

Воспользуемся теперь формулой (1.25) для значений $\alpha=1-\mu$ $(2/3\leqslant\mu\leqslant 1)$, положив там $\Phi(w)=Y(w)$. В результате получим тождество

$$I^{-(1-\mu)}\ Y(w)|_{w=z^{2/3}}=D^{-(1-\mu)}\{Y(z^{2/3})\,z^{-1/3}\}=D^{-(1-\mu)}\,e(z).$$

Отсюда при $w=z=0$ следует, что начальные условия для обеих задач Коши (1.15) и (1.33) равносильны. Таким образом мы пришли к заключению, что любое решение $Y(w)\in L_2^*$ задачи Коши (1.33) после трансформации $e(z)=Y(z^{2/3})\,z^{-1/3}$ переходит в решение задачи Коши (1.15) уже из класса L_2. Но согласно теореме 1.1 задача (1.15) в классе L_2 имеет единственное решение. Поэтому единственно и решение $Y_\mu(w)$ задачи Коши (1.33).

(г) По аналогии с оператором L из (1.14′), введем в рассмотрение оператор

$$L_\mu^*=I^{-(\mu-2/3)}\,I^{\mu}\ (2/3\leqslant\mu\leqslant 1) \tag{1.35}$$

и докажем следующую лемму.

Лемма 1.3. *Функция $Y_\mu(w)$, наряду с задачей (1.33), является также решением следующей однородной задачи типа Коши*

$$w^{1/2}\,L_\mu^*\,Y(w)=\lambda Y(w),\quad w\in G^{\infty}.$$
$$I^{-(1-\mu)}\ Y(w)|_{w=0}=1. \tag{1.36}$$

Доказательство. Положив в формуле (1.29) $\alpha=1-\mu$, будем иметь

$$I^{-(1-\mu)}\ Y_\mu(w,\lambda)=E_{3/2}(\lambda w,\ 1), \tag{1.37}$$

и поэтому, согласно (1.26),

$$I^{\mu}\,Y_\mu(w,\lambda)=\frac{2}{3}\frac{d}{dw}\{I^{-(1-\mu)}\ Y_\mu(w,\lambda)\}=\frac{2}{3}\frac{d}{dw}\{E_{3/2}(\lambda w,1)\}=$$

$$=\lambda\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda w)^k}{\Gamma(2/3+2k/3)}=\lambda E_{3/2}(\lambda w,\ 2/3)=\lambda Y_{2/3}(w,\lambda).$$

Отсюда, надлежащим образом применив вновь формулу (1.29), получим

$$I^{-(\mu-2/3)}\,I^{\mu}\ Y_\mu(w,\lambda)=\lambda\,I^{-(\mu-2/3)}\ Y_{2/3}(w,\lambda)=$$

$$=w^{-1/2}\lambda E_{3/2}(\lambda w,\mu)\,w^{\frac{3\mu}{2}-1}=w^{-1/2}\,\lambda\,Y_\mu(w,\lambda).$$

Лемма доказана, так как выполнение начального условия для $Y_\mu(w,\lambda)$ было установлено в теореме 1.2.

Наконец, докажем аналог теоремы 1.1 для оператора I.

Теорема 1.3 *Если $2/3\leqslant\mu\leqslant 1$, то наряду с задачей* (1.33), *функция $Y_\mu(w,\lambda)$ является также единственным решением в классе $L_2^*(G^{\infty})$ однородной задачи типа Коши* (1.36).

Доказательство. Пусть $Y(w) \in L_2^*(G^\infty)$—некоторое решение задачи (1.36). Тогда, как было установлено в начале доказательства теоремы 1.2

$$e(z) = Y(z^{2/3})\, z^{-1/3} \in L_2(G^\infty).$$

При этом, очевидно и обратное представление

$$Y(w) = e(w^{3/2})\, w^{1/2}, \quad w \in G^\infty.$$

Поэтому, переходом к функции e, уравнение (1.36) может быть записано в виде

$$I^{-(\mu-2/3)}\, I^\mu \{e(w^{3/2})\, w^{1/2}\} = \lambda\, e(w^{3/2}), \quad w \in G^\infty. \tag{1.36'}$$

Теперь заметим, во-первых, что после надлежащих преобразований будем иметь

$$I^\mu Y(w) = \frac{2}{3} \frac{d}{dw} \{I^{-(1-\mu)} Y(w)\} =$$

$$= z^{1/3} \frac{d}{dz} \left\{ \frac{1}{\Gamma(1-\mu)} \int_0^z (z-\omega)^{-\mu} Y(\omega^{2/3})\, \omega^{-1/3}\, d\omega \right\} =$$

$$= z^{1/3} \frac{d}{dz} \{D^{-(1-\mu)} e(z)\} = z^{1/3} D^\mu e(z), \quad z = w^{3/2}. \tag{1.37}$$

Далее, обозначим $\Omega(w) = I^\mu Y(w)$, и после надлежащих преобразований получим

$$I^{-(\mu-2/3)} \Omega(w) = \frac{3}{2\Gamma(\mu-2/3)} \int_0^w (w^{3/2} - \zeta^{3/2})^{(\mu-2/3)-1} \Omega(\zeta)\, d\zeta =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\mu-2/3)} \int_0^z (z-\omega)^{(\mu-2/3)-1} \Omega(\omega^{2/3})\, \omega^{-1/3}\, d\omega =$$

$$= D^{-(\mu-2/3)} \{\Omega(z^{2/3})\, z^{-1/3}\}, \quad z = w^{3/2}.$$

Однако, согласно (1.37)

$$\Omega(z^{2/3})\, z^{-1/3} = D^\mu e(z),$$

и поэтому

$$I^{-(\mu-2/3)}\, I^\mu \{e(w^{3/2})\, w^{1/2}\} = I^{-(\mu-2/3)} \Omega(w) =$$

$$= D^{-(\mu-2/3)} \{\Omega(z^{2/3})\, z^{-1/3}\} = D^{-(\mu-2/3)}\, D^\mu e(z), \quad z = w^{3/2}.$$

Итак, нами доказано, что уравнение (1.36) после замен $Y(w) = e(w^{3/2})\, w^{1/2}$ и $w = z^{2/3}$ эквивалентно уравнению

$$D^{-(\mu-2/3)}\, D^\mu e(z) = \lambda\, e(z),$$

которое при начальном условии

$$D^{-(1-\mu)} e(z)|_{z=0} = 1,$$

согласно лемме 1.2, имеет единственное решение $e_{\mu}(z, \lambda)$. Отсюда непосредственно следует утверждение теоремы, поскольку, как мы убедились уже выше, начальные условия для обеих функций $Y(w)$ и $e(z)$ выполняются одновременно.

§ 2. Краевые задачи, полнота собственных функций

2.1. Прежде, чем перейти к самим формулировкам краевых задач, необходимо привести ряд тождеств и определений.

(а) В лемме 1.2 работы [3] были установлены три важных тождества между функциями типа Миттаг-Леффлера. Второе и третье из этих тождеств могут быть записаны в виде

$$\sum_{j=-1}^{1} \alpha^{-j} E_{3/2}(\alpha^j z, \nu + 1/3) \equiv 3 z E_{1/2}(z^3, \nu + 1),$$

$$z \in \mathbf{C}, \qquad (2.1)$$

$$\sum_{j=-1}^{1} \alpha^j E_{3/2}(\alpha^j z, \nu - 1/3) \equiv 3 z^2 E_{1/2}(z^3, \nu + 1),$$

где, как и всюду в дальнейшем

$$\alpha = \exp\left\{i \frac{2\pi}{3}\right\}, \qquad (2.2)$$

а число $\nu \in (-\infty, +\infty)$ может быть любым.

Если в (2.1) положить $z = \sigma^{2/3}\lambda$, где $\lambda \in \mathbf{C}$, а $\sigma \in (0, +\infty)$, то тождества (2.1) запишутся в виде

$$\sum_{j=-1}^{1} \alpha^{-j} E_{3/2}(\alpha^j \sigma^{2/3}\lambda, \nu + 1/3) \equiv 3\sigma^{2/3}\lambda E_{1/2}(\sigma^2\lambda^3, \nu + 1),$$

$$(2.1')$$

$$\sum_{j=-1}^{1} \alpha^j E_{3/2}(\alpha^j \sigma^{2/3}\lambda, \nu - 1/3) \equiv 3\sigma^{4/3}\lambda^2 E_{1/2}(\sigma^2\lambda^3, \nu + 1).$$

Далее, как и в § 1, полагая, что параметр μ подчинен условию $2/3 \leqslant \mu \leqslant 1$, введем в рассмотрение два открытых промежутка без общих точек

$$\Delta = (\mu - 1/6, \mu + 1/6) \text{ и } \tilde{\Delta} = (\mu + 1/6, \mu + 1/2), \qquad (2.3)$$

отметив, что

$$\Delta \subset [0, 2] \text{ и } \tilde{\Delta} \subset [0, 2]. \qquad (2.4)$$

Наконец, введем еще три параметра ν, β и $\tilde{\beta}$, положив

$$\beta = \nu - \mu + 1/3, \ \nu \in \Delta, \text{ и } \tilde{\beta} = \nu - \mu - 1/3, \ \nu \in \tilde{\Delta}, \qquad (2.5)$$

и заметив, что

$$1/6 < \beta < 1/3 \text{ и } -1/6 < \tilde{\beta} < 1/6. \qquad (2.5')$$

Лемма 2.1. *Справедливы формулы*

$$I^{-\beta} Y_\mu(z, \lambda) = E_{3/2}(\lambda z, \nu + 1/3)\, z^{\frac{3\nu}{2}-1}, \quad \nu \in \Delta, \tag{2.6}$$

$$I^{-\tilde{\beta}} Y_\mu(z, \lambda) = E_{3/2}(\lambda z, \nu - 1/3)\, z^{\frac{3\nu}{2}-\frac{5}{2}}, \quad \nu \in \tilde{\Delta}. \tag{2.7}$$

Доказательство. Формулы (2.6) и (2.7) в случае, когда $0 \leqslant \tilde{\beta} < 1/6$ непосредственно следуют из общей формулы (1.29), если в ней соответственно положить $\alpha = \beta$ и $\alpha = \tilde{\beta}$.

Установим теперь справедливость формулы (2.7) для значений $-1/6 < \tilde{\beta} < 0$. С этой целью, во-первых, заметим, что в силу (1.26) и (1.29), поскольку $0 < -\tilde{\beta} < 1$, будем иметь

$$I^{-\tilde{\beta}} Y_\mu(z, \lambda) = \frac{2}{3}\frac{d}{dz}\{I^{-(\mu-\nu+2/3)} Y_\mu(z, \lambda)\} =$$

$$= \frac{2}{3}\frac{d}{dz}\left\{E_{3/2}(\lambda z, \nu + 2/3)\, z^{\frac{3\nu}{2}-\frac{1}{2}}\right\}.$$

Отсюда, путем непосредственной проверки, приходим к формуле (2.7) в случае $\tilde{\beta} < 0$.

(б) Рассмотрим в комплексной плоскости C исходящие из начала $z = 0$ отрезки длины $\sigma^{2/3}$

$$\pi_j(\sigma) = \{z = \alpha^j r : 0 \leqslant r \leqslant \sigma^{2/3}\} \quad (j = -1, 0, 1) \tag{2.8}$$

и их совокупность

$$\Pi(\sigma) = \bigcup_{j=-1}^{1} \pi_j(\sigma). \tag{2.9}$$

Крайними точками $\Pi(\sigma)$ будут три концевые точки

$$a_j = \alpha^j \sigma^{2/3} \quad (j = -1, 0, 1) \tag{2.10}$$

отрезков $\pi_j(\sigma)$.

Теперь, пользуясь тождествами (2.6)—(2.7) леммы 2.1, для $j = -1, 0, 1$ будем иметь

$$X_j(\lambda, \mu, \nu) \equiv I^{-\beta} Y_\mu(z, \lambda)|_{z=a_j} =$$

$$= e^{i\pi\nu j}\, \sigma^{\nu-2/3}\, \alpha^{-j}\, E_{3/2}(\alpha^j \sigma^{2/3} \lambda, \nu + 1/3), \quad \nu \in \Delta, \tag{2.11}$$

и

$$\tilde{X}_j(\lambda, \mu, \nu) \equiv I^{-\tilde{\beta}} Y_\mu(z, \lambda)|_{z=a_j} =$$

$$= e^{i\pi\nu j}\, \sigma^{\nu-1}\, E_{3/2}(\alpha^j \sigma^{2/3} \lambda, \nu - 1/3), \quad \nu \in \tilde{\Delta}; \tag{2.12}$$

Лемма 2.2. *Справедливы тождества*

$$X(\lambda, \mu, \nu) \overset{\text{def}}{\equiv} \sum_{j=-1}^{1} e^{i\pi\nu j}\{I^{-\beta} Y_\mu(z, \lambda)|_{z=a_j}\} =$$

$$= 3\,\sigma^{\nu}\, E_{1/2}(\sigma^2 \lambda^3, \nu + 1), \quad \nu \in \Delta, \tag{2.13}$$

$$\overline{X}(\lambda, \mu, \nu) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=-1}^{1} e^{-i\pi\nu j} z^j \left[I - \overline{S}\ Y_\mu(z, \lambda)|_{z=a_j}\right] \equiv$$

$$\equiv 3\sigma^{\nu+1/3}\lambda^2 E_{1/2}(\sigma^2\lambda^3, \nu+1), \quad \nu \in \widetilde{\Delta}. \tag{2.14}$$

Доказательство. Тождество (2.13) непосредственно следует из первой формулы (2.1′), если учесть (2.11). Аналогично (2.14) следует из второго тождества (2.1′) и из (2.12).

(в) Известно (см. [1], лемма 1.1), что целая функция $E_{1/2}(w, 1+\nu)$ порядка 1/2 и типа 1, для значений параметра $\nu \in [0, 2)$ имеет лишь простые и отрицательные корни $\{-r_k\}_1^\infty$ $(r_k < r_{k+1})$. Отсюда непосредственно следует, что корни целой функции

$$E_{1/2}(\sigma^2 z^3, 1+\nu) \tag{2.15}$$

также все простые и лежат лишь на трех лучах комплексной плоскости

$$L_{-1}(0, e^{-i\frac{\pi}{3}}(\infty)),\ L_1(0, e^{i\frac{\pi}{3}}(\infty)),\ L_0(0, e^{i\pi}(\infty)),$$

т. е. на совокупности лучей

$$L_j = (0,\ a^{j+1/2}(\infty))\ \ (j = -1,\ 0,\ 1).$$

Пронумеровав корни функции (2.15) в отдельности на каждом луче L_j, получим три разные последовательности

$$\{\lambda_k^j\}_1^\infty \subset L_j,\ |\lambda_k^j| < |\lambda_{k+1}^j|\ (j = -1,\ 0,\ 1).$$

Очевидно, что

$$\lambda_k^j = a^{j+1/2}\sqrt[3]{r_k}\ (k = 1,\ 2, \cdots,\ j = -1,\ 0,\ 1),$$

причем

$$(\lambda_k^j)^3 = -r_k\ (k = 1,\ 2, \cdots,\ j = -1,\ 0,\ 1).$$

Введем, наконец, единую нумерацию для всего множества корней функции (2.15), полагая

$$\lambda_{3k-2} = \lambda_k^{-1},\ \lambda_{3k-1} = \lambda_k^0,\ \lambda_{3k} = \lambda_k^1\ (k = 1,\ 2, \cdots).$$

Тогда последовательность комплексных чисел $\{\lambda_k\}_1^\infty$ совпадает с множеством всех корней функции (2.15). Отметим, что как известно ([1], стр. 32)

$$|\lambda_k^{-1}| = |\lambda_k^0| = |\lambda_k^1| \asymp |\lambda_k| \asymp (1+k)^{2/3},\ 1 \leqslant k < +\infty.$$

Здесь следует особо отметить, что в обоих случаях $\nu \in \Delta$ или $\nu \in \widetilde{\Delta}$ имеют место включения (2.4). Иначе говоря, если параметр ν лежит в указанных интервалах Δ или $\widetilde{\Delta}$, то процедура построения последовательности корней $\{\lambda_k\}_1^\infty$ функции $E_{1/2}(\sigma^2 z^3, 1+\nu)$ останется в силе.

2.2 (а) Перейдем теперь к формулировкам двух особого рода краевых задач для оператора

$$z^{1/2}\, L_\mu^* = z^{1/2}\, I^{-(\mu-2/3)}\, l^\mu. \tag{2.16}$$

Пусть, как и выше,

$$\Pi(\sigma) = \bigcup_{j=-1}^{1} \pi_j(\sigma) \subset \mathbf{C}$$

—совокупность отрезков (2.8) длины $\sigma^{2/3}$ $(0 < \sigma < +\infty)$, исходящих из начала $z = 0$.

Пусть, далее, как в § 1, $L_2^*(G^\infty)$ означает класс функций $\Psi(z)$, определенных на G^∞, для которых

$$\int_{(0,\, z_0)} |\Psi(z)_1^2 |z|^{-1/2}\, |dz| < +\infty, \tag{2.17}$$

где $(0, z_0)$—любой интервал на G^∞.

Задача А. *Найти такие значения параметра* λ, *при которых в классе* $L_2^*(G^\infty)$ *на совокупности отрезков* $\Pi(\sigma)$ *существует отличное от нуля решение задачи типа Коши*

$$z^{1/2}\, I^{-(\mu-2/3)}\, l^\mu\, Y(z) = \lambda Y(z),\ z \in \Pi(\sigma),$$
$$I^{-(1-\mu)}\, Y(z)|_{z=0} = 1, \tag{2.18}$$

удовлетворяющее на концевых точках $a_j = \sigma^{2/3}\, a^j$ $(j = -1,\ 0,\ 1)$ *совокупности отрезков* $\Pi(\sigma)$ *краевому условию*

$$X(\lambda,\ \mu,\ \nu) \equiv \sum_{j=-1}^{1} e^{-i\pi\nu j}\, \{I^{(\nu-\mu+1/3)}\, Y(z)|_{z=a_j}\} = 0. \tag{2.19}$$

Задача $\tilde{A}$. *Найти такие значения параметра* λ, *при которых в классе* $L_2^*(G^\infty)$ *на* $\Pi(\sigma)$ *существует нетривиальное решение той же задачи типа Коши* (2.18), *которое удовлетворяло бы краевому условию*

$$\tilde{X}(\lambda,\ \mu,\ \nu) \equiv \sum_{j=-1}^{1} e^{-i\pi\nu j}\, a^j\, \{I^{-(\nu-\mu-1/3)}\, Y(z)|_{z=a_j}\} = 0. \tag{2.20}$$

Как обычно принято, будем называть собственными числами или собственными значениями те значения λ, при которых поставленные задачи имеют ненулевые решения, и собственными функциями сами эти решения.

(б) Добавив к последовательности $\{\lambda_k\}_1^\infty$ корней функции (2.15) еще число $\lambda_0 = 0$, приходим к теореме о разрешимости, притом в явном виде, поставленных выше обеих краевых задач A и $\tilde{A}$.

Теорема 2.1. 1°. *Если параметры* μ *и* ν *удовлетворяют условиям*

$$2/3 \leqslant \mu \leqslant 1,\ \nu \in \Delta = (\mu - 1/6,\ \mu + 1/6), \tag{2.21}$$

то краевая задача A *имеет счетное число собственных чисел* $\{\lambda_k\}_0^\infty$ *и соответствующие им собственные функции*

$$E_n(z) = E_{3/2}(\lambda_n z,\ \mu)\, z^{\frac{3\mu}{2}-1} \in L_2^*(G^\infty)\ (n = 0,\ 1,\ 2, \cdots). \tag{2.22}$$

2°. Если же параметры μ *и* ν *удовлетворяют условиям*

$$2/3 \leqslant \mu \leqslant 1 \quad \text{и} \quad \nu \in \tilde{\Delta} = (\mu + 1/6,\ \mu + 1/2), \tag{2.23}$$

то краевая задача $\tilde{A}$ *имеет те же собственные числа* $\{\lambda_k\}_0^\infty$ *и соответствующие им собственные функции* $\{E_k(z)\}_0^\infty$. *Но кроме функции* $E_0(z)$ *собственному числу* $\lambda_0 = 0$ *(двукратному корню* $\tilde{X}(\lambda, \mu, \nu)$*) следует отнести еще одну присоединенную функцию*

$$E_0^*(z) = \frac{\partial}{\partial \lambda} E_{3/2}(\lambda z, \mu)\, z^{\frac{3\mu}{2}-1}\Big|_{\lambda=0} = \frac{z^{\frac{3\mu}{2}}}{\Gamma(\mu + 2/3)}. \tag{2.24}$$

Доказательство. Согласно теореме 1.3, при $2/3 \leqslant \mu \leqslant 1$ функция

$$Y_\mu(z, \lambda) = E_{3/2}(\lambda z, \mu)\, z^{\frac{3\mu}{2}-1}$$

является единственным решением задачи типа Коши (2.18) в классе $L_2^*(G^\infty)$. Далее, согласно лемме 2.2, краевые условия (2.13) и (2.14) обеих задач A и $\tilde{A}$ выполняются лишь для последовательности чисел $\{\lambda_k\}_0^\infty$, которой соответствует последовательность функций $Y_\mu(z, \lambda_k) = E_k(z)$ $(k = 0, 1, 2, \cdots)$. Наконец, поскольку для функции $\tilde{X}(\lambda, \mu, \nu)$ корень $\lambda_0 = 0$ двукратный, то ей, кроме собственной функции $E_0(z)$, следует соотнести также присоединенную функцию $E_0^*(z)$.

2.3. В данном заключительном пункте устанавливается полнота систем собственных функций сформулированных выше обеих краевых задач A и $\tilde{A}$.

(а) Обозначим чорез $\overset{*}{W}{}^{2,\infty}_{3/2,\sigma}(-1 < \omega < 1,\ 0 < \sigma < +\infty)$ множество целых функций $\Psi(z)$ порядка 3/2 и типа σ, для которых конечна величина

$$\|\Psi,\ L\|_{2,\omega} = \left(\int_C |\Psi(z)|^2 |z|^\omega |dz|\right)^{1/2} =$$

$$= \left(\sum_{j=-1}^{1} \int_0^{+\infty} |\Psi(a^{j+1/2} r)|^2 r^\omega\, dr\right)^{1/2},$$

где $L = \bigcup_{j=-1}^{1} L_j$ — совокупность лучей

$$L_j = \{z = a^{j+1/2} r : 0 < r < +\infty\} \quad (j = -1,\ 0,\ 1).$$

В ранних результатах автора (см. [1], гл. VI, а также [3], теорему IV) о параметрическом представлении классов целых функций конечного роста, в частности содержится следующая

Теорема 1*. 1° *Класс* $\overset{*}{W}{}^{2,\omega}_{3/2,\sigma}$ $(-1<\omega<1)$ *совпадает с множеством функций, представимых в виде*

$$\Psi(z)=\sum_{j=-1}^{1}\int_0^{\sigma} E_{3/2}(\alpha_j z^{2/3},\ \mu)\,\tau^{\mu-1}\,\psi_j(\tau)\,d\tau,$$

где $\mu=5/6+\omega/3$, *а функции* $\psi_j(\tau)\in L_2(0,\ \sigma)$ $(j=-1,\ 0,\ 1)$ *единственны при данном* $\Psi\in\overset{*}{W}{}^{2,\omega}_{3/2,\sigma}$.

2°. *Пусть* $\Psi(z)\in\overset{*}{W}{}^{2,\omega}_{3/2,\sigma}$ *и* $\{\lambda_k\}_0^{\infty}$ *—корни функции* $X(\lambda,\ \mu,\ \nu)$ *при* $\nu\in\Delta$. *Тогда, если*

$$\Psi(\lambda_k)=0\ \ (k=0,\ 1,\ 2,\cdots),$$

то $\Psi(z)\equiv 0$.

Если же $\nu\in\tilde{\Delta}$, *то тождество* $\Psi(z)\equiv 0$ *следует из условий*

$$\Psi'(\lambda_0)=0,\ \ \Psi(\lambda_k)=0\ \ (k=0,\ 1,\ 2,\cdots).$$

(б) Перейдем, наконец, к доказательству основных теорем данной работы относительно полноты систем собственных функций обеих краевых задач A и $\tilde{A}$.

Теорема 2.2. *Пусть параметры* μ *и* ν *удовлетворяют условиям*

$$2/3\leqslant\mu\leqslant 1,\ \ \nu\in\Delta=(\mu-1/6,\ \mu+1/6).$$

Тогда система собственных функций задачи A

$$\{E_k(z)\}_0^{\infty}=\left\{E_{3/2}(\lambda_k z,\ \mu)\,z^{\frac{3\mu}{2}-1}\right\}_0^{\infty}$$

полна в классе $L_2^*\{\Pi(\sigma)\}$ *функций* $X(z)$, *определенных на совокупности отрезков* $\Pi(\sigma)$ *и подчиненных условию*

$$\int_{\Pi(\sigma)}|X(z)|^2\,|z|^{-1/2}\,|dz|<+\infty. \tag{2.25}$$

Доказательство. Достаточно показать, что для любой функции $X(z)\in L_2^*\{\Pi(\sigma)\}$ из совокупности равенств

$$\int_{\Pi(\sigma)}X(z)\,E_{3/2}(\lambda_k z,\ \mu)\,z^{\frac{3\mu}{2}-1}\,|z|^{-1/2}\,|dz|=0\ \ (k=0,\ 1,\ 2,\cdots) \tag{2.26}$$

следует, что $X(z)=0$ почти всюду на $\Pi(\sigma)$.

С этой целью, во-первых, отметим, что функцию

$$F(w)\equiv\int_{\Pi(\sigma)}X(z)\,E_{3/2}(w z,\ \mu)\,z^{\frac{3\mu}{2}-1}\,|z|^{-1/2}\,|dz|$$

*На самом деле данная теорема является переформулировкой теоремы IV работы [3], справедливой для функций $\Phi(z)$ из класса $W^{2,\omega}_{3/2,\sigma}$ и для последовательности $\{\mu_k\}_0^{\infty}$—корней функции $E_{1/2}(-\sigma^2 z^3,\ 1+\nu)$. Переход от теоремы IV к данной теореме совершается простой заменой $\Psi(z)=\Phi(z^{-1/2}\,z)$ и $\lambda_k=z^{1/2}\,\mu_k$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ldots)$

можно представить в виде

$$
F(w)=\sum_{j=-1}^{1}\int_{0}^{\sigma^{2/3}} X(\alpha^j r)\, E_{3/2}(\alpha^j r w,\ \mu)\,(\alpha^j r)^{\frac{3\mu}{2}-1}\, r^{-1/2}\,dr=
$$

$$
=\sum_{j=-1}^{1}\int_{0}^{\sigma} E_{3/2}(\alpha^j \tau^{2/3},\ \mu)\ \tau^{\mu-1}\,\psi_j(\tau)\,d\tau, \tag{2.27}
$$

где

$$
\psi_j(\tau)=\frac{2}{3}\alpha^{j\left(\frac{3\mu}{2}-1\right)} X(\alpha^j \tau^{2/3})\,\tau^{-1/3}\ (j=-1,\ 0,\ 1).
$$

При этом, $\psi_j(\tau)\in L_2(0,\ \sigma)$ $(j=-1,\ 0,\ 1)$, поскольку

$$
\int_{0}^{\sigma}|\psi_j(\tau)|^2\,d\tau=\frac{3}{2}\int_{\pi_j(\sigma)}|X(\alpha^j r)|^2\, r^{-1/2}\,dr<
$$

$$
=\frac{3}{2}\int_{\Pi(\sigma)}|X(z)|^2\,|z|^{-1/2}\,|dz|<+\infty\ (j=-1,\ 0,\ 1).
$$

Отсюда, согласно теореме I (1°), следует, что целая функция $F(w)\in\in \overset{*}{W}{}^{2,\infty}_{3/2,\sigma}$, причем, ввиду (2.26), $F(\lambda_k)=0$ $(k=0,\ 1,\ 2,\cdots)$. Но тогда в силу теоремы I (2°), получим $F(w)\equiv 0$, т. е. почти всюду на $(0,\ \sigma)$ $\psi_j(\tau)=0$ $(j=-1,\ 0,\ 1)$, поскольку в представлении (2.27) данной функции $F(w)\equiv 0$ и функции $\psi_j(\tau)$ единственны. Теорема доказана.

Вполне аналогичным образом доказывается также следующая

Теорема 2.3. *Пусть параметры μ и ν удовлетворяют условиям*

$$
2/3\leqslant\mu\leqslant 1,\ \nu\in\tilde{\Delta}=(\mu+1/6,\ \mu+1/2).
$$

Тогда системы собственных и присоединенных функций задачи $\tilde{A}$

$$
\{E_0^*(z),\ [E_n(z)]_0^\infty\}=\left\{\frac{z^{\frac{3\mu}{2}}}{\Gamma(\mu+2/3)},\ \{E_{3/2}(\lambda_n z,\ \mu)\ z^{\frac{3\mu}{2}-1}\}_0^\infty\right\}
$$

полны в классе функций (2.25).

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 14. IX. 1987

Մ. Մ. ՋՐԲԱՇՅԱՆ. Կոմպլեքս տիրույթում մի եզրային խնդրի մասին *(ամփոփում)*

Ի տարբերություն հեղինակի նախորդ [1], [2] և [3] աշխատանքների, ներկա հոդվածում առաջնություն է տրված Կոշու տիպի խնդրին կոմպլեքս տիրույթում (§ 1) և երկու ոչ սովորական եզրային խնդիրների հատուկ կոտորակային կարգի դիֆերենցիալ օպերատորների համար (§ 2)։ Ապացուցված է այդ խնդիրներից ծագող սեփական ֆունկցիաների համակարգերի լրիվությունը երբ հատվածների

$$
\Pi(\sigma)=\{z=r\,e^{i\frac{2\pi}{3}j}:0\leqslant r\leqslant\sigma^{2/3},\ j=-1,\ 0,\ 1\}
$$

Համախարգի վրա արոշված և

$$\int_{\Pi(\sigma)} |X(z)|^2 |z|^{-1/2} |dz| < +\infty$$

պայմանին բավարարող ֆունկցիանների դասում։

M. M. DJRBASHIAN. *On some initial problem in the complex domain* (summary).

Unlike the author's previons works [1], [2] and [3] in the present article Cauchy type problems in the complex demain (§ 1) and two non ordinary initial problems with special differential operators of fractional order (§ 2) dominate.

It is proved the completeness of the sets of eigenfunctions arise from these problems in the space of functions on

$$\Pi(\sigma) = \{r = re^{i\frac{2\pi}{3}j} : 0 \leqslant r \leqslant \sigma^{2/3},\ j = -1,\ 0,\ 1\}$$

satisfy the condition

$$\int_{\Pi(\sigma)} |X(z)|^2 |z|^{-1/2} |dz| < +\infty.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. М. Джрбашян.* Интерполяционные и спектральные разложения, ассоциированные с дифференциальными операторами дробного порядка. Известия АН Армянской ССР, Математика, XIX, № 2, 1984, 81—181.
2. *M. M. Djrbashian, S. G. Raphaelian.* Interpolation theorems and expantions with respect to Fourier type systems, Journal of Approximation Theory, 1987, v. 50, No 4, 297—325.
3. *М. М. Джрбашян, С. Г. Рафаелян.* Интерполяционные разложения в классах целых функций и порожденные ими базисы Рисса, Известия АН Армянской ССР, Математика, XXII, № 1, 1987, 23—63.
4. *М. М. Джрбашян.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, М., «Наука», 1966.