ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XXII, № 5, 1987 Математика

УДК 517.53

А. Б. АЛЕКСАНДРОВ

# КРАТНОСТЬ ГРАНИЧНЫХ ЗНАЧЕНИЙ ВНУТРЕННИХ ФУНКЦИЙ

Голоморфная в единичном круге $\mathbf{D}$ функция $I$ называется *внутренней*, если $|I|\leqslant 1$ всюду и $|\lim\limits_{r\to 1} I(r\zeta)|=1$ почти всюду на единичной окружности $\mathbf{T}$. Если функция $I$ непрерывна вплоть до границы круга $\mathbf{D}$, то (как хорошо известно) $I$ есть конечное произведение Бляшке, т. е.

$$I(z)=\xi\prod_{j=1}^{n}\frac{a_j-z}{1-\bar a_j z},$$

где $\xi\in\mathbf{T}$, $a_j\in\mathbf{D}$. В этом случае легко показать, что $\operatorname{card}(I^{-1}(\zeta))=n$ для всех $\zeta\in\mathbf{T}$ $(n\geqslant 1)$. Таким образом, кратность каждого граничного значения конечного произведения Бляшке $I$ равна $n$ $(n\geqslant 1)$. В этой работе мы введем понятие кратности граничного значения для произвольной внутренней функции. Мы увидим, что если внутренняя функция $I$ не является конечным произведением Бляшке, т. е. имеет особенности на окружности $\mathbf{T}$, то каждое значение $\zeta$, $\zeta\in\mathbf{T}$, функция $I$ принимает (в некотором смысле) счетное или континуальное число раз. Хорошо известно, что в этом случае функция $I$ почти каждое значение $w$, $w\in\mathbf{D}$, принимает счетное число раз (см., например, [1]). Оказывается, что аналогичным свойством*) для своих граничных значений функция $I$ обладает, только если её производная $I'$ имеет конечные угловые граничные значения почти всюду на окружности $\mathbf{T}$.

Аппарат, который мы используем для введения понятия кратности граничного значения внутренней функции, оказывается полезным и в других вопросах граничного поведения внутренних функций. Так, например, с его помощью мы доказываем, что для любой внутренней функции $I$ кривая $\{I(r\zeta)\}_{0<r<1}$ не может «сильно» касаться* окружности $\mathbf{T}$.

На протяжении всей статьи буква $I$ будет обозначать аналитическую в единичном круге $\mathbf{D}$ функцию такую, что $I(\mathbf{D})\subset\mathbf{D}$. Граничные значения функции $I$, которые существуют почти всюду на $\mathbf{T}$ в силу теоремы П. Фату (см., например, [1] или [2]), мы будем обозначать той же буквой $I$. С каждым числом $\alpha\in\mathbf{T}$ свяжем конечную положительную борелевскую меру $\tau_\alpha$ (см., например, [3], стр. 270) на окружности $\mathbf{T}$, однозначно определяемую равенством

---

* Точные формулировки приведены ниже (теоремы 1 и 2).

$$\mathrm{Re}\,\frac{\alpha + I(z)}{\alpha - I(z)} = \int\limits_{\mathrm{T}} \mathrm{Re}\,\frac{\zeta + z}{\zeta - z}\, d\tau_\alpha(\zeta)\ \ (z \in \mathrm{D}).$$

Ясно, что отображение $\alpha \to \tau_\alpha$ действует непрерывно из окружности Т в пространство всех конечных борелевских* мер $M(\mathrm{T})$, снабжённое топологией $\sigma(M(\mathrm{T}),\ C(\mathrm{T}))$, где $C(\mathrm{T})$ — пространство всех непрерывных на окружности Т функций. Каждая мера $\tau_\alpha$ обладает лебеговским разложением

$$\tau_\alpha = \sigma_\alpha + h_\alpha \cdot m,$$

где $\sigma_\alpha$ — сингулярная мера, $h_\alpha \in L^1 = L^1(\mathrm{T})$, а $m$ — нормированная мера Лебега на Т. Легко видеть, что $h_\alpha = \mathrm{Re}\,\dfrac{\alpha + I}{\alpha - I}$ почти всюду на Т. Положим $\sum = \{\zeta \in \mathrm{T} : |I(\zeta)| = 1\}$. Множество $\sum$ определяется с точностью до множества нулевой меры (mod 0). Символом $1_E$ будем обозначать характеристическую функцию множества $E$.

Пользуясь случаем, автор выражает благодарность С. В. Хрущеву за полезные обсуждения.

1. Все основные результаты статьи основаны на следующем простом утверждении.

Предложение 1. *Равенства*

$$m = \int\limits_{\mathrm{T}} \tau_\alpha\, dm(\alpha), \tag{1}$$

$$1_\Sigma \cdot m = \int\limits_{\mathrm{T}} \sigma_\alpha\, dm(\alpha) \tag{2}$$

*имеют место в следующем слабом смысле: если $f$ — суммируемая по мере Лебега $m$ функция, то она же суммируема по мерам $\sigma_\alpha$, $\tau_\alpha$ при почти всех $\alpha \in \mathrm{T}$ и*

$$\int\limits_{\mathrm{T}} f\, dm = \int\limits_{\mathrm{T}} \left( \int\limits_{\mathrm{T}} f\, d\tau_\alpha \right) dm(\alpha), \tag{1'}$$

$$\int\limits_{\Sigma} f\, dm = \int\limits_{\mathrm{T}} \left( \int\limits_{\mathrm{T}} f\, d\sigma_\alpha \right) dm(\alpha). \tag{2'}$$

Доказательство. Легко проверить следующее равенство

$$\int\limits_{\mathrm{T}} z^{-n}\, d\tau_\alpha(z) = \begin{cases} \sum\limits_{k \geq 0} \bar{\alpha}^k \int\limits_{\mathrm{T}} I^k(z)\, z^{-n}\, dm(z), & n > 1 \\[2ex] \mathrm{Re}\,\dfrac{\alpha + I(0)}{\alpha - I(0)}, & n = 0. \end{cases}$$

Теперь ясно, что

$$\int\limits_{\mathrm{T}} \left( \int\limits_{\mathrm{T}} z^{-n}\, d\tau_\alpha(z) \right) dm(\alpha) = \int\limits_{\mathrm{T}} z^{-n}\, dm(z) \tag{1''}$$

---

* В дальнейшем каждую комплексную меру $\mu \in M(\mathrm{T})$ будем считать пополненной.

для всех $n \geqslant 0$. Поскольку $z^n = \overline{z^{-n}}$ всюду на $\mathbf{T}$, равенство (1″) имеет место для всех целых $n$. Отсюда вытекает равенство (1′) для всех $f \in C(\mathbf{T})$. Теорема Лебега о предельном переходе под знаком интеграла позволяет распространить равенство (1′) на все ограниченные борелевские функции. Чтобы доказать равенство (1′) в полном объёме, осталось проверить, что если $E$—измеримое по Лебегу множество, $E \subset \mathbf{T}$, $mE = 0$, то множество $E$ измеримо по мере $\tau_\alpha$ и $\tau_\alpha E = 0$ при почти всех $\alpha \in \mathbf{T}$. Для этого рассмотрим борелевское множество $\widetilde{E}$ такое, что $\widetilde{E} \supset E$ и $m\widetilde{E} = 0$. Тогда равенство (1′) для функции $1_{\widetilde{E}}$ влечёт: $\tau_\alpha(\widetilde{E}) = 0$ при почти всех $\alpha \in \mathbf{T}$, откуда $\tau_\alpha E = 0$ при почти всех $\alpha \in \mathbf{T}$. Докажем теперь равенство (2′). Имеем

$$\int\left(\int f\, d\sigma_\alpha\right) dm(\alpha) = \int\left(\int f\, d\tau_\alpha\right) dm(\alpha) - \int\left(\int f \operatorname{Re}\frac{\alpha+I}{\alpha-I}\, dm\right) dm(\alpha) =$$

$$= \int f\, dm - \int f\left(\int \operatorname{Re}\frac{\alpha+I}{\alpha-I}\, dm(\alpha)\right) dm = \int_\Sigma f\, dm.$$

2. Сделаем несколько замечаний по поводу случая, когда $I$—внутренняя функция, $I(0) = 0$. В этом случае $\sigma_\alpha = \tau_\alpha$—вероятностная мера при всех $\alpha \in \mathbf{T}$. Рассмотрим оператор $T: L^1 \to L^1$

$$(Tf)(\alpha) = \int f\, d\sigma_\alpha.$$

Ясно, что $T$—абсолютное сжатие, т. е. оператор $T$ является сжатием в пространствах $L^1$ и $L^\infty$, а значит, и во всех пространствах $L^p$ с $p \in [1, +\infty]$.

Пусть $\mathbf{F}$—наименьшая $\sigma$-алгебра измеримых по Лебегу подмножеств окружности $\mathbf{T}$ (содержащая все множества нулевой меры Лебега), относительно которой измерима функция $I$. Отметим, что $(Tf)(I)$ есть условное математическое ожидание случайной величины $f \in L^1$ относительно $\sigma$-алгебры $\mathbf{E}$, т. е.

$$\int_\Delta (Tf)(I)\, dm = \int_\Delta f\, dm$$

для любого $\mathbf{F}$-измеримого множества $\Delta$.

Оператор $T$ переводит тригонометрические полиномы степени не выше $n$ в тригонометрические полиномы степени не выше $n$. Следовательно, оператор $T$ действует во всяком пространстве функций, допускающем описание в терминах скорости приближения в $L^p$-метрике $(1 \leqslant p \leqslant +\infty)$ тригонометрическими многочленами степени не выше $n$. В частности, $T(B^s_{pq}) \subset B^s_{pq}$ $(p \geqslant 1,\ q > 0, s > 0)$. Здесь $B^s_{pq}$ обозначает класс О. В. Бесова (см., например, [4]).

Кроме того, оператор $T$ рациональные функции с полюсами в $r\mathbf{D}$ (соотв., в $\widehat{\mathbf{C}} \setminus \frac{1}{r}\mathbf{D}$) переводит в рациональные функции с полюсами в $r\mathbf{D}$ $\left(\text{соотв., в } \hat{\mathbf{C}} \setminus \frac{1}{r}\mathbf{D}\right)$ при всех $r \in (0, 1)$.

Отметим еще, что оператор $T$ коммутирует с проектором М. Рисса. Отсюда и из включений $TL^\infty \subset L^\infty$, $TC \subset C$ вытекает, что $T(BMO) \subset BMO$, $T(VMO) \subset VMO$. Здесь $BMO$ (соотв. $VMO$) обозначает пространство всех функций с ограниченным (исчезающим) средним колебанием. Точное определение пространств $BMO$ и $VMO$ тоже можно найти в обзоре [4].

3. Пусть $\zeta \in \mathbf{T}$ и $r \in (0, 1)$. Обозначим через $\Gamma(\zeta, r)$ внутренность выпуклой оболочки точки $\zeta$ и круга $r\mathbf{D}$, а через $K(\zeta, r)$—открытый круг радиуса $r$, касающийся окружности $\mathbf{T}$ в точке $\zeta$.

Пусть $f$—отображение из круга $\mathbf{D}$ в хаусдорфово пространство $X$. Говорят, что отображение $f$ имеет угловой предел $x \in X$ в точке $\zeta \in \mathbf{T}$, если $\lim\limits_{\zeta} f | \Gamma(\zeta, r) = x$ для всех $r \in (0, 1)$. В этом случае мы будем писать $\Gamma - \lim\limits_{\zeta} f = x$. Хорошо известная теорема П. Фату (см. [1] и [2]) утверждает, что любая ограниченная аналитическая в $\mathbf{D}$ функция имеет угловые пределы почти всюду на $\mathbf{T}$. Мы покажем, что для аналитических в $\mathbf{D}$ функций $f$ таких, что $f(\mathbf{D}) \subset \mathbf{D}$, имеет место более сильное утверждение. Обозначим через $B$ замкнутый единичный круг ($B = \overline{\mathbf{D}}$), снабженный следующей усиленной топологией $\mathbf{U}$. Множество $U \subset B$ назовем открытым ($u \in \mathbf{U}$), если пересечение $U \cap \mathbf{D}$ открыто в обычном смысле и для любой точки $\zeta \in \mathbf{T} \cap U$ найдется число $r \in (0, 1)$ такое, что $K(\zeta, r) \subset U$. Будем говорить, что комплексное число $\alpha$ является сильным угловым пределом функции $f: \mathbf{D} \to \mathbf{D}$ в точке $\zeta \in \mathbf{T}$, если $\Gamma - \lim\limits_{\zeta} \tilde{f} = \alpha$, где $\tilde{f}$—функция $f$, рассматриваемая как отображение из $\mathbf{D}$ в $B$. В этом случае будем писать $f_*(\zeta) = \alpha$. Отметим, что если $\alpha \in \mathbf{T}$, то равенство $f_*(\zeta) = \alpha$ равносильно равенству

$$\Gamma - \lim_{\zeta} \operatorname{Re} \frac{\alpha + f}{\alpha - f} = +\infty.$$

Ясно, что если функция $f$ непрерывна, то функция $f_*$ измерима по Борелю и, следовательно, определена на борелевском множестве.

4. Теорема 1. *Функция $f_*$ определена почти всюду на окружности* $\mathbf{T}$.

Прежде чем доказывать теорему, введем несколько обозначений и докажем некоторые вспомогательные утверждения. Положим $E = f_*^{-1}(\mathbf{T})$, $E_\alpha = f_*^{-1}(\alpha)$. Множества $E$ и $E_\alpha$—боролевские, поскольку функция $f_*$ измерима по Борелю.

Нам понадобится следующая хорошо известная лемма, которую мы приводим без доказательства.

Лемма 1. *Пусть $u$ — интеграл Пуассона положительной меры $\mu \in M(\mathbf{T})$. Тогда ее сингулярная часть сосредоточена на множестве*

$$\{\zeta \in \mathbf{T} : \Gamma - \lim_{\zeta} u = +\infty\}.$$

Следствие 1. $\sigma_\alpha(\mathbf{T}\setminus E_\alpha)=0$ *при всех* $\alpha\in\mathbf{T}$.

Следствие 2. *Пусть $A$ — измеримое по Лебегу подмножество окружности* $\mathbf{T}$. *Тогда* $m(\Sigma\setminus A)=0$ *в том и только в том случае, когда* $\sigma_\alpha(A)=\sigma_\alpha(\mathbf{T})$ (*или, что то же самое*, $\sigma_\alpha(A\cap E_\alpha)=\sigma_\alpha(\mathbf{T})$) *при почти всех* $\alpha\in\mathbf{T}$.

Доказательство. Достаточно воспользоваться предложением 1 и следствием 1.

Доказательство теоремы 1. Достаточно воспользоваться следствиями 1 и 2.

Предложение 2. *Пусть* $\tilde{I}$ — *измеримая функция, совпадающая почти всюду на окружности* $\mathbf{T}$ *с функцией* $I$, т. е. $\tilde{I}(\zeta)=\lim\limits_{r\to1-}I(r\zeta)$ *при почти всех* $\zeta\in\mathbf{T}$. *Тогда* $\sigma_\alpha(\tilde{I}^{-1}(\alpha))=\sigma_\alpha(\mathbf{T})$ *при почти всех* $\alpha\in\mathbf{T}$.

Доказательство. Из следствия 1 вытекает равенство $\int I_* \, d\sigma_\alpha = \alpha\sigma_\alpha(\mathbf{T})$ при всех $\alpha\in\mathbf{T}$. Поэтому в силу следствия 2

$$\int \tilde{I}\cdot\alpha^{-1}\,d\sigma_\alpha=\sigma_\alpha(\mathbf{T})\tag{3}$$

при почти всех $\alpha\in\mathbf{T}$. Если $|\tilde{I}|\leqslant1$ $\sigma_\alpha$-почти всюду, то равенство (3) влечет $\sigma_\alpha(\tilde{I}^{-1}(\alpha))=\sigma_\alpha(\mathbf{T})$. Осталось заметить, что $|\tilde{I}|\leqslant1$ $\sigma_\alpha$-почти всюду при почти всех $\alpha\in\mathbf{T}$ в силу следствия 2.

С каждой мерой $\mu\in M(\mathbf{T})$ свяжем мощность $\Phi(\mu)$, определенную равенством

$$\Phi(\mu)=\min\{\operatorname{Card}(A):|\mu|(\mathbf{T}\setminus A)=0\}.$$

Другими словами, $\Phi(\mu)$ — мощность континуума, если мера $\mu$ не является дискретной; и $\Phi(\mu)$ есть мощность множества нагрузок меры $\mu$, если мера $\mu$ дискретна. Из предложения 2 сразу вытекает следующее

Следствие. *В условиях предложения 2*

$$\Phi(\sigma_\alpha)\leqslant\operatorname{Card}(\tilde{I}^{-1}(\alpha))\tag{4}$$

*при почти всех* $\alpha\in\mathbf{T}$.

Нетрудно показать, что функцию $\tilde{I}$ можно выбрать так, чтобы неравенство (4) превратилось в равенство сразу при всех $\alpha\in\mathbf{T}$. В дальнейшем $\Phi(\sigma_\alpha)$ будем называть кратностью значения $\alpha$ функции $I$.

5. С каждой функцией $I$ свяжем ее угловую производную $DI$. Для этого обозначим через $\Sigma^\circ$ множество всех точек $\zeta\in\mathbf{T}$ таких, что $\lim\limits_{r\to1-}I(r\zeta)\in\mathbf{T}$

$$(DI)(\zeta)=\begin{cases}\lim\limits_{r\to1-}\dfrac{\zeta\cdot I'(r\zeta)}{I(r\zeta)}, & \text{если предел существует и } \zeta\in\Sigma^\circ\\ +\infty, & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Известно, что

$$(DI)(\zeta)=\Gamma\text{—}\lim_{\zeta}\frac{1-|I(z)|}{1-|z|}$$

при всех $\zeta \in \mathbf{T}$. Кроме того, если $(DI)(\zeta) < +\infty$, то $\Gamma - \lim\limits_{\zeta} \dfrac{I'(z)\, z}{I(z)} = (DI)(\zeta)$. Все эти утверждения об угловой производной можно найти в монографии [5].

Положим $E' = \{\zeta \in \mathbf{T} : (DI)(\zeta) < +\infty\}$.

Предложение 3. $E' \subset E$.

Доказательство. Пусть $\zeta \in E'$. Положим $\alpha = \lim\limits_{r \to 1-} I(r\zeta)$.

Проверим, что $I_*(\zeta) = \alpha$, т. е.

$$\Gamma - \lim_{\zeta} \operatorname{Re} \frac{1 + \bar{\alpha}\, I(z)}{1 - \bar{\alpha}\, I(z)} = +\infty.$$

Имеем

$$\operatorname{Re} \frac{1 + \bar{\alpha}\, I(z)}{1 - \bar{\alpha}\, I(z)} = \frac{1 - |I(z)|^2}{|1 - \bar{\alpha}\, I(z)|^2} \sim \frac{2(1 - |z|)}{|z - \alpha|^2\, (DI)(\zeta)} \to +\infty$$

при $z \to \zeta$ $(z \in \Gamma(\zeta, r))$.

Предложение 4. *Если $\zeta \in E$, то*

$$(DI)(\zeta) = \begin{cases} |I_*(\zeta) - \alpha|^2 \displaystyle\int \frac{d\tau_\alpha(\xi)}{|\xi - \zeta|^2}, & I_*(\zeta) \neq \alpha \\ \dfrac{1}{\sigma_\alpha(\{\zeta\})}, & I_*(\zeta) = \alpha \end{cases}$$

*при всех $\alpha \in \mathbf{T}$.*

*Если же $\zeta \bar{\in} E$, то $(DI)(\zeta) = \displaystyle\int \frac{d\tau_\alpha(\xi)}{|\xi - \zeta|^2} = +\infty$ и $\sigma_\alpha(\{\zeta\}) = 0$ при всех $\alpha \in \mathbf{T}$.*

Доказательство. Из определения меры $\tau_\alpha$ вытекает равенство

$$\int\limits_{\mathbf{T}} \frac{1 - r^2}{|\xi - r\zeta|^2}\, d\tau_\alpha(\xi) = \frac{1 - |I(r\zeta)|^2}{|\alpha - I(r\zeta)|^2} \quad (\zeta \in \mathbf{T},\ r \in (0, 1)), \tag{5}$$

которое сразу дает первое утверждение. Докажем теперь второе утверждение. Предположим, что $\displaystyle\int\limits_{\mathbf{T}} \frac{d\tau_\alpha(\xi)}{|\xi - \zeta|^2} < +\infty$. Тогда в силу (5) существует число $M$ такое, что

$$\frac{1 - |I(r\zeta)|^2}{|\alpha - I(r\zeta)|^2} \leqslant M(1 - r^2)$$

при всех $r \in (0, 1)$. Следовательно

$$(DI)(\zeta) = \lim_{r \to 1-} \frac{1 - |I(r\zeta)|}{1 - r} \leqslant \varlimsup_{r \to 1-} \sup \frac{8(1 - |I(r\zeta)|^2)}{(1 - r^2)|\alpha - I(r\zeta)|^2} \leqslant 8M < +\infty.$$

Предположим теперь, что $\sigma_\alpha(\{\zeta\}) > 0$. Тогда

$$\lim_{r \to 1-} \frac{1 - |I(r\zeta)|^2}{|\alpha - I(r\zeta)|^2}(1 - r) > 0.$$

Следовательно

$$(DI)(\zeta) = \lim_{r\to 1-} \frac{1-|I(r\zeta)|}{1-r} \leqslant \overline{\lim_{r\to 1-}} \sup \frac{|\alpha - I(r\zeta)|}{1-r} \leqslant$$

$$\leqslant 2\,\overline{\lim_{r\to 1-}} \sup \frac{|\alpha - I(r\zeta)|^2}{(1-r)(1-|I(r\zeta)|^2)} < +\infty$$

и мы снова получаем противоречие с предположением $\zeta \in E$.

Следствие 1. $E' \cap E_\alpha = \{\zeta \in T: \sigma_\alpha(\{\zeta\}) > 0\}$ *при всех* $\alpha \in \mathrm{T}$.

Следствие 2. *Кратность значения* $\alpha \in \mathrm{T}$ *функции* $I$ *не более, чем счетна тогда и только тогда, когда* $\sigma_\alpha(E') = \sigma_\alpha(\mathrm{T})$.

Следствие 3. *Пусть* $\{\mu_n\}_{n\geqslant 1}$ *— суммируемая последовательность положительных чисел, для которой* $\sum\limits_{n\geqslant 1} \mu_n^{1/2} = +\infty$. *Тогда существует внутренняя функция* $I$ *такая, что мера* $\sigma_1$ *имеет вид* $\sigma_1 = \sum\limits_{n\geqslant 1} \mu_n \delta_{\zeta_n}$, *где* $\delta_\zeta$ *— $\delta$-мера, сосредоточенная в точке* $\zeta$, $\zeta_n \neq \zeta_k$ *при* $n \neq k$, *а все остальные меры* $\sigma_\alpha$ $(\alpha \neq 1)$ *непрерывны.*

Доказательство. Рассмотрим покрытие окружности T последовательностью дуг $\{\Delta_n\}_{n\geqslant 1}$, имеющее бесконечную кратность в каждой точке $\zeta \in T$ и такое, что $m(\Delta_n) = \mu_n^{1/2}$. Пусть $\zeta_n$ — середина дуги $\Delta_n$. При этом легко добиться, чтобы $\zeta_n \neq \zeta_k$ при $n \neq k$. Положим $\mu = \sum\limits_{n\geqslant 1} \mu_n \delta_{\zeta_n}$. Ясно, что $\dfrac{\mu_n}{|\zeta_n - \xi|^2} > \dfrac{1}{4}$, если $\xi \in \Delta_n$. Отсюда вытекает, что $\displaystyle\int \frac{d\mu(\xi)}{|\zeta - \xi|^2} = +\infty$ при всех $\zeta \in \mathrm{T}$. Нужная нам функция $I$ однозначно определяется равенством

$$\frac{1+I(z)}{1-I(z)} = \int\limits_{\mathrm{T}} \frac{\zeta + z}{\zeta - z}\, d\mu(\zeta).$$

Функцию $I$ будем называть *счетнократной*, если почти каждое ее значение $\alpha \in \mathrm{T}$ имеет не более, чем счетную кратность, т. е. если мера $\sigma_\alpha$ дискретна при почти всех $\alpha \in \mathrm{T}$. Функцию $I$ будем называть *континуумкратной*, если почти каждое значение $\alpha \in \mathrm{T}$ имеет континуальную кратность, т. е. если мера $\sigma_\alpha$ имеет ненулевую непрерывную часть при почти всех $\alpha \in \mathrm{T}$.

Теорема 2. *Функция* $I$ *счетнократна в том и только в том случае, когда* $DI < +\infty$ *почти всюду на* $\sum$.

Доказательство. В силу следствия 2 леммы 1 $DI < +\infty$ почти всюду на $\sum$ в том и только в том случае, когда $\sigma_\alpha(E') = \sigma_\alpha(\mathrm{T})$ при почти всех $\alpha \in \mathrm{T}$. Последнее согласно следствию 2 предложения 4 означает, что функция $I$ счетнократна.

Отметим, что $DI$ выражается явным образом через параметры внешне-внутренней факторизации функции $I$ (см. [6]). Таким образом, свойство счетнократности функции $I$ тоже явно выражается через эти параметры.

Теорема 3. *Если* $DI = +\infty$ *почти всюду на некоторой открытой дуге* $\Delta$, $\Delta \subset \sum \pmod 0$, $\Delta \neq \varnothing$, *то функция* $I$ *континуумкратна.*

Доказательство. Если $\sigma_\alpha(\Delta)=0$ при некотором $\alpha\in\mathrm{T}$, то $\tau_\alpha(\Delta)=0$, поскольку $\Delta\subset\sum$ (mod 0). Поэтому в этом случае функция $\frac{\alpha+I}{\alpha-I}$ (а значит, и функция $I$) допускает аналитическое продолжение через дугу $\Delta$ и мы приходим к противоречию с условием $DI=+\infty$ почти всюду на $\Delta$. Следовательно, $\sigma_\alpha(\Delta)>0$ при всех $\alpha\in\mathrm{T}$. Из условий теоремы вытекает, что $\sigma_\alpha(E'\cap\Delta)=0$ при почти всех $\alpha\in\mathrm{T}$, откуда $\sigma_\alpha(E')\leqslant\sigma_\alpha(\mathrm{T})-\sigma_\alpha(\Delta)<\sigma_\alpha(\mathrm{T})$ при почти всех $\alpha\in\mathrm{T}$.

6. Остановимся теперь более подробно на случае, когда $I$—внутренняя функция, т. е. $\sum=\mathrm{T}$ (mod 0).

Предложение 5. *Если кратность одного значения внутренней функции $I$ конечна, то $I$ — конечное произведение Бляшке.*

Доказательство. Если кратность значения $\alpha$ конечна, то $\frac{\alpha+I}{\alpha-I}$ —рациональная функция, т. е. $I$—конечное произведение Бляшке.

Следствие. *Пусть $\tilde I$ — измеримая функция, совпадающая почти всюду на окружности $\mathrm{T}$ с внутренней функцией $I$. Тогда если $I$ не является конечным произведением Бляшке, то множество $\tilde I^{-1}(\alpha)$ бесконечно при почти всех $\alpha\in\mathrm{T}$.*

Следующее предложение показывает, что теорема 3 перестает быть справедливой даже для внутренних функций $I$, если предположить только, что $m\{\zeta\in\mathrm{T}:(DI)(\zeta)=+\infty\}>0$.

Предложение 6. *Существует внутренняя функция $I$, не являющаяся счетнократной, у которой каждое значение $\alpha\in P$ имеет счетную кратность для некоторой открытой дуги $P\subset\mathrm{T}$, $P\neq\varnothing$. В частности, функция $I$ не явлется ни счетнократной, ни континуум кратной.*

Набросок доказательства. Возьмем замкнутое нигде не плотное множество $F\subset\mathrm{T}$ положительной меры с системой дополнителных интервалов $\{\Delta_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$, обладающей следующим свойством*: множество $\{\zeta\in\Gamma:\tilde\Delta_\gamma\ni\zeta\}$ бесконечно для всех $\zeta\in F$, где $\tilde\Delta_\gamma$—дуга с той же серединой, что и $\Delta_\gamma$, но имеющая длину $(m(\Delta_\gamma))^{2/3}$. Рассмотрим функцию $\varphi\in\Lambda_{1/3}(\mathrm{T})$ такую, что $\varphi\geqslant0$, $\operatorname{supp}\varphi\cdot\mathbf{1}_{\Delta_\gamma}\subset\frac12\Delta_\gamma$ и $\int_{\Delta_\gamma}\varphi>c(m(\Delta_\gamma))^{4/3}$. Здесь $\frac12\Delta_\gamma$ обозначает дугу с той же серединой, что и $\Delta_\gamma$, но вдвое меньшей длины. Легко проверить, что

$$\int_{\mathrm{T}}\frac{\varphi(\zeta)}{|\zeta-\xi|^2}\,dm(\zeta)=+\infty$$

* Такое множество F нетрудно выбрать среди множеств канторовского типа.

для всех $\xi \in F$. Положим

$$g_\gamma(\xi) = \int\limits_{\Delta_\gamma} \frac{\varphi(\zeta)}{|\zeta - \xi|^2}\, dm(\zeta) \quad (\xi \in F),$$

$$f_\gamma(z) = \int\limits_{\Delta_\gamma} \varphi(\zeta) \frac{\zeta + z}{\zeta - z}\, dm(\zeta) \quad (z \in \mathrm{D}),$$

$$f(z) = \sum_{\gamma \in \Gamma} f_\gamma(z) = \int\limits_{\mathrm{T}} \varphi(\zeta) \frac{\zeta + z}{\zeta - z}\, dm(\zeta).$$

Ясно, что функции $f$ и $f_\gamma$ принадлежат диск-алгебре, поскольку $\varphi \in \in \Lambda_{1/3}$. Аппроксимируя функцию $\varphi_\gamma$ линейными комбинациями $\delta$-мер, найдем дискретную положительную меру $\mu_\gamma$ с конечным числом нагрузок такую, что $\operatorname{supp} \mu_\gamma \subset \frac{1}{2}\Delta_\gamma$, $\|\mu_\gamma\| < \int\limits_{\Delta_\gamma} \varphi\, dm$, $\int \frac{d\mu_\gamma(\zeta)}{|\zeta - \xi|^2} > \frac{1}{2} g_\gamma(\xi)$ для всех $\xi \in F$

и

$$\left| f_\gamma(r\xi) - \int\limits_{\Delta_\gamma} \frac{\zeta + r\xi}{\zeta + r\xi}\, d\mu_\gamma(\zeta) \right| < \varepsilon_\gamma$$

для всех $\xi \in F$ и всех $r \in (0, 1)$, где $\{\varepsilon_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ — суммируемое семейство положительных чисел. Рассмотрим меру $\mu = \sum_{\gamma \in \Gamma} \mu_\gamma$. Она обладает следующими свойствами:

а) $\displaystyle\int\limits_{\mathrm{T}} \frac{d\mu(\zeta)}{|\zeta - \xi|^2} = +\infty$ для всех $\xi \in F$,

б) $\displaystyle\int \frac{d\mu(\zeta)}{|\zeta - \xi|^2} < +\infty$, если $\xi \notin F$ и $\mu(\{\xi\}) = 0$,

в) $\displaystyle\operatorname*{vrai\,sup}_{\xi \in F} \left| \int \frac{\zeta + \xi}{\zeta - \xi}\, d\mu(\zeta) \right| < +\infty$.

Рассмотрим внутреннюю функцию $I$, определенную равенством

$$\frac{1 + I(z)}{1 - I(z)} = \int\limits_{\mathrm{T}} \frac{\zeta + z}{\zeta - z}\, d\mu(\zeta).$$

Эта функция обладает всеми нужными нам свойствами.

7. Остановимся более подробно на случае счетнократной внутренней функции. Отметим, что такие функции представляют интерес также в связи с теоремой Д. Кларка (см. [7] и [3]), из которой вытекает следующее утверждение.

Если $I$ — счетнократная внутренняя функция, то пространство $K_I = H^2 \ominus IH^2$ имеет ортогональный базис, состоящий из воспроизводящих ядер $\{k_I(z, \lambda) : \lambda \in \Lambda \subset \mathrm{T}\}$, где $k_I(z, \lambda) = \dfrac{1 - \overline{I(\lambda)} I(z)}{1 - \bar{\lambda} z}$.

Таким образом, теорема 2 дает много примеров внутренних фнкций $I$, обладающих этим свойством. Однако, в силу следствия 3 предложения 4 и той же теоремы Д. Кларка она не дает всех таких примеров.

Пусть $H^p$ обозначает обычный класс Харди (см., например, [2]). Обозначим через $H^{p,\infty}$ пространство всех функций $f \in H^{p,2}$ таких, что $m\{\zeta \in \mathbf{T} : |f(\zeta)| > A\} = O(A^{-p})$. Символом $H_0^{p,\infty}$ будем обозначать пространство всех $f \in H^{p,\infty}$ таких, что $m\{\zeta \in \mathbf{T} : |f(\zeta)| > A\} = o(A^{-p}(A \to +\infty)$.

Теорема 4. *Пусть $\{a_n\}_{n\geq 1}$—последовательность точек единичного круга $\mathbf{D}$ такая, что $\sum_{n\geq 1}(1-|a_n|)^{1/2} < +\infty$. Тогда произведение Бляшке, построенное по последовательности нулей $\{a_n\}_{n\geq 1}$, счетнократно и $B' \in H_0^{1/2,\infty}$.*

Доказательство. Из результатов работы [6] следует, что достаточно доказать, что $(DB)(\zeta) = \sum_{n\geq 1}\frac{1-|a_n|^2}{|1-\bar{a}_n\zeta|^2} \in L_0^{1/2,\infty}$, т. е. $m\{\zeta \in \mathbf{T} : (DB)(\zeta) > A\} = o(A^{-1/2})(A \to +\infty)$. Известно, что пространство $L_0^{1/2,\infty}$ является 1/2-выпуклым (см. [8] и [9]). Отсюда сразу вытекает, что $DB \in L_0^{1/2,\infty}$, поскольку $\left\|\frac{1}{|1-\bar{a}_n\zeta|^2}\right\|_{L_0^{1/2,\infty}} \leqslant C$ и $\sum_{n\geq 1}(1-|a_n|)^{1/2} < +\infty$.

Отметим, что близкие к теореме 4 результаты имеются в работах [6], [10], [11].

Следствие (П. Ахерн—Д. Кларк [12]). *В условиях теоремы 4 функция $\frac{B-a}{1-\bar{a}B}$ является произведением Бляшке при всех $a \in \mathbf{D}$.*

Доказательство. Пусть $I = \exp F = \exp\left(\int_{\mathbf{T}}\frac{z+\zeta}{z-\zeta}d\mu(\zeta)\right)$ — сингулярный сомножитель функции $\frac{B-a}{1-\bar{a}B}$. Тогда из теоремы 4 и результатов работы [6] вытекает, что $I' \in H_0^{1/2,\infty}$. Следовательно, $F' \in H_0^{1/2,\infty}$. Отсюда получаем, что $F \in H_0^{1,\infty}$ (простое доказательство этого факта можно извлечь из [13], стр. 55—56), а тогда $\mu \equiv 0$ (см. [14] или [13]) и мы приходим к противоречию.

Теорема 5. *Пусть $\{r_n\}_{n\geq 1}$—последовательность точек промежутка [0, 1) такая, что $\sum_{n\geq 1}(1-r_n) < +\infty$ и $\sum_{n\geq 1}(1-r_n)^{1/2} = +\infty$; $F$—замкнутое подмножество окружности $\mathbf{T}$. Тогда существует произведение Бляшке $B$ с последовательностью нулей $\{a_n\}_{n\geq 1}$ ($|a_n| = r_n$) такое, что $F = \{\zeta \in \mathbf{T} : (DB)(\zeta) = +\infty\}$.*

Доказательство. Пусть сначала $F = \varnothing$. Нетрудно построить последовательность точек $\{\zeta_n\}_{n\geq 1}$ множества $F$ и строго возрастающую последовательность натуральных чисел $\{n_j\}_{j\geq 1}$ так, чтобы

$$F = \bigcap_{j \geq 1} \bigcup_{k=n_{j-1}+1}^{n_j} D(\zeta_k, (1-r_k)^{1/2}),$$

где $n=0$, $D(\zeta, a) \stackrel{\mathrm{dif}}{=} \{\xi \in \mathbf{T} : |\xi - \zeta| < a\}$. Положим $a_n = r_n \zeta_n$. Ясно, что $F$—множество всех предельных точек последовательности $\{a_n\}_{n \geq 1}$. Поэтому $(DB)(\zeta) < +\infty$, если $\zeta \overline{\in} F$. Заметим, что если $\xi \in \in D(\zeta_n, (1-r_n)^{1/2})$, то $\frac{1-|a_n|^2}{|a_n - \xi|^2} > 1$. Отсюда вытекает, что $(DB)(\xi) = =+\infty$, если $\xi \in F$.

Если $F = \varnothing$, то возьмем последовательность положительных чисел $\{t_n\}_{n \geq 1}$ такую, что $\sum_{n \geq 1} \frac{1-r_n}{t_n^2} < +\infty$, $t_n \to 0$. Тогда в качестве $a_n$ можно взять $r_n e^{it_n}$.

8. Пусть $\mu$—конечная борелевская мера на окружности $\mathbf{T}$. Положим

$$\|\mu\|_p = \begin{cases} \left(\sum\limits_{\zeta \in \mathbf{T}} |\mu(\{\zeta\})|^p\right)^{1/p}, & \text{если } \mu\text{-дискретна} \\ +\infty, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

С каждой внутренней функцией $I$ свяжем функцию $\Phi_p$, определенную формулой $\Phi_p(\alpha) = \|\sigma_\alpha\|_p$.

Теорема 6. *Пусть $I$—внутренняя функция, $0 < p < 1$. Тогда $I' \in H^{1-p}$ в том и только в том случае, когда $\Phi_p \in L^p$, при этом $\|I'\|_{H^{1-p}}^{1-p} = \|\Phi_p\|_{L^p}^p$.*

Доказательство. Можно считать, что $I$—счетнократна. Известно (см. [6]), что $I' \in H^{1-p}$ в том и только в том случае, когда $DI \in L^{1-p}$. Из предложения 1 вытекает следующее равенство:

$$\int (DI)^{1-p}\, dm = \int \left( \int (DI)^{1-p}\, d\sigma_\alpha \right) dm(\alpha).$$

В силу предложения 4

$$\int (DI)^{1-p}\, d\sigma_\alpha = \sum_{I_\alpha(\zeta)=\alpha} ((DI)(\zeta))^{-p} = \|\sigma_\alpha\|_p^p,$$

если мера $\sigma_\alpha$-дискретна. Из этих двух равенств получаем:

$$\|I'\|_{H^{1-p}}^{1-p} = \|\Phi_p\|_{L^p}^p.$$

Замечание. Доказательство теоремы показывает, что если $I(0)=0$, то $T((DI)^{1-p}) = \Phi_p^p$.

Следствие. *Пусть $I$— внутренняя функция. Если $I' \in H^{1-p}$, то $\Phi_p < +\infty$ почти всюду на $\mathbf{T}$.*

Следующее утверждение „почти обращает" это следствие при $p = \frac{1}{2}$.

Теорема 7. *Если* $\Phi_{1/2}(\alpha) < +\infty$ *при некотором* $\alpha \in T$, *то* $I' \in H^{1/2,\infty}$ *и, следовательно, в силу теоремы 6* $\Phi_p < +\infty$ *почти всюду на* T *при всех* $p > \frac{1}{2}$.

Доказательство. Имеем

$$\mathrm{Re}\,\frac{\alpha + I(z)}{\alpha - I(z)} = \int \mathrm{Re}\,\frac{\zeta + z}{\zeta - z}\, d\sigma_\alpha(\zeta) \quad (z \in D),$$

откуда

$$I'(z) = \frac{(\alpha - I(z))^2}{\alpha} \int \frac{\zeta}{(\zeta - z)^2}\, d\sigma_\alpha(\zeta) \quad (z \in D).$$

Отсюда вытекает, что

$$(DI)(\xi) \leqslant 4 \int \frac{d\sigma_\alpha(\zeta)}{|\zeta - \xi|^2} \quad (\xi \in T).$$

Осталось заметить, что функция, стоящая в правой части неравенства, принадлежит пространству $L^{1/2,\infty}$ (см. [8] и [9]).

9. В заключение рассмотрим класс всех внутренних функций $I$ таких, что $DI = +\infty$ почти всюду на T. Мы увидим, что такие внутренние функции устроены в некотором смысле так же, как и многомерные внутренние функции.

Измеримые функции $f_1$ и $f_2$, заданные, соответственно, на вероятностных пространствах $(x_1, \mu_1)$, $(x_2, \mu_2)$ будем называть эквивалентными, если существует изоморфизм (mod 0) $\varphi$ первого вероятностного пространства на второе такой, что $f_2 o \varphi = f_1$ почти всюду.

Рассмотрим функцию $z_1 : T \times T \to T$, $z_1(\zeta_1, \zeta_2) = \zeta_1$.

Теорема 8. *Внутренняя функция* $I$ *эквивалентна функции* $z_1$ *в том и только в том случае, когда* $I(0) = 0$ *и* $DI = +\infty$ *п.в. на* T.

Доказательство. Внутренняя функция $I$ является эндоморфизмом (т. е. сохраняет меру) тогда и только тогда, когда $I(0) = 0$. Из результатов работы В. А. Рохлина [15] вытекает, что гомоморфизм $I$ эквивалентен гомоморфизму $z_1$ в том и только в том случае, когда мера $\sigma_\alpha$ является непрерывной при почти всех $\alpha \in T$, т. е. когда $DI = +\infty$ почти всюду на T в силу предложения 4 и следствия 2 леммы 1.

С каждой голоморфной функцией $I$, $|I| < 1$, в полидиске (или шаре) можно аналогично связать семейства мер $\{\tau_\alpha\}_{\alpha\in T}$ и $\{\sigma_\alpha\}_{\alpha\in T}$. Например, можно положить $\tau_\alpha = \lim\limits_{r \to 1} \mathrm{Re}\,\dfrac{\alpha + I(rz)}{\alpha - I(rz)}$ (в слабой топологии пространства мер на торе (сфере)), а в качестве $\sigma_\alpha$ взять сингулярную часть меры $\tau_\alpha$. При этом будет иметь место естественный аналог предложения 1.

Предложение 5. *В многомерном случае все меры* $\tau_\alpha$ *(а значит, и* $\sigma_\alpha$*) непрерывны.*

Доказательство. Ясно, что

$$\left|\frac{\alpha + I(z)}{\alpha - I(z)}\right| = O\left(\frac{1}{1 - p(z)}\right), \qquad (6)$$

где $p$ — функционал Минковского полидиска (шара). С другой стороны, если бы $\tau_\alpha(\{\zeta\}) > 0$ при некотором $\zeta$, то

$$\left|\frac{\alpha + I(r\zeta)}{\alpha - I(r\zeta)}\right| \geqslant \frac{C}{(1-r)^d} = \frac{C}{(1-p(r\zeta))^d}, \tag{7}$$

где $d$ — комплексная размерность области задания функции $I$. Осталось заметить, что оценки (6) и (7) противоречат друг другу, если $d > 1$.

Используя предложение 5, аналогично теореме 8 можно доказать следующее утверждение.

Теорема 9. *Пусть $I$ — внутренняя функция в полидиске (или шаре) комплексной размерности $d \geqslant 2$. Тогда функция $I$ эквивалентна функции $z_1$ в том и только в том случае, когда $I(0) = 0$.*

Замечание. Теорема 9 имеет место не только для полидиска и шара, но и для любой области $\Omega$, $\Omega \neq \mathbf{D}$, являющейся конечным декартовым произведением классических областей. Все необходимые сведения о классических областях можно найти в [16].

Ленинградский государственный университет

Поступила 30. VII. 1984

Ա. Բ. ԱԼԵՔՍԱՆԴՐՈՎ. Ներքին ֆունկցիաների եզրային արժեքների պատիկությունը (*ամփոփում*)

*Աշխատանքում ներմուծված է ներքին ֆունկցիաների եզրային արժեքների պատիկության հասկացությունը։ Ցույց է տրվում, որ Բլյաշկեի վերջավոր արտադրյալից տարբեր ներքին ֆունկցիան ընդունում է կամայական $\alpha \in C$, $|\alpha| = 1$ արժեք կամ հաշվելի, կամ էլ կոնտինուալ անգամ։ Եզրային արժեքների պատիկության հասկացության ներմուծման համար գործածվող ապարատը օգտակար է նաև լինում ներքին ֆունկցիաների եզրային վարքի ուրիշ հարցերում։*

A. B. ALEKSANDROV. *Multiplicity of boundary values of inner functions* (summary)

A concept of multiplicity of boundary values is introduced for inner functions. It is proved that every value $\alpha \in C$, $|\alpha| = 1$, of an inner function has countable or continual multiplicity. The technique used to define the notion of multiplicity admits an application to some other problems concerning the boundary behaviour of inner functions.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Э. Коллингвуд, А. Ловатер.* Теория предельных множеств, М., «Мир», 1971.
2. *К. Гофман.* Банаховы пространства аналитических функций, М., ИЛ, 1963.
3. *S. V. Hruščev, N. K. Nikol'skii, B. S. Pavlov.* Unconditional bases of exponentials and of reproducing kernels, Lect. Notes Math., v. 864. 1981, 214—335.
4. *В. В. Пеллер, С. В. Хрущев.* Операторы Ганкеля, наилучшие приближения и стационарные гауссовские процессы, УМН, 37, вып. 1 (223), 53—124.
5. *C. Carathéodory.* Funktionen theorie. Band 1, 2, Verlag, Birkhäuser Basel, 1950.
6. *R. R. Ahern. D. N. Clark.* On inner functions with $H^p$-derivate, Mich. Math. J., v. 21, № 2, 1974, 115—128.
7. *D. Clark.* One dimensional perturbutions of restricted shifts, J. anal. math., v. 25, 1972, 169—191.
8. *N. J. Kalton.* Linear operators on $L_p$ for $0<p<1$, Trans. Amer. Math. Soc., v. 259, № 2, 1980, 319—355.
9. *L. Carleson.* On a class of meromorphic functions and its associated exceptional sets, Uppsala, 1950.

10. *C. N. Linden.* $H^p$-derivatives of Blaschke products, Mich. Math. J., v. 23, № 1, 1976, 43—51.

11. D. *Protas.* Blaschke product with derivative in $H^p$ and $B^p$, Mich. Math. J., v. 20, № 4, 1974, 393—396.

12. *P. R. Ahern, D. N. Clark.* On inner functions with $B^p$ derivative, Mich Math. J., v. 23, № 2, 1976, 107—118.

13. *A. B. Aleksandrov.* Essays on non—locally convex Hardy classes. Lect. Notes Math., v. 864, 1981, 1—89.

14. *А. Б. Александров.* Об $A$-интегрируемости граничных значений гармонических функций, Матем. заметки, 30, № 1, 1981, 59—72.

15. *В. А. Рохлин.* Об основных понятиях теории меры, Матем. сб., 25, № 1, 1949, 107—150.

16. *Хуа Ло-кен.* Гармонический анализ функций многих комплексных переменных в классических областях, М., ИЛ, 1959.