ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XXII, № 5, 1987 Математика

УДК 517.95

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Р. Л. ШАХБАГЯН

ОБЩАЯ НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

В статье исследуется начально-краевая задача для одного класса бесконечномерных параболических операторов высокого порядка с неоднородными данными в цилиндрической области, основанием которой является CL-мнотообразие с краем. Настоящая статья является продолжением исследований автора, посвященным изучению краевых задач на гильбертовых многообразиях с краем, изложенных в работах [1]—[3]. В связи с этим, здесь будут лишь вкратце описаны классы символов рассматриваемых операторов и соответствующие функциональные пространства.

Пусть M—CL-многообразие с краем ∂M (определение см. [1]). В цилиндрической области $\Omega_+ = M \times R^1_+$, $R^1_+ = \{t \in R^1, t > 0\}$ рассмотрим параболический оператор вида

$$\hat{P}\left(x, \xi, \frac{\partial}{\partial t}\right) = \sum_{j=0}^{2m} a_j(x) \hat{P}_j\left(x, \xi, \frac{\partial}{\partial t}\right), \tag{1}$$

с главной частью

$$\hat{P}_0\left(x, \xi, \frac{\partial}{\partial t}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \hat{A}(x, \xi)\right)^m, \tag{2}$$

где $A(x, \xi, \lambda) \overset{\text{def}}{=} A(x, \xi) + \lambda$ — эллиптический символ второго порядка, принадлежащий классу $\mathrm{E}(M)$ ([3]).

Операторы $\hat{P}_j$ имеют следующий вид:

$$\hat{P}_j\left(x, \xi, \frac{\partial}{\partial t}\right) + \left(\frac{\partial}{\partial t} + \hat{A}_j(x, \xi)\right)^{2m-j}, \; j = \overline{1, 2m}, \tag{3}$$

где символы $P_j(x, \xi, \lambda)$ имеют локальные представления вида

$$P_j(x, \xi, \lambda) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(j)}(x)\, \xi_k + c_0^{(j)}(x) + \lambda\right)^{2m-j}\text{*}.$$

* На самом деле можно рассмотреть главный символ более общего вида, а именно

$$\hat{P}_0 = \prod_{k=1}^{l} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \hat{A}_k\right)^{m_k}, \quad \sum_{k=1}^{l} m_k = m,$$

при этом все результаты сохраняются, технически лишь несколько усложняются доказательства утверждений.

Коэффициенты $a_j(x)$, $c_k^{(l)}(x)$ — бесконечно гладкие функции, заданные на M и принадлежащие пространству $CL^{\infty}(M)$.

На боковой поверхности $\Omega'_+ = \partial M \times R^1_+$ рассматриваются операторы

$$\widehat{B}_j\left(x', \xi, \frac{\partial}{\partial t}\right) = \sum_{k=0}^{n_j} b_{j,k}(x')\widehat{N}_{j,k}\left(x', \xi, \frac{\partial}{\partial t}\right), \tag{4}$$

где

$$\widehat{N}_{j,k}\left(x', \xi, \frac{\partial}{\partial t}\right) \doteq \left(\frac{\partial}{\partial t} + \widehat{L}_{j,k}(x', \xi)\right)^{n_j-k},$$

а символы $N_{j,k}(x', \xi, \lambda)$ имеют локальные представления вида

$$N_{j,k}(x, \xi', \lambda) = \left(\sum_{l=1}^{m} b_{j,k}^{(l)}(x')\,\xi_l + b_{j,k}^{(0)}(x') + \lambda\right)^{n_j-k}.$$

Предполагается, что символы $B_j(x', \xi, \lambda)$ принадлежат пространству $\mathbf{B}(\partial M)$ (определение см. [3]) граничных символов и их порядки — $\operatorname{ord}\widehat{B}_j = n_j < 2m$, $j = 1, 2, \cdots, m$.

Рассмотрим следующую смешанную задачу:

$$\widehat{P}\left(x, \xi, \frac{\partial}{\partial t}\right)u(x, t) = f(x, t), \ (x, t) \in \Omega_+, \tag{5}$$

$$\widehat{B}_j\left(x', \xi, \frac{\partial}{\partial t}\right)u\Big|_{\Omega'_+} = g_j(x', t), \ j = \overline{1, m}, \tag{6}$$

$$\frac{\partial^k u}{\partial t^k}\Big|_{t=0} = \varphi_k(x), \ x \in M, \ k = \overline{0, m-1}. \tag{7}$$

Очевидно, что для разрешимости задачи (5)—(7) необходимо, чтобы правые части уравнений на гиперплоскости $t=0$ удовлетворяли определенным условиям согласованности. Приведем достаточное условие согласованности, которое будет считаться выполненным при изучении разрешимости сформулированной выше смешанной задачи.

С этой целью введем функциональные пространства $\Lambda CL(M, \gamma)$ и $\Lambda CL^0(M, \gamma)$ (ср. [2]).

Пусть функция $h(t)$, тождественно равная нулю при $t < 0$, удовлетворяет условию $e^{-\gamma t}h \in L_1(R^1)$. Обозначим ее преобразование Лапласа через

$$\bar{h}(\lambda) = \Lambda_{t\to\lambda}h(t) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t}h(t)\,dt,$$

где $\lambda \in \mathbf{C}_\gamma = \{\lambda \in \mathbf{C}, \operatorname{Re}\lambda \geq \gamma\}$.

Пространство $\Lambda CL(M, \gamma)$ состоит из функций $h(x, \lambda)$, удовлетворяющих следующим условиям:

а) при любом $\lambda_0 \in \mathbf{C}_\gamma$ $h(x, \lambda_0) \in CL^0(M)$,

в) она аналитична по λ со значениями в $CL^0(M)$ и стремится к нулю при $\lambda \to \infty$ в $\mathbf{C}_\gamma$, Пространство $\Lambda CL^{0}(M, \gamma)$, по определению, есть подпространство $\Lambda CL(M, \gamma)$, определенное условием

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\sigma + i\tau|^m \|h(x, \sigma + i\tau)\|_{C(M)} \, d\tau < K < +\infty,$$

где $K > 0$ — постоянная, не зависящая от σ.

Аналогично вводится пространство $\Lambda CL(\partial M, \gamma)$ (см. [2]).

Условие согласованности. Существует функция $u_0(x, t)$, определенная на Ω_+, такая, что

а) ее преобразование Лапласа

$$\tilde{u}_0(x, \lambda) = \Lambda_{t \to \lambda} u_0(x, t) \in \Lambda CL(M, \gamma), \tag{8}$$

в)

$$\left. \frac{\partial^k u_0}{\partial t^k} \right|_{t=0} = \varphi_k(x), \; k = \overline{0, m-1}, \tag{9}$$

с) положим

$$\hat{P} u_0(x, t) = f_0(x, t) \quad (x, t) \in \Omega_+, \tag{10}$$

$$\hat{B}_j u_0 \Big|_{\Omega'_+} = g_j^0(x', t), \; j = 1, 2, \cdots, m. \tag{11}$$

Требуется, чтобы после продолжения функций $f - f_0$ и $g_j - g_j^0$ нулем при $t < 0$ их преобразования Лапласа по t удовлетворяли условиям:

$$\tilde{f} - \tilde{f}_0 = \Lambda_{t \to \lambda}(f - f_0) \in \Lambda CL^0(M, \gamma), \tag{12}$$

$$\tilde{g}_j - \tilde{g}_j^0 = \Lambda_{t \to \lambda}(g_j - g_j^0) \in \Lambda CL^0(\partial M, \gamma). \tag{13}$$

Это условие означает, что «исправленные» правые части (после вычитания u_0 из u) были бы согласованы с нулем.

Замечание. Необходимость согласованности правых частей для разрешимости задачи очевидна, поскольку, если u — решение задачи (5)—(7), то в условии согласованности можно положить $u_0 = u$.

Основной результат работы будет основан на теореме о разрешимости соответствующей смешанной параболической задачи с однородными данными, доказанной в [3] (см. также [2]). Приведем ее формулировку.

Теорема А. ([3], гл. III, теорема 2.1). Пусть символы операторов $\hat{P}$ и $\hat{B}_j$ принадлежат, соответственно, классам $\mathbf{E}(M)$ и $\mathbf{B}(\partial M)$ и локально удовлетворяют условию типа Лопатинского:

$$\det \left\| B_{j,\alpha}^0 \left(x', -i \frac{d}{dx_1}, \xi', \lambda \right) \omega_k |_{x_1=0} \right\|_{j, k=1}^{m} \neq 0$$

при любых α таких, что $U_\alpha \cap \partial M \neq \varnothing$ (U_α — координатное покрытие многообразия M) и $x' \in \chi_\alpha(U_\alpha)$ ($\{\chi_\alpha\}$ — система локальных карт), $|\xi'| + |\lambda| \neq 0$, $\{\omega_k(x', x_1, \xi', \lambda)\}_{k=1}^{m}$ — базис в пространстве устойчивых ешений уравнения

$$P_{0,\,\varepsilon}\left(0,\ x',\ -i\frac{d}{dx_1},\ \xi',\ \lambda\right)v=0,$$

а $B^0_{j,\,\varepsilon}$ — слагаемые представления главного символа оператора $\widehat{B}_j$.

Пусть, далее, $\tilde{f}=\Lambda_{\gamma-\lambda}f\in\Lambda CL^0(M,\gamma)$, $\tilde{g}_j\in\Lambda CL^0(\partial M,\ \gamma)$ — произвольно заданные функции, а число γ достаточно велико. Тогда задача (5)—(7) с $\varphi_k(x)\equiv 0$, $k=\overline{0,\ m-1}$ однозначно разрешима, при этом для обратного оператора $\mathfrak{M}^{-1}$ задачи имеет место априорная оценка

$$\left\|\mathfrak{M}^{-1}(\tilde{f},\ \tilde{g}_1,\cdots,\ \tilde{g}_m)\right\|_{C(M)}\leqslant K|\operatorname{Re}\lambda|^{-\varepsilon}\left(\|\tilde{f}\|_{C(M)}+\sum_{j=1}^{m}\|\tilde{g}_j\|_{C(\partial M)}\right), \qquad (14)$$

где $K>0$ — постоянная, не зависящая от $\tilde{f},\ \tilde{g}_1,\cdots,\ \tilde{g}_m$, а $\varepsilon>0$ — некоторое число.

Основной результат настоящей статьи содержится в следующей теореме.

Теорема. *Пусть операторы $\widehat{P}$ и $\widehat{B}_j$ удовлетворяют условиям теоремы А и выполнено условие согласованности. Тогда при достаточно больших γ задача (5)—(7) однозначно разрешима в пространстве $\Lambda CL(M,\ \gamma)$ при любых правых частях $f,\ g_j,\ \varphi_k$, для которых $\tilde{f}\in\Lambda CL(M,\ \gamma)$, $\tilde{g}_j\in\Lambda CL(\partial M,\ \gamma)$, $\varphi_k\in CL^0(M)$.*

Имеет место оценка

$$\|\tilde{u}\|_{C(M)}\leqslant K\left(\|\tilde{f}\|_{C(M)}+\sum_{j=1}^{m}\|\tilde{g}_j\|_{C(\partial M)}+\sum_{k=0}^{m-1}\|\varphi_k\|_{C(M)}\right),$$

где $K>0$ — константа, не зависящая от $\tilde{f},\ \tilde{g}_j,\ \varphi_k$.

Доказательство. Пусть u_0 — функция, фигурирующая в условии согласованности. Докажем сначала существование решения. С этой целью рассмотрим следующую параболическую задачу:

$$\widehat{P}v(x,\ t)=f(x,\ t)-f_0(x,\ t),\ (x,t)\in\Omega_+,$$

$$\widehat{B}_jv\Big|_{\Omega'_+}=g_j(x',\ t)-g_j^0(x',\ t),\ j=1,\ 2,\cdots,\ m,$$

$$\left.\frac{\partial^k v}{\partial t^k}\right|_{t=0}=0,\ k=0,\ 1,\cdots,\ m-1,\ x\in M.$$

Поскольку $\tilde{f}-\tilde{f}_0\in\Lambda CL^0(M,\ \gamma)$, $\tilde{g}_j-\tilde{g}_j^0\in\Lambda CL^0(\partial M,\ \gamma)$, то по теореме А эта задача имеет единственное решение. Обозначим через $u=u_0+v$. Тогда очевидно, что функция $u(x,\ t)$ является решением исходной задачи и существование решения доказано.

Единственность решения будет следовать из априорной оценки. Докажем ее. Легко видеть, что по заданным $\varphi_0(x),\ldots,\varphi_{m-1}(x)$, фигурирующим в условии теоремы, можно построить функцию $u_1(x,\ t)$, заданную на Ω_+ и удовлетворяющую условиям

$$\left.\frac{\partial^k u_1}{\partial t^k}\right|_{t=0} = \varphi_k(x), \; k = \overline{0, m-1}, \; x \in M, \tag{9'}$$

при этом $\tilde{u}_1 \in \Lambda CL(M, \gamma)$.

Действительно, в качестве u_1 можно взять

$$u_1(x, t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k}{k!} \varphi_k(x).$$

Отсюда очевидным образом получим оценку

$$\|\tilde{u}_1\|_{C(M)} \leqslant K_1 \sum_{k=0}^{m-1} \|\varphi_k\|_{C(M)}, \tag{15}$$

где $K_1 > 0$ — постоянная, не зависящая от $\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_{m-1}$.

Заметим, далее, что функция $u_0(x, t)$ удовлетворяет условиям (9) и $\tilde{u}_0 \in \Lambda CL(M, \gamma)$. Отсюда следует, что

$$\left.\frac{\partial^k (u_1 - u_0)}{\partial t^k}\right|_{t=0} = 0, \; k = 0, 1, \cdots, m-1,$$

то есть $\Lambda_{t \to \lambda}(u_1 - u_0) \in \Lambda CL^0(M, \gamma)$. Рассмотрим

$$\hat{P}(u_1 - u_0) \text{ и } \hat{B}_j(u_1 - u_0)\Big|_{\Sigma_+}, \; j = \overline{1, m}.$$

В силу предложения 1.1 главы III [3] $\Lambda_{t \to \lambda} \hat{P}(u_1 - u_0) \in \Lambda CL^0(M, \gamma)$ и $\Lambda_{t \to \lambda} \hat{B}_j(u_1 - u_0) \in \Lambda CL^0(\partial M, \gamma)$.

Таким образом, не нарушая условий согласованности, можно в них заменить функцию u_0 на u_1, при этом для функции u_1 (в отличие от u_0) имеется оценка вида (15).

Пусть теперь $u(x, t)$ — какое-либо решение задачи (5)—(7). Тогда функция $u - u_1$ удовлетворяет однородным начальным условиям

$$\left.\frac{\partial^k (u - u_1)}{\partial t^k}\right|_{t=0} = 0, \; k = \overline{0, m-1}, \; x \in M$$

и, следовательно, $u - u_1 \in \Lambda CL^0(M, \gamma)$.

Применяя к ней теорему A, получим, что при достаточно больших γ однозначно разрешима задача

$$\hat{P}(u - u_1) = f - f_1, \; (x, t) \in \Omega_+,$$

$$\hat{B}_j(u - u_1)\Big|_{\Sigma_+} = g_j - g_j^1, \; j = 1, 2, \cdots, m,$$

$$\left.\frac{\partial^k (u - u_1)}{\partial t^k}\right|_{t=0} = 0,$$

где введены следующие обозначения: $f_1 = \hat{P} u_1$, $\hat{B}_j u_1 = g_j^1$. Теперь, в силу оценки (14), имеем

$$\|\tilde{u} - \tilde{u}_1\|_{C(M)} < K_2 \left(\|\tilde{f} - \tilde{f}_1\|_{C(M)} + \sum_{j=1}^{m} \|\tilde{g}_j - \tilde{g}_j^1\|_{C(M)} \right). \tag{16}$$

Учитывая ограниченность операторов $\widehat{P}$ и $\widehat{B}_j$ в соответствующих пространствах (см. [3], теоремы 3.1 и 4.1), получаем следующую оценку:

$$\|\Lambda_{t-\lambda}\widehat{P}u_1\|_{C(M)}+\sum_{j=1}^{m}\|\Lambda_{t-\lambda}\widehat{B}_j u_1\Big|_{\Omega_+}\|_{C(\partial M)}=$$
$$=\|\tilde{f}_1\|_{C(M)}+\sum_{j=1}^{m}\|\tilde{g}_j^1\|_{C(\partial M)}\leqslant K_3\|\tilde{u}_1\|_{C(M)}, \tag{17}$$

где $K_3>0$ — постоянная, не зависящая от $\tilde{u}_1$.

Пользуясь теперь неравенствами (15), (16), для решения задачи (5)—(7) получаем оценку

$$\|\tilde{u}\|_{C(M)}\leqslant\|\tilde{u}-\tilde{u}_1\|_{C(M)}+\|\tilde{u}_1\|_{C(M)}\leqslant$$
$$\leqslant K_4\left(\|\tilde{f}-\tilde{f}_1\|_{C(M)}+\sum_{j=1}^{m}\|\tilde{g}_j-\tilde{g}_j^1\|_{C(\partial M)}+\sum_{k=0}^{m-1}\|\varphi_k\|_{C(M)}\right).$$

Из последнего неравенства, а также оценок (17) и (15), окончательно получаем

$$\|\tilde{u}\|_{C(M)}\leqslant K_4\left(\|\tilde{f}\|_{C(M)}+\|\tilde{f}_1\|_{C(M)}+\sum_{j=1}^{m}\|\tilde{g}_j\|_{C(\partial M)}+\sum_{j=1}^{m}\|\tilde{g}_j^1\|_{C(\partial M)}+\right.$$
$$\left.+\sum_{k=0}^{m-1}\|\varphi_k\|_{C(M)}\right)\leqslant K_5\left(\|\tilde{f}\|_{C(M)}+\sum_{j=1}^{m}\|\tilde{g}_j\|_{C(\partial M)}+\sum_{k=0}^{m-1}\|\varphi_k\|_{C(M)}\right), \tag{18}$$

где $K_5>0$ — константа, не зависящая от $\tilde{f}$, $\tilde{g}_j$ и φ_k.

Из (18) очевидным образом следует единственность решения. Теорема доказана.

Замечание. В ходе доказательства теоремы, на самом деле, был получен эффективный критерий согласованности. Он заключается в следующем: по начальным значениям $\varphi_k\in CL^0(M)$, $k=\overline{0, m-1}$ строим их продолжение $u_0(x, t)$ в Ω_+, $\tilde{u}_0\in\Lambda CL(M, \gamma)$ описанным в теореме способом. Условия (12), (13) для этого продолжения и будет критерием согласованности.

Ереванский государственный университет,
Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 2.IX.1986

ЛИТЕРАТУРА

1. *Р. Л. Шахбагян.* Общая краевая задача для эллиптических операторов высокого порядка на бесконечномерных многообразиях с краем, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., XIX, № 1, 1984, 3—18.
2. *Р. Л. Шахбагян.* Начально-краевая задача для параболических уравнений высокого порядка с бесконечным числом независимых переменных, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., XX, № 1, 1985, 26—40.
3. *Р. Л. Шахбагян.* Докторская диссертация, Тбилиси, 1985.