ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XXII, № 5, 1987 Математика

УДК 517.53

А. М. ДЖРБАШЯН

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ КЛАССОВ МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ С НЕОГРАНИЧЕННОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ ЦУДЗИ

Введение

В настоящей статье установлены канонические факторизации широких классов мероморфных в полуплоскости функций, характеристики Цудзи которых могут иметь степенной рост. Для изъяснения сути работы необходим краткий обзор ряда известных результатов, часть которых лежит в ее основе.

1. Условие ограниченности характеристической функции Неванлинны $T(r, f)$ $(0<r<1)$ для мероморфной в круге $D=\{z:|z|<1\}$ функции $f(z)$ определяет класс N Неванлинны функций ограниченного вида в круге. Как хорошо известно, Неванлинна [1] установил параметрическое представление класса N, записывающееся в виде произведения дроби двух функций Бляшке и экспоненты от интеграла Шварца с мерой ограниченной вариации.

Б. Я. Левиным [2] (см. также [3], гл. IV, § 2), при решении задач единственности аналитических в полуплоскости функций, был установлен аналог формулы Иенсена-Неванлинны для полуплоскости.

Цудзи [4] получил сферический аналог формулы Б. Я. Левина и, введя соответствующие сферические характеристики для полуплоскости, установил аналоги первой и второй основных теорем теории распределения значений для функций, мероморфных в полуплоскости. При этом, для характеристик, порождающихся самой формулой Б. Я. Левина, которые также принято называть характеристиками Цудзи, справедливы аналогичные результаты [5] (гл. I, § 5). Указанные два типа характеристик Цудзи имеют эквивалентный рост. В работе [4] Цудзи также доказал, что если для мероморфной в замкнутой полуплоскости функции ограничена его характеристика, то она ограниченного вида, т. е. представляется в виде частного от двух аналитических и ограниченных в полуплоскости функций.

По сути дела, более подробный результат о классах аналитических в полуплоскости функций, для которых ограничена характеристика Цудзи, был получен значительно ранее В. И. Крыловым [6]. Им были установлены параметрические представления классов $\mathbf{N}$ и $\mathbf{N}_m$ аналитических в верхней полуплоскости функций, для которых, соответственно

$$\sup_{y>0}\int_{-\infty}^{+\infty}\log^+|f(x+iy)|\,dx<+\infty,\quad \text{или}\quad \sup_{y>0}\int_{-\infty}^{+\infty}|\log|f(x+iy)||\,dx<+\infty. \tag{1}$$

После отображения $w = iz^{-1}$ класс $\mathbf{N}$ В. И. Крылова переходит в класс аналитических в правой полуплоскости функций, для которых ограничен специальный случай характеристики роста Цудзи, когда интеграл взят по всей касательной к мнимой оси окружности. При этом, классы $\mathbf{N}$ и $\mathbf{N}_m$ — суть строгие подмножества класса функций ограниченного вида в верхней полуплоскости. Следует отметить, однако, что характеристические функции как таковые В. И. Крыловым не были рассмотрены.

2. Результат Неванлинны о параметрическом представлении класса N мероморфных функций ограниченного вида в единичном круге $\mathbf{D}$ нашел существенное развитие в работах М. М. Джрбашяна [7], [8], [9]. В своей ранней работе [7] (см. также [8] — суть ее развернутое изложение) М. М. Джрбашян установил канонические факторизации новых, широких классов $N_\alpha^*(-1<\alpha<+\infty)$ мероморфных в круге функций, для которых характертстика Неванлинны может иметь степенной рост. Класс $N_\alpha^*(-1<\alpha<+\infty)$ — это множество тех мероморфных в круге $\mathbf{D}$ функций $f(z)$, для которых

$$\int_0^1 (1-r)^\alpha T(r, f)\, dr < +\infty. \qquad (2$$

В основе настоящей статьи лежат сформулированные в приведенных ниже теоремах I и II результаты работы [7] М. М. Джрбашяна.

Теорема I. 1°. *Пусть $\zeta \in \mathbf{D}$ — любая точка. Тогда при любом $\alpha\ (-1<\alpha<+\infty)$ функция*

$$A_\alpha(z, \zeta) \equiv \exp\{-\Omega_\alpha(z, \zeta)\} \equiv \exp\left\{-\int_{|\zeta|^2}^1 \frac{(1-t)^{1+\alpha}}{(1-z\zeta^{-1}t)^{2+\alpha}}\frac{dt}{t}\right\} \qquad (3)$$

аналитична в $\mathbf{D}$ и имеет нуль, притом первого порядка, только в точке $z=\zeta$.

2°. *Пусть $f(z) \in N_\alpha^*(-1<\alpha<+\infty)\ (f(z)\not\equiv 0)$ — любая функция, а $\{a_\mu\}$ и $\{b_\nu\}$ — ее нули и полюсы, отличные от $z=0$. Тогда*

$$\iint_{\mathbf{D}} (1-|\zeta|^2)^\alpha |\log|f(\zeta)||\, d\sigma(\zeta) < +\infty$$

($d\sigma(\zeta)$ — элемент площади), и, одновременно, вместе с рядами

$$\sum_\mu (1-|a_\mu|)^{2+\alpha}, \quad \sum_\nu (1-|b_\nu|)^{2+\alpha}$$

равномерно сходятся бесконечные произведения

$$\pi_\alpha(z, \{a_\mu\}) = \prod_\mu A_\alpha(z, a_\mu), \quad \pi_\alpha(z, \{b_\nu\}) = \prod_\nu A_\alpha(z, b_\nu).$$

Отметим, что эти произведения при натуральных значениях α были позже рассмотрены также Цудзи [10] (гл. V). Далее, при $\alpha = 0$ произведение π_α, по существу, переходит в произведение Бляшке.

Теорема II. *Любая функция $f(z) \in N_\alpha^*(-1<\alpha<+\infty)$ допускает факторизацию вида*

$$f(z) = \frac{K_\alpha}{C_\lambda} z^\lambda \frac{\pi_\alpha(z, \{a_\mu\})}{\pi_\alpha(z, \{b_\nu\})} \times$$

$$\times \exp\left\{\frac{2(\alpha+1)}{\pi} \iint\limits_D (1-|\zeta|^2)^\alpha \frac{\log|f(\zeta)|}{(1-z\overline{\zeta})^{\alpha+2}} d\sigma(\zeta)\right\}; \ |z|<1, \tag{4}$$

где C_λ — первый ненулевой коэффициент разложения Лорана функции $f(z)$ в окрестности начала координат, а K_α — константа, зависящая лишь от α и λ (причем $K_\alpha = 1$ при $\lambda = 0$).

Как нетрудно заметить, в определении класса N_α^* $(-1 < \alpha < +\infty)$ заложена структура оператора дробного интегрирования Римана-Лиувилля. Как хорошо известно, в дальнейшем, с усовершенствованием методов исследования и с применением этого оператора М. М. Джрбашяном [9] (гл. IX) была построена новая, более совершенная теория параметрических представлений несколько иных классов N_α $(-1 < \alpha < +\infty)$ мероморфных в круге функций, для которых ограничена новая характеристическая функция сложной структуры. Однако ранние результаты М. М. Джрбашяна остаются ценными и актуальными в силу их простоты в приложениях. В связи с этим следует отметить работы Ф. А. Шамояна [11], [12], где сначала установлены параметрические представления для классов N_α^* $(-1 < \alpha < +\infty)$, а затем найдены их существенные приложения в описании идеалов алгебр аналитических в круге функций с ограничением на рост вблизи границы круга.

3. Рассматривая задачи представимости мероморфных в полуплоскости функций, совершенно естественно, как и в круге, дать возможность функции для более быстрого роста и, тем самым, рассматривать по возможности более широкие классы мероморфных функций.

В работе автора [13] были установлены зависящие от непрерывного параметра $\alpha(-1 < \alpha < +\infty)$ семейства формул типа Карлемана и Б. Я. Левина, введены семейства характеристик типа характеристик Неванлинны для угла и характеристик Цудзи. Эти результаты позволили там же получить новые факторизации для аналитических в замкнутой полуплоскости функций любого конечного порядка, а также параметрические представления новых классов, типа В. И. Крылова, функций, аналитических в полуплоскости. Построение этой теории существенным образом опиралось на свойства оператора интегродифференцирования Вейля, а также на свойства исследованных автором [14], [15] произведений типа Бляшке для полуплоскости.

Данная статья посвящена установлению полуплоскостных аналогов ранних результатов М. М. Джрбашяна [7] и связанных с ними результатов Ф. А. Шамояна [11]. Следует отметить, что, не совпадая с классами функций из [13], рассмотренные в статье классы мероморфных функций обладают существенно более простой структурой.

В §§ 1, 2 на основе теоремы II, посредством применения специального метода отображения с последующим предельным переходом, получены зависящие от непрерывного параметра $\alpha(1 \leqslant \alpha < +\infty)$ семейства формул типа Б. Я.Левина (теорема 1.1) и характеристик типа Цудзи (п. 1.4). Затем, тем же путем установлены канонические факторизации для классов типа В. И. Крылова мероморфных в полуплоскости функций, для которых характеристика Цудзи может иметь степенной рост (теорема 2.2). В полученных канонических факторизациях участвуют рассмотренные автором совместно с Г. В. Микаеляном [16] произведения типа Бляшке для полуплоскости.

Следует отметить, что аналогичный метод отображения с последующим предельным переходом был применен также в недавней работе [17] М. М. Джрбашяна и А. Э. Джрбашяна, где были установлены интегральные представления аналитических в верхней полуплоскости $G^{(+)}$ функций, принадлежащих $L^p(G^{(+)}, y^\alpha dxdy)$ $(-1<\alpha<+\infty,\ 1\leqslant p<+\infty)$.

В § 3 установлены полуплоскостные аналоги результатов работы [11] Ф. А. Шамояна. В частности, установлены (в лемме 3.1) оценки типа Цудзи (см. [10], теорему V.25) для произведений типа Бляшке из [16]. Леммы § 3 вместе с теоремой 2.2 дают возможность установить в конце статьи теорему 3.1 завершенного характера — о параметрических представлениях рассмотренных в § 2 классов мероморфных в полуплоскости функций.

§ 1. Формулы типа Б. Я. Левина и характеристики типа Цудзи

1.1. Пусть функция $F(w)$ мероморфна в нижней полуплоскости $G^{(-)}=\{w: \operatorname{Im} w<0\}$ и при любом $\rho\in(-\infty, 0)$ в полуплоскости $G_\rho^{(-)}=\{w: \operatorname{Im} w<\rho\}$ содержится не более чем конечное число ее нулей a_μ и полюсов b_ν. Будем полагать, что $\rho\in(-\infty, 0)$ фиксировано и $R>\max\limits_{\mu,\nu}\{|\operatorname{Im} a_\mu|, |\operatorname{Im} b_\nu|\}$. Отображение $z=[w+i(R-\rho)]/R=$ $=(w-i\rho)/R+i$ переводит круг $|w+i(R-\rho)|\leqslant R$ в единичный. С другой стороны, в этом круге содержится не более чем конечное число нулей и полюсов функции $F(w)$, и они могут лежать лишь выше ее центра. Поэтому функция

$$f(z)\equiv F(w);\quad z=(w-i\rho)/R+i$$

мероморфна в замкнутом единичном круге и имеет там не более чем конечное число нулей $a_\mu^*=(a_\mu-i\rho)/R+i$ и полюсов $b_\nu^*=(b_\nu-i\rho)/R+i$, которые могут лежать в верхней полуплоскости.

Для функции $f(z)$, очевидно, справедлива формула (4) теоремы II при любом $\alpha>-1$. Причем в ней, как легко заметить, $\lambda=0$, $K_\lambda=1$, а $C_\lambda=C_0=f(0)$. Заменим в этой формуле α на $\alpha-1$ и вернемся к функции $F(w)$. Тогда, ввиду того, что при $\zeta\in O(R,\rho)=\{w: |w+i(R-$ $-\rho)|<R\}$ имеем

$$1-\left|\frac{\zeta-i\rho}{R}+i\right|^2=2\frac{|\operatorname{Im}\zeta-\rho|}{R}-\frac{|\zeta-i\rho|^2}{R^2}\in(0,1], \tag{1.1}$$

$$1-\left(\frac{w-i\rho}{R}+i\right)\left(\frac{\bar\zeta+i\rho}{R}-i\right)=\frac{1}{R}\left[i(w-\bar\zeta-2i\rho)-\frac{(w-i\rho)(\bar\zeta+i\rho)}{R}\right], \tag{1.1'}$$

приходим к представлению вида

$$\log F(w) = \frac{\alpha 2^{\alpha}}{\pi} \iint\limits_{O(R,\,\rho)} \left(1 - \frac{|\zeta - i\rho|^2}{2R\,|\mathrm{Im}\,\zeta - \rho|}\right)^{\alpha-1} \times$$

$$\times \frac{|\mathrm{Im}\,\zeta - \rho|^{\alpha-1} \log|F(\zeta)|}{\left[i(w - \bar{\zeta} - 2i\rho) - \dfrac{(w - i\rho)\,(\bar{\zeta} + i\rho)}{R}\right]^{1+\alpha}} d\sigma(\zeta) -$$

$$- \sum_{a_\mu \in O(R,\,\rho)} \Omega_\alpha\left(\frac{w - i\rho}{R} + i,\ \frac{a_\mu - i\rho}{R} + i\right) +$$

$$+ \sum_{b_\nu \in O(R,\,\rho)} \Omega_\alpha\left(\frac{w - i\rho}{R} + i,\ \frac{b_\nu - i\rho}{R} + i\right) -$$

$$- \log F(-i(R - \rho));\ w \in O(R,\,\rho),\ 0 \leqslant \alpha < +\infty. \tag{1.2}$$

Для дальнейших целей важна также следующая формула, непосредственно вытекающая из (3):

$$\Omega_\alpha\left(0,\ \frac{s - i\rho}{R} + i\right) = \frac{2^{1+\alpha}}{R^{1+\alpha}} |\mathrm{Im}\,s - \rho|^{1+\alpha} \int\limits_0^{1 - |s - i\rho|^2/2R|\mathrm{Im}\,s - \rho|} \frac{\tau^\alpha\, d\tau}{1 - \dfrac{2}{R}\,|\mathrm{Im}\,s - \rho|\,\tau} =$$

$$= (2R^{-1})^{1+\alpha} |\mathrm{Im}\,s - \rho|^{1+\alpha} I_\alpha(s,\ \rho,\ R);\ 0 < \alpha < +\infty. \tag{1.3}$$

1.2. Для установления формулы типа Б. Я. Левина необходимы следующие предварительные леммы.

Лемма 1.1. *Пусть* $\varphi(t) \geqslant 0$ — *измеримая функция на оси* $0 < t < +\infty$. *Тогда при любом* $\alpha\ (1 \leqslant \alpha < +\infty)$ *имеет место равенство*

$$\int\limits_0^{+\infty} t^{\alpha-1} \varphi(t)\, dt = \sup_{\varepsilon > 0} \int\limits_\varepsilon^{+\infty} (t - \varepsilon)^{\alpha-1} \varphi(t)\, dt.$$

Доказательство. Во-первых, очевидно, что правая часть требуемого равенства не больше, чем его левая часть. Во-вторых, как нетрудно убедиться, для любой последовательности $\varepsilon_n \downarrow 0$ правый интеграл, монотонно возрастая, стремится к левому.

Лемма 1.2. *Пусть* $\psi(\zeta)$ — *измеримая функция в полуплоскости* $G_\rho^{(-)}$ $(-\infty < \rho < 0)$ *и при данном* $\alpha\ (1 \leqslant \alpha < +\infty)$

$$\iint\limits_{G_\rho^{(-)}} |\mathrm{Im}\,\zeta - \rho|^{\alpha-1} |\psi(\zeta)|\, d\sigma(\zeta) < +\infty.$$

Тогда

$$\lim_{R \to +\infty} \iint\limits_{O(R,\,\rho)} \left(1 - \frac{|\zeta - i\rho|^2}{2R\,|\mathrm{Im}\,\zeta - \rho|}\right)^{\alpha-1} |\mathrm{Im}\,\zeta - \rho|^{\alpha-1} \psi(\zeta)\, d\sigma(\zeta) =$$

$$= \iint\limits_{G_\rho^{(-)}} |\mathrm{Im}\,\zeta - \rho|^{\alpha-1} \psi(\zeta)\, d\sigma(\zeta).$$

Доказательство. Введем в рассмотрение функцию

$$P_{\alpha,\rho}(\zeta, R) \equiv \begin{cases} \left(1 - \dfrac{|\zeta - i\rho|^2}{2R\,|\mathrm{Im}\,\zeta - \rho|}\right)^{\alpha-1} - 1 & \text{при } \zeta \in O(R, \rho)' \\ -1 \quad \text{при } \zeta \bar{\in} O(R, \rho). \end{cases}$$

Тогда, очевидно, утверждение леммы будет эквивалентно соотношению

$$\lim_{R\to+\infty} \iint\limits_{G_\rho^{(-)}} P_{\alpha,\rho}(\zeta, R)\,|\mathrm{Im}\,\zeta - \rho|^{\alpha-1}\,\psi(\zeta)\,d\sigma(\zeta) = 0. \tag{1.4}$$

Для доказательства этого соотношения заметим, что $|P_{\alpha,\rho}(\zeta, R)| \leqslant 1$ при $\zeta \in G_\rho^{(-)}$. С другой стороны, для любого фиксированного $\zeta \in G_\rho^{(-)}$ имеем $\lim\limits_{R\to+\infty} P_{\alpha,\rho}(\zeta, R) = 0$. Поэтому, в силу теоремы Лебега, при $R \to +\infty$ стремится к нулю интеграл в (1.4), и лемма доказана.

Теорема 1.1. *Пусть $F(w)$ — мероморфная в нижней полуплоскости $G^{(-)} = \{w : \mathrm{Im}\,w < 0\}$ функция, имеющая при любом $\rho \in (-\infty, 0)$ не более чем конечное число нулей a_μ и полюсов b_ν в полуплоскости $G_\rho^{(-)} = \{w : \mathrm{Im}\,w < \rho\}$. Далее, пусть при данном $\alpha\ (1 \leqslant \alpha < +\infty)$ выполнено условие*

$$\iint\limits_{G^{(-)}} |\mathrm{Im}\,\zeta|^{\alpha-1}\,|\log|F(\zeta)||\,d\sigma(\zeta) < +\infty. \tag{1.5}$$

Тогда при любом $\rho \in (-\infty, 0)$ справедлива формула

$$0 = \frac{\alpha}{2\pi} \iint\limits_{G_\rho^{(-)}} |\mathrm{Im}\,\zeta - \rho|^{\alpha-1} \log|F(\zeta)|\,d\sigma(\zeta) -$$

$$-\frac{1}{1+\alpha} \sum_{a_\mu \in G_\rho^{(-)}} |\mathrm{Im}\,a_\mu - \rho|^{1+\alpha} + \frac{1}{1+\alpha} \sum_{b_\nu \in G_\rho^{(-)}} |\mathrm{Im}\,b_\nu - \rho|^{1+\alpha} -$$

$$-2^{-\alpha} \lim_{t\to+\infty} t^{1+\alpha} \log|F(-it)|, \tag{1.6}$$

где последний предел существует и конечен.

Доказательство. В силу леммы 1.1, (1.5) обеспечивает выполнение условий леммы 1.2 для функции $\psi(\zeta) \equiv \log|F(\zeta)|$. Следовательно, при $R \to +\infty$ интеграл в формуле (1.2) с $w = -i(R - \rho)$ стремится к интегралу формулы (1.6). Теперь заметим, что как очевидно из (1.3), при любых фиксированных $\rho < 0$ и $s \in G_\rho^{(-)}$ имеем $\lim\limits_{R\to+\infty} I_\alpha(s, \rho, R) = (1+\alpha)^{-1}$. Поэтому, ввиду конечности сумм в формуле (1.2) (с $w = -i(R-\rho)$), предельный переход $R \to +\infty$ преобразует их к суммам (1.6). Существование и конечность последнего предела обеспечивается существованием и конечностью остальных пределов.

1.3. В теореме этого пункта приведен специальный случай формулы Б. Я. Левина. Ее утверждение нетрудно получить из теоремы XX работы

В. И. Крылова [6] при помощи предельного перехода. Затем приведены соответствующие характеристики Цудзи.

Теорема 1.2. *Пусть функция $F(w)$ мероморфна в полуплоскости $G^{(-)}$, а $\{a_\mu\}\subset G^{(-)}$ и $\{b_\nu\}\subset G^{(-)}$ — соответственно нули и полюсы этой функции. Тогда, если при любом $\rho<0$ в полуплоскости $G_\rho^{(-)}$ лежит не более чем конечное число точек b_ν, и $\Phi(w)\equiv F(w+i\rho)\in \mathbf{N}_m$, то справедлива формула*

$$\sum_{a_\mu\in G_\rho^{(-)}}|\operatorname{Im} a_\mu-\rho|-\sum_{b_\nu\in G_\rho^{(-)}}|\operatorname{Im} b_\nu-\rho|=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\log|F(u+i\rho)|\,du-\frac{1}{2}\lim_{t\to+\infty}t\log|F(-it)|\;(-\infty<\rho<0),\qquad(1.7)$$

где последний предел существует и конечен.

Предположим теперь, что $\mathbf{n}(t, F)$ — количество полюсов b_ν функции $F(w)$, лежащих в полуплоскости $G_t^{(-)}$ и рассмотрим функции

$$\mathbf{N}(\rho, F)=\sum_{b_\nu\in G_\rho^{(-)}}|\operatorname{Im} b_\nu-\rho|=\int_{-\infty}^{\rho}(\rho-t)\,d\mathbf{n}(t, F),$$

$$\mathbf{N}(\rho, F^{-1})=\sum_{a_\mu\in G_\rho^{(-)}}|\operatorname{Im} a_\mu-\rho|=\int_{-\infty}^{\rho}(\rho-t)\,d\mathbf{n}(t, F^{-1}),\qquad(1.8)$$

$$\mathbf{m}(\rho, F^{\pm1})=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\log^{\pm}|F(u+i\rho)|\,du,\qquad(1.9)$$

$$\mathbf{L}(\rho,F^{\pm1})=\mathbf{m}(\rho, F^{\pm1})+\mathbf{N}(\rho, F^{\pm1}).\qquad(1.10)$$

Заметим, что эти функции являются инверсиями специального случая характеристик Цудзи, рассмотренных в [5] (гл. I, § 5). При этом, формула Б. Я. Левина (1.7) переходит в соотношение равновесия вида

$$\mathbf{L}(\rho, F)=\mathbf{L}(\rho, F^{-1})+C_F\;(-\infty<\rho<0).\qquad(1.11)$$

1.4. В этом пункте из формул (1.6) типа Б. Я. Левина будет выведено зависящее от непрерывного параметра $\alpha(1\leqslant\alpha<+\infty)$ семейство характеристик типа Цудзи. Для этого сначала заметим, что

$$\frac{\alpha}{2\pi}\iint_{G_\rho^{(-)}}|\operatorname{Im}\zeta-\rho|^{\alpha-1}\log|F(\zeta)|\,d\sigma(\zeta)=\alpha\,[\mathbf{m}_\alpha(\rho, F)-\mathbf{m}_\alpha(\rho, F)^{-1})],$$

где функции $\mathbf{m}_\alpha$ — суть усреднения характеристик Цудзи (1.9):

$$\mathbf{m}_\alpha(\rho, F^{\pm1})=\int_{-\infty}^{\rho}(\rho-t)^{\alpha-1}\,\mathbf{m}(t, F^{\pm1})\,dt.$$

Далее, легко видеть, что

$$\sum_{b_\nu \in O_\rho^{(-)}} |\operatorname{Im} b_\nu - \rho|^{1+\alpha} = \int_{-\infty}^{\rho} (\rho - t)^\alpha \, d\mathbf{N}(t, F).$$

Поэтому, интегрированием по частям получаем

$$\frac{1}{1+\alpha} \sum_{b_\nu \in O_\rho^{(-)}} |\operatorname{Im} b_\nu - \rho|^{1+\alpha} = \alpha \mathbf{N}_\alpha(\rho, F),$$

где

$$\mathbf{N}_\alpha(\rho, F) = \frac{1}{1+\alpha} \int_{-\infty}^{\rho} (\rho - t)^{\alpha-1} \mathbf{N}(t, F) \, dt.$$

Аналогично, для нулей функции $F(w)$ имеем

$$\frac{1}{1+\alpha} \sum_{a_\mu \in O_\rho^{(-)}} |\operatorname{Im} a_\mu - \rho|^{1+\alpha} = \alpha \mathbf{N}_\alpha(\rho, F^{-1}).$$

В силу введенных обозначений формула (1.6) запишется в виде

$$\mathbf{m}_\alpha(\rho, F) + \mathbf{N}_\alpha(\rho, F) = \mathbf{m}_\alpha(\rho, F^{-1}) + \mathbf{N}_\alpha(\rho, F^{-1}) + C_\alpha(F) \quad (\rho < 0),$$

где $C_\alpha(F) \in (-\infty, +\infty)$ — постоянная, или, что то же самое, в виде соотношения равновесия

$$\mathbf{L}_\alpha(\rho, F) = \mathbf{L}_\alpha(\rho, F^{-1}) + C_\alpha(F) \quad (-\infty < \rho < 0), \tag{1.12}$$

где $\mathbf{L}_\alpha$ — характеристики типа Цудзи, являющиеся их усреднениями —

$$\mathbf{L}_\alpha(\rho, F^{\pm 1}) = \int_{-\infty}^{\rho} (\rho - t)^{\alpha-1} \left[\mathbf{m}(t, F^{\pm 1}) + \frac{1}{1+\alpha} \mathbf{N}(t, F^{\pm 1})\right] dt. \tag{1.13}$$

1.5. Общеизвестно, что для любой функции $f(z) \not\equiv 0, \infty$, мероморфной в единичном круге, имеет место соотношение равновесия вида $T(r, f) = T(r, f^{-1}) + C(f)$ $(0 < r < 1)$, где T — характеристика Неванлинны. В силу этого соотношения условие (2), определяющее классы N_α^* М. М. Джрбашяна, эквивалентно условию

$$\int_0^1 (1-r)^\alpha [T(r, f) + T(r, f^{-1})] \, dr < +\infty; \quad -1 < \alpha < +\infty,$$

или, если $0 \leqslant \alpha < +\infty$, условию $\sup\limits_{0<r<1} [T_\alpha(r, f) + T_\alpha(r, f^{-1})] < +\infty$, где T_α — характеристика типа Неванлинны следующего вида —

$$T_\alpha(r, f) = \int_0^r (r - t)^\alpha \, T(t, f) \, dt.$$

Однако ясно, что не для всех функций, мероморфных в полуплоскости $G^{(-)}$, выполнено соотношение равновесия (1.10) между характеристиками Цудзи. Поэтому прямыми аналогами классов N_α^* М. М. Джрбашяна следует считать классы мероморфных в $G^{(-)}$ функций $F(w)$, для которых

$$\int_{-\infty}^{0} |t|^{\alpha-1} [\mathbf{L}(t, F) + \mathbf{L}(t, F^{-1})] dt < +\infty; 0 < \alpha < +\infty. \tag{1.14}$$

Отметим, что при $1 \leqslant \alpha < +\infty$, в силу леммы 1.1, это условие эквивалентно условию

$$\sup_{-\infty < \rho < 0} [\mathbf{L}_\alpha(\rho, F) + \mathbf{L}_\alpha(\rho, F^{-1})] < +\infty.$$

Нетрудно убедиться также в том, что (1.14) одновременно эквивалентно условиям теоремы 1.1, при выполнении которых справедливы формулы типа Б. Я. Левина (1.6), а также соотношения равновесия (1.12) для вновь введенных характеристик типа Цудзи.

§ 2. Канонические факторизации классов мероморфных в полуплоскости функций

В этом параграфе путем последовательных предельных переходов $R \uparrow \infty$ и $\rho \uparrow 0$ в формуле (1.2) будут установлены канонические факторизации новых, широких классов типа В. И. Крылова функций, мероморфных в полуплоскости.

Определение 1. Будем говорить, что мероморфная в нижней полуплоскости $G^{(-)}$ функция $F(w)$ принадлежит классу $\mathbf{N}_{\alpha,\beta}^m$ $(0 < \alpha < +\infty,\ 0 \leqslant \beta < 1 + \alpha)$, если

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{|t|^{\alpha-1}}{1+|t|^\beta} [\mathbf{L}(t, F) + \mathbf{L}(t, F^{-1})] dt < +\infty. \tag{2.1}$$

Очевидны включения

$$\mathbf{N}_{\alpha,\beta_1}^m \subseteq \mathbf{N}_{\alpha,\beta_2}^m\ (0 < \alpha < +\infty,\ 0 \leqslant \beta_1 \leqslant \beta_2 \leqslant 1 + \alpha), \tag{2.2}$$

$$\mathbf{N}_{\alpha,\beta}^m \subseteq \mathbf{N}_{\alpha+\delta,\beta+\delta}^m\ (0 < \alpha < +\infty,\ 0 \leqslant \beta \leqslant 1 + \alpha,\ 0 < \delta < +\infty). \tag{2.2'}$$

Следует особо отметить, что предельные переходы $R \uparrow \infty$ и $\rho \uparrow 0$ в формуле (1.2) оправданы, в частности, как мы убедимся ниже, для функций классов $\mathbf{N}_{\alpha,0}^m$, являющихся, как было отмечено выше, естественными аналогами классов N_α^* М. М. Джрбашяна. Однако, при этом возникают существенные затруднения в случае, когда $0 < \alpha < 1$. Оказалось однако, что легче установить канонические факторизации непосредственно для функций из наиболее широких классов $\mathbf{N}_{\alpha,1+\alpha}^m$ $(0 < \alpha < +\infty)$.

2.1. Для дальнейшего изложения необходима следующая

Лемма 2.1. *Пусть* $F(w) \in \mathbf{N}_{\alpha,\beta}^m$ $(0 < \alpha < +\infty,\ 0 \leqslant \beta \leqslant 1 + \alpha)$. *Тогда нули* $\{a_\mu\} \subset G^{(-)}$ *и полюсы* $\{b_\nu\} \subset G^{(-)}$ *этой функции таковы, что*

$$\sum_\mu |\operatorname{Im} a_\mu|^{1+\alpha} < +\infty,\quad \sum_\nu |\operatorname{Im} b_\nu|^{1+\alpha} < +\infty. \tag{2.3}$$

Одновременно

$$\iint\limits_{G^{(-)}} \frac{|\operatorname{Im}\zeta|^{\alpha-1}}{1+|\operatorname{Im}\zeta|^{\beta}} |\log|F(\zeta)|| \, d\sigma(\zeta) < +\infty. \tag{2.4}$$

Доказательство. Сходимость интеграла (2.4) непосредственно следует из (2.1). Для доказательства сходимости сумм (2.3) заметим, что, как также непосредственно следует из (2.1)

$$\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{|t|^{\alpha-1}}{1+|t|^{\beta}} \mathbf{N}(t, F^{\pm1}) dt < +\infty. \tag{2.5}$$

Сходимость одного из этих интегралов обеспечивает сходимость первой из сумм (2.3), а сходимость другого—сходимость второй суммы. Докажем, например, сходимость первой суммы. Во-первых, если бы при некотором $\rho_0 < 0$ в $G_{\rho_0}^{(-)}$ содержалось бесконечное число нулей a_μ функции $F(w)$, то для любого $t\,(\rho_0/2 < t < 0)$ имели бы

$$\mathbf{N}(t, F^{-1}) = \sum_{a_\mu \in G_t^{(-)}} (|\operatorname{Im} a_\mu| - |t|) \geqslant \sum_{a_\mu \in G_t^{(-)}} (|\operatorname{Im} a_\mu| - |\rho_0|/2) \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{a_\mu \in G_{\rho_0}^{(-)}} (|\operatorname{Im} a_\mu| - |\rho_0|/2) \geqslant \sum_{a_\mu \in G_{\rho_0}^{(-)}} (|\rho_0| - |\rho_0|/2) = +\infty.$$

Это противоречит (2.5). Тем самым, $\max\limits_{\mu} \{|\operatorname{Im} a_\mu|\} = m_0 < +\infty$, и, как нетрудно убедиться

$$\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{|t|^{\alpha-1}}{1+|t|^{\beta}} \mathbf{N}(t, F^{-1})\, dt \geqslant \{\alpha(1+\alpha)\,(1+m_0^{\beta})\}^{-1} \sum_{\mu} |\operatorname{Im} a_\mu|^{1+\alpha}.$$

2.2. В этом пункте путем предельного перехода $R \uparrow \infty$ в формуле (1.2) для функций классов $\mathbf{N}^{m}_{\alpha, 1+\alpha}$ устанавливается семейство формул, являющихся естественными аналогами формул типа Иенсена-Неванлинны для круга, открытых в ранней работе М. М. Джрбашяна [7] (см. также [8]). Как в установленном в этом пункте семействе формул, так и в установленных затем канонических факторизациях классов $\mathbf{N}^{m}_{\alpha, \beta}$ участвуют произведения типа Бляшке для полуплоскости, рассмотренные в работе [16]. Элементарные факторы этих произведений имеют вид

$$a_\alpha(w, \zeta) \equiv \exp\left\{- \int\limits_{0}^{2|\operatorname{Im}\zeta|} \frac{\tau^{\alpha}\, d\tau}{[\tau + i(w-\zeta)]^{1+\alpha}}\right\}. \tag{2.6}$$

Отметим, что при любых фиксированных $\zeta \in G^{(-)}$ и $\alpha\,(-1 < \alpha < +\infty)$ функция $a_\alpha(w, \zeta)$ аналитична в $G^{(-)}$ и имеет нуль, притом первого порядка, только в точке $w = \zeta$. При этом, условие сходимости произведения

$$B_\alpha(w, \{w_k\}) \equiv \prod_{k} a_\alpha(w, w_k) \quad (\{w_k\} \subset G^{(-)}, \ -1 < \alpha < +\infty) \tag{2.7}$$

имеет вид

$$\sum_k |\operatorname{Im} w_k|^{1+\alpha} < +\infty. \tag{2.8}$$

Докажем еще две предварительные леммы.

Лемма 2.2. *Пусть w и s — фиксированные точки из $G_\rho^{(-)}$ $(\rho \leq 0)$. Тогда при любом α $(-1 < \alpha < +\infty)$ справедливо соотношение*

$$\lim_{R\to+\infty} \Omega_\alpha\left(\frac{w-i\rho}{R}+i,\ \frac{s-i\rho}{R}+i\right) = -\log a_\alpha(w-i\rho,\ s-i\rho). \tag{2.9}$$

Доказательство. Пусть $z, \zeta \in G^{(-)}$ — любые фиксированные, а $R > 0$ настолько большое, что $|z+iR| < R$ и $|\zeta+iR| < R$. Тогда по (3)

$$\Omega_\alpha\left(\frac{z}{R}+i,\ \frac{\zeta}{R}+i\right) = \int\limits_{\left|\frac{\zeta}{R}+i\right|^2}^{1} \frac{(1-t)^\alpha}{\left(1-\frac{z+iR}{\zeta+iR}t\right)^{1+\alpha}}\frac{dt}{t}.$$

Воспользуемся теперь равенством (1.1) и после замены переменной интегрирования $\tau = R(1-t)$ убедимся в том, что

$$\lim_{R\to+\infty} \Omega_\alpha\left(\frac{z}{R}+i,\ \frac{\zeta}{R}+i\right) = \int\limits_0^{2|\operatorname{Im}\zeta|} \frac{\tau^\alpha d\tau}{[\tau+i(z-\zeta)]^{1+\alpha}}.$$

Ввиду (2.6), это соотношение после замены $z = w - i\rho$, $\zeta = s - i\rho$ переходит в утверждение леммы.

Лемма 2.3. *Пусть $F(w) \in N^m_{\alpha, 1+\alpha}$ $(1 \leq \alpha < +\infty)$. Тогда при любых $\rho < 0$ и $w \in G_\rho^{(-)}$ справедливо соотношение*

$$\lim_{R\to+\infty} \iint\limits_{O(R,\rho)} \left(1-\frac{|\zeta-i\rho|^2}{2R|\operatorname{Im}\zeta-\rho|}\right)^{\alpha-1} \times$$

$$\times \frac{|\operatorname{Im}\zeta-\rho|^{\alpha-1}\log|F(\zeta)|}{\left[i(w-\overline{\zeta}-2i\rho)-\frac{(w-i\rho)(\overline{\zeta}+i\rho)}{R}\right]^{1+\alpha}} d\sigma(\zeta) =$$

$$= \iint\limits_{G_\rho^{(-)}} |\operatorname{Im}\zeta-\rho|^{\alpha-1} \frac{\log|F(\zeta)|}{[i(w-\overline{\zeta}-2i\rho)]^{1+\alpha}} d\sigma(\zeta). \tag{2.10}$$

Доказательство. Введем в рассмотрение функцию $\Psi_{\alpha,\rho}(w, \zeta, R)$, полагая

$$\Psi_{\alpha,\rho}(w, \zeta, R) = \frac{\left(1-\frac{|\zeta-i\rho|^2}{2R|\operatorname{Im}\zeta-\rho|}\right)^{\alpha-1}}{\left[i(w-\overline{\zeta}-2i\rho)-\frac{(w-i\rho)(\overline{\zeta}+i\rho)}{R}\right]^{1+\alpha}} -$$

$$-\frac{1}{[i(w-\overline{\zeta}-2i\rho)]^{1+\alpha}} \quad \text{при } \zeta \in O(R,\rho),$$

$$\Psi_{\alpha,\rho}(w,\zeta,R)=-\frac{1}{[i(w-\overline{\zeta}-2i\rho)]^{1+\alpha}}\quad \text{при}\quad \zeta\overline{\in}O(R,\rho).$$

Очевидно, что (2.10) равносильно соотношению

$$\lim_{R\to+\infty}\iint\limits_{G_\rho^{(-)}}\Psi_{\alpha,\rho}(w,\zeta,R)\,|\mathrm{Im}\,\zeta-\rho|^{\alpha-1}\log|F(\zeta)|\,d\sigma(\zeta)=0. \tag{2.11}$$

С целью доказательства последнего оценим функцию $\Psi_{\alpha,\rho}(w,\zeta,R)$, полагая, что $R>2|w-i\rho|^2/|\mathrm{Im}\,w-\rho|$, а точка $w\in G_\rho^{(-)}$ фиксирована. Если $\zeta\in O(R,\rho)$, то, очевидно

$$|\Psi_{\alpha,\rho}(w,\zeta,R)|\leqslant|(w-i\rho)-\overline{(\zeta-i\rho)}|^{-(1+\alpha)}\Bigg\{1+$$

$$+\left(1-\frac{|\zeta-i\rho|^2}{2R\,|\mathrm{Im}\,\zeta-\rho|}\right)^{\alpha-1}\left[1-\frac{1}{R}\left|\frac{(w-i\rho)\,\overline{(\zeta-i\rho)}}{(w-i\rho)-\overline{(\zeta-i\rho)}}\right|\right]^{-(1+\alpha)}\Bigg\}.$$

Однако $\mathrm{Im}\,(w-i\rho)<0$ и $\mathrm{Im}\,(\zeta-i\rho)<0$. Поэтому, как легко видеть,

$$\left|\frac{(w-i\rho)\,\overline{(\zeta-i\rho)}}{(w-i\rho)-\overline{(\zeta-i\rho)}}\right|=\left|\frac{1}{w-i\rho}-\frac{1}{\overline{\zeta-i\rho}}\right|^{-1}<\left(\mathrm{Im}\,\frac{1}{w-i\rho}\right)^{-1}<\frac{R}{2}.$$

Далее, так как $|(w-i\rho)-\overline{(\zeta-i\rho)}|>|\mathrm{Im}\,w-\rho|+|\mathrm{Im}\,\zeta-\rho|$, то ввиду включения (1.1) при фиксированных $\rho<0$ и $w\in G_\rho^{(-)}$, любых $R>2|w-i\rho|^2/|\mathrm{Im}\,w-\rho|$ и $\zeta\in O(R,\rho)$ справедлива оценка

$$|\Psi_{\alpha,\rho}(w,\zeta,R)|<\frac{1+2^{1+\alpha}}{(|\mathrm{Im}\,w-\rho|+|\mathrm{Im}\,\zeta-\rho|)^{1+\alpha}}.$$

Нетрудно заметить, что в силу определения функции $\Psi_{\alpha,\rho}(w,\zeta,R)$ эта оценка сохраняет силу и в случае, когда $\zeta\in G_\rho^{(-)}\setminus O(R,\rho)$. Воспользовавшись теперь неравенствами

$$\frac{1}{(a+b)^{1+\alpha}}<\frac{1}{a^{1+\alpha}+b^{1+\alpha}}\leqslant\frac{\max\{1,\,a^{-(1+\alpha)}\}}{1+b^{1+\alpha}}\quad (a,b>0;\ 1<\alpha<+\infty),$$

$$\frac{1}{1+(x-a)^{1+\alpha}}<\frac{1+(1+a)^{1+\alpha}}{1+x^{1+\alpha}}\quad (0<a\leqslant x<+\infty,\ 1\leqslant\alpha<+\infty),$$

окончательно приходим к оценке

$$|\Psi_{\alpha,\rho}(w,\zeta,R)|<\frac{C_{\alpha,\rho}(w)[1+(1+|\rho|)^{1+\alpha}]}{1+|\mathrm{Im}\,\zeta|^{1+\alpha}},$$

где $C_{\alpha,\rho}(w)=(1+2^{1+\alpha})\max\{1,\,|\mathrm{Im}\,w-\rho|^{-(1+\alpha)}\}$.

В силу последней оценки, сходимости интеграла (2.4) (с $p=1+\alpha$) и леммы 1.1, подынтегральная функция в (2.11) имеет не зависящую от $R>2|w-i\rho|^2/|\mathrm{Im}\,w-\rho|$ суммируемую мажоранту. С другой стороны, ясно, что $\lim\limits_{R\to+\infty}\Psi_{\alpha,\rho}(w,\zeta,R)=0$ при любых фиксированных $\rho<0$ и $w,\zeta\in G_\rho^{(-)}$. Поэтому, в силу теоремы Лебега справедливо соотношение (2.11), и, тем самым, лемма доказана.

Теорема 2.1. *Пусть* $F(w) \in N^{m}_{\alpha, 1+\alpha}$ $(1 \leqslant \alpha < +\infty)$. *Тогда при любом* $\rho < 0$ *справедливо представление*

$$\log F(w) = \frac{\alpha 2^{\alpha}}{\pi} \iint\limits_{G_{\rho}^{(-)}} |\operatorname{Im} \zeta - \rho|^{\alpha-1} \frac{\log |F(\zeta)|}{[i(w - \bar{\zeta} - 2i\rho)]^{1+\alpha}} d\sigma(\zeta) +$$

$$+ \sum_{a_{\mu} \in G_{\rho}^{(-)}} \log a_{\alpha}(w - i\rho, a_{\mu} - i\rho) - \sum_{b_{\nu} \in G_{\rho}^{(-)}} \log a_{\alpha}(w - i\rho, b_{\nu} - i\rho) -$$

$$- \log \{\lim_{t \to +\infty} F(-it)\}; \quad w \in G_{\rho}^{(-)}, \tag{2.12}$$

где $\{a_{\mu}\}$ *и* $\{b_{\nu}\}$ *— суть нули и функции* $F(w)$, *а предел в скобках существует, конечен и не равен нулю.*

Доказательство очевидным образом следует из формулы (1.2) и соотношений (2.9), (2.10).

Для доказательства основной теоремы параграфа необходимы еще три леммы.

Лемма 2.4. *Пусть последовательность* $\{w_k\} \subset G^{(-)}$ *при данном* α $(-1 < \alpha < +\infty)$ *удовлетворяет условию* (2.8). *Тогда при любом* $w \in G^{(-)}$, *не принадлежащем отрезкам* $l_k = \{w : \operatorname{Re} w = \operatorname{Re} w_k$, $\operatorname{Im} w_k \leqslant \operatorname{Im} w < 0\}$ $(k \geqslant 1)$ *справедливо соотношение*

$$\lim_{\rho \to -0} \sum_{w_k \in G_{\rho}^{(-)}} \log a_{\alpha}(w - i\rho, w_k - i\rho) = \sum_{k} \log a_{\alpha}(w, w_k). \tag{2.13}$$

Доказательство. Предположим сначала, что $\operatorname{Im} w \leqslant -4m_0$, где $m_0 = \max_k |\operatorname{Im} w_k|$. Очевидно

$$\left| \sum_{w_k \in G_{\rho}^{(-)}} \log a_{\alpha}(w - i\rho, w_k - i\rho) - \sum_{k} \log a_{\alpha}(w, w_k) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{w_k \in G_{\rho}^{(-)}} |\log a_{\alpha}(w - i\rho, w_k - i\rho) - \log a_{\alpha}(w, w_k)| +$$

$$+ \sum_{\rho < \operatorname{Im} w_k < 0} |\log a_{\alpha}(w, w_k)| \equiv S_1 + S_2.$$

В силу сходимости последнего ряда (см. [16], теорему 1.2) для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\rho_1 < 0$, что

$$S_2 < \varepsilon/2, \text{ при } \rho_1 < \rho < 0. \tag{2.14}$$

Оценим теперь сумму S_1, заметив, что ввиду (2.6)

$$S_1 \leqslant \sum_{\operatorname{Im} w_k < \rho} \int\limits_{2(|\operatorname{Im} w_k| - |\rho|)}^{2|\operatorname{Im} w_k|} \frac{\tau^{\alpha} d\tau}{|\tau + i(w - w_k)|^{1+\alpha}}.$$

При этом, здесь $|w - w_k| - \tau \geqslant m_0$, так как $|w - w_k| \geqslant 3m_0$, а $0 \leqslant \tau \leqslant 2m_0$. Воспользовавшись этим, получим

$$S_1 < \frac{2^{1+\alpha}}{(1+\alpha)\, m_0^{1+\alpha}} \left\{ \sum_{\operatorname{Im} w_k < \rho} |\operatorname{Im} w_k|^{1+\alpha} - \sum_{\operatorname{Im} w_k < \rho} (|\operatorname{Im} w_k| - |\rho|)^{1+\alpha} \right\}.$$

Однако, при выполнении условия (2.8), как нетрудно убедиться

$$\lim_{\rho \to -0} \sum_{\operatorname{Im} w_k < \rho} (|\operatorname{Im} w_k| - |\rho|)^{1+\alpha} = \sum_k |\operatorname{Im} w_k|^{1+\alpha}.$$

К тому же пределу стремится и первое слагаемое в фигурных скобках. Поэтому существует такое $\rho_2 < 0$, что $S_1 < \varepsilon/2$ при $\rho_2 < \rho < 0$. Отсюда и из (2.14) следует соотношение (2.13) для любого $w \in G^{(-)}$, такого, что $\operatorname{Im} w \leqslant -4 m_0$. Заметим теперь, что если последовательность $\{w_k\}$ конечна, то соотношение (2.13) справедливо для всех $w \in G^{(-)} \setminus \bigcup_k \{l_k\}$. Следовательно, это соотношение справедливо вне множества $\bigcup_k \{l_k\}$ и в случае бесконечной последовательности $\{w_k\}$.

Лемма 2.5. *Пусть* $F(w) \in N^m_{\cdot, 1+\alpha}$ $(1 \leqslant \alpha < +\infty)$. *Тогда*

$$\lim_{\rho \to -0} \iint_{G_\rho^{(-)}} |\operatorname{Im} \zeta - \rho|^{\alpha-1} \frac{\log |F(\zeta)|}{[i(w - \bar{\zeta} - 2i\rho)]^{1+\alpha}} d\sigma(\zeta) =$$

$$= \iint_{G^{(-)}} |\operatorname{Im} \zeta|^{\alpha-1} \frac{\log |F(\zeta)|}{[i(w - \bar{\zeta})]^{1+\alpha}} d\sigma(\zeta); \quad w \in G^{(-)}. \tag{2.15}$$

Доказательство вполне аналогично доказательству леммы 2.3.

Лемма 2.6. *Пусть последовательность* $\{w_k\} \subset G^{(-)}$ *удовлетворяет условию* (2.8) *при данном* α $(-1 < \alpha < +\infty)$. *Тогда функция*

$$\log B_\gamma(w, \{w_k\}) \equiv -\sum_k \int_0^{2|\operatorname{Im} w_k|} \frac{\tau^\gamma\, d\tau}{[\tau + i(w - w_k)]^{1+\gamma}} \tag{2.16}$$

при любом фиксированном $w \in G^{(-)}$, *таком, что* $\operatorname{Im} w \leqslant -4 m_0$ $(m_0 = \max\{1, \max_k |\operatorname{Im} w_k|\})$, *непрерывна по параметру* γ *на отрезке* $[\alpha, +\infty)$.

Доказательство. Ясно, что каждое слагаемое ряда (2.16) обладает требуемым свойством. Поэтому для доказательства леммы достаточно убедиться в абсолютной и равномерной сходимости этого ряда в любом сегменте $[\alpha, \beta] \subset [\alpha, +\infty)$. С этой целью предположим, что $[\alpha, \beta]$ — любой такой сегмент и $\gamma \in [\alpha, \beta]$ — любая точка. Тогда очевидно, $|\tau + i(w - w_k)|^{1+\gamma} \geqslant m_0^{1+\alpha}$, и, следовательно, при $0 < |\operatorname{Im} w_k| < 1/2$

$$\left| \int_0^{2|\operatorname{Im} w_k|} \frac{\tau^\gamma\, d\tau}{[\tau + i(w - w_k)]^{1+\gamma}} \right| \leqslant \frac{2^{1+\alpha}}{(1+\alpha)\, m_0^{1+\alpha}} |\operatorname{Im} w_k|^{1+\alpha}.$$

2.4. Докажем основную теорему параграфа о канонических факторизациях функций классов $N^m_{\alpha, \beta}$ $(0 < \alpha < +\infty,\ 0 \leqslant \beta \leqslant 1 + \alpha)$.

Теорема 2.2. *Пусть* $F(w)\in \mathrm{N}^{m}_{\alpha,1+\alpha}$ $(0<\alpha<+\infty)$. *Тогда справедливо представление*

$$F(w)\equiv C_F\,\frac{B_\alpha(w,\ \{a_\mu\})}{B_\alpha(w,\ \{b_\nu\})}\times$$

$$\times\exp\left\{\frac{\alpha 2^\alpha}{\pi}e^{-i\frac{\pi}{2}(1+\alpha)}\iint\limits_{G^{(-)}}|\mathrm{Im}\,\zeta|^{\alpha-1}\frac{\log|F(\zeta)|}{(w-\overline{\zeta})^{1+\alpha}}\,d\sigma(\zeta)\right\};\ w\in G^{(-)},\qquad(2.17)$$

где B_α — *сходящиеся произведения типа Бляшке, составленные по нулям и полюсам функции* $F(w)$, *а* $C_F=\lim\limits_{t\to+\infty}[F(-it)]^{-1}$. *При этом, этот предел существует, конечен и не равен нулю.*

Доказательство удобно провести в два этапа.

а) Пусть $1\leqslant\alpha<+\infty$. Тогда к представлению (2.17) приходим предельным переходом $\rho\uparrow 0$ в формуле (2.12), в силу соотношений (2.15), (2.13) и единственности аналитической функции.

б) Пусть $0<\alpha<+1$. Тогда, ввиду (2.2′), $F(w)\in \mathrm{N}^{m}_{\gamma,1+\gamma}$ при любом $\gamma>\alpha$. Следовательно, для этой функции справедливо представление (2.17) при $\alpha\equiv\gamma>1$. Зафиксируем теперь любое $w\in G^{(-)}$ такое, что $\mathrm{Im}\,w\leqslant -4m_1$ $(m_1=\max\limits_{\mu,\nu}\{|\mathrm{Im}\,a_\mu|,\ |\mathrm{Im}\,b_\nu|\})$. Тогда правая часть (2.17) (с $\alpha\equiv\gamma\geqslant 1$) тождественная постоянная по γ. С другой стороны, в силу леммы 2.6, ее сомножители — непрерывные по γ $(\alpha\leqslant\gamma<+\infty)$ функции. Поэтому справедлива формула (2.17).

Замечание 1. В силу включения (2.2), факторизацию вида (2.17) допускает любая функция из $\mathrm{N}^{m}_{\alpha,\beta}$ $(0<\alpha<+\infty,\ 0\leqslant\beta\leqslant 1+\alpha)$.

Замечание 2. Как нетрудно заметить, примененное в пункте б) доказательства теоремы 2.2 рассуждение дает возможность распространить на случай $0<\rho<1$ также формулу (2.12) теоремы 2.1.

2.5. Установим оценку для экспоненциального множителя в (2.17).

Лемма 2.7. *Пусть* $F(w)\in \mathrm{N}^{m}_{\alpha,\beta}$ $(0<\alpha<+\infty,\ 0\leqslant\beta\leqslant 1+\alpha)$. *Тогда при любом* $w\in G^{(-)}$ *справедлива оценка*

$$\left|\frac{\alpha 2^\alpha}{\pi}\iint\limits_{G^{(-)}}|\mathrm{Im}\,\zeta|^{\alpha-1}\frac{\log|F(\zeta)|}{[i(w-\overline{\zeta})]^{1+\alpha}}\,d\sigma(\zeta)\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\alpha 2^{\alpha+|\beta-1|}}{\pi}\,\frac{1+|\mathrm{Im}\,w|^\beta}{|\mathrm{Im}\,w|^{1+\alpha}}\iint\limits_{G^{(-)}}\frac{|\mathrm{Im}\,\zeta|^{\alpha-1}}{1+|\mathrm{Im}\,\zeta|^\beta}\,|\log|F(\zeta)||\,d\sigma(\zeta).\qquad(2.18)$$

Доказательство. Пусть $w,\zeta\in G^{(-)}$. Тогда, очевидно, $|w-\overline{\zeta}|\geqslant|\mathrm{Im}\,w|+|\mathrm{Im}\,\zeta|$. Следовательно, воспользовавшись неравенствами $a+b>a(1+b)/(1+a)$ $(a,\ b>0)$, $1\leqslant(1+x)^\beta/(1+x^\beta)\leqslant 2^{\beta-1}$ $(x\geqslant 0,\ \beta\geqslant 0)$, получим

$$\frac{1}{|w-\overline{\zeta}|^{1+\alpha}}\leqslant 2^{|\beta-1|}\,\frac{1+|\mathrm{Im}\,w|^\beta}{|\mathrm{Im}\,w|^{1+\alpha}}\,\frac{1}{1+|\mathrm{Im}\,\zeta|^\beta}.$$

Отсюда непосредственно следует оценка (2.18).

Замечание. Если последовательность $\{w_k\} \subset G^{(-)}$ удовлетворяет условию (2.8) при некотором $\alpha\,(-1 < \alpha < +\infty)$, то, как нетрудно убедиться, при $\operatorname{Im} w < -5 \max\limits_k |\operatorname{Im} w_k|$ справедлива оценка

$$|\log|B_\alpha(w, \{w_k\})|| \leqslant \frac{8^{1+\alpha}}{1+\alpha}\left\{\sum_k |\operatorname{Im} w_k|^{1+\alpha}\right\}|\operatorname{Im} w|^{-1-\alpha}. \tag{2.19}$$

Отсюда, из (1.18) и факторизации (2.17) следует, что для любого $F(w) \in N^m_{\alpha,\beta}$ $(0 < \alpha < +\infty,\ 0 \leqslant \beta < 1+\alpha)$ имеем $\lim\limits_{t\to+\infty} F(-it) = \pm 1$. Тем самым, при $0 \leqslant \beta < 1 + \alpha$ равняется 1 или -1 множитель C_F канонической факторизации (2.17).

2.6. Условие (2.1), при выполнении которого мероморфная в $G^{(-)}$ функция $F(w)$ принадлежит классу $N^m_{\alpha,\beta}$ $(0 < \alpha < +\infty,\ 0 \leqslant \beta \leqslant 1+\alpha)$, накладывает ограничение как на характеристику роста $L(t, F)$ этой функции, так и на характеристику ее убывания $L(t, F^{-1})$. В отличие от этого, в данном пункте рассмотрены классы аналитических в $G^{(-)}$ функций, в определении которых накладываются ограничения лишь на характеристику роста.

Определение 2. Будем говорить, что аналитическая в полуплоскости $G^{(-)}$ функция $F(w)$ принадлежит классу $N^{(1)}_\alpha$ $(0 < \alpha < +\infty)$, если при любом $\rho < 0$

$$\sup_{v<\rho} \int_{-\infty}^{+\infty} |\log|F(u+iv)||\, du < +\infty,$$

и, одновременно

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{|t|^{\alpha-1}}{1+|t|^{1+\alpha}} L(t, F)\, dt \equiv \int_{-\infty}^{0} \frac{|t|^{\alpha-1}}{1+|t|^{1+\alpha}}\, dt \int_{-\infty}^{+\infty} \log^+ |F(u+it)|\, du < +\infty.$$

Поскольку для любой функции $F(w) \in N^{(1)}_\alpha$ $(0 < \alpha < +\infty)$, в силу теоремы 1.2 имеет место формула Б. Я. Левина (1.7), и, следовательно, соотношение равновесия (1.11), то очевидно включение

$$N^{(1)}_\alpha \subseteq N^m_{\alpha,1+\alpha}\ (0 < \alpha < \infty).$$

Следовательно, для функций из вновь введенных классов справедливы утверждения леммы 2.1, а также каноническая факторизация теоремы 2.2.

§ 3. Параметрические представления классов $N^m_{\alpha,\beta}$

В этом параграфе исследуются вопросы принадлежности сомножителей канонической факторизации (2.17) классам $N^m_{\alpha,\beta}$ $(0 < \alpha < +\infty,\ 0 \leqslant \beta \leqslant 1+\alpha)$, на основе чего удается установить параметрические представления этих классов в случае, когда $0 \leqslant \beta < \alpha$.

3.1. Докажем сначала оценку, нужную для дальнейшего изложения.

Лемма 3.1. *Пусть последовательность* $\{w_k\} \subset G^{(-)}$ *такова, что при данном* $\alpha\,(-1 < \alpha < +\infty)$ *выполнено условие* (2.8). *Тогда справедлива оценка*

$$\log|B_\alpha(w, \{w_k\})| \leqslant C_\alpha \sum_k \frac{|\operatorname{Im} w_k|^{1+\alpha}}{|w - \bar{w}_k|^{1+\alpha}}; \quad w \in G^{(-)}, \tag{3.1}$$

где $C_\alpha \in (0, +\infty)$ — *постоянная, зависящая лишь от* α.

Доказательство. Легко заметить, что для установления оценки (3.1) достаточно доказать справедливость такой оценки для одного фактора произведения B_α. С этой целью предположим, что $\zeta = \xi + i\eta \in G^{(-)}$ — любое и рассмотрим в отдельности два случая.

а) Пусть $2|\eta|/|w - \bar{\zeta}| > 1/5$. Воспользуемся рекуррентной формулой

$$a_\alpha(w, \zeta) = a_{\alpha-p}(w, \zeta) \exp\left\{\sum_{n=1}^{p} \frac{1}{\alpha - p + n}\left(\frac{2i\eta}{w - \bar{\zeta}}\right)^{\alpha-p+n}\right\} \tag{3.2}$$

(где $p \geqslant 0$ целое и $p - 1 < \alpha \leqslant p$). Отметим, что эту формулу легко получить из (2.6) интегрированием по частям, и она по существу приведена в [16]. Из (3.2) следует, что при целых $\alpha = p \geqslant 0$

$$\log|a_p(w, \zeta)| \leqslant \sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n}\left(\frac{2|\eta|}{|w - \bar{\zeta}|}\right)^n.$$

Однако в рассматриваемом случае

$$5^{1+p}\left(\frac{2|\eta|}{|w - \bar{\zeta}|}\right)^{1+p} \geqslant 5^n\left(\frac{2|\eta|}{|w - \bar{\zeta}|}\right)^n > \left(\frac{2|\eta|}{|w - \bar{\zeta}|}\right)^n (1 \leqslant n \leqslant p).$$

Поэтому

$$\log|a_p(w, \zeta)| < p \cdot 10^{1+p}\left(\frac{|\eta|}{|w - \bar{\zeta}|}\right)^{1+p}; \quad p = 0, 1, 2, \cdots. \tag{3.3}$$

Пусть теперь $\alpha\ (-1 < \alpha < +\infty)$ не целое. Тогда из (3.2) следует оценка

$$\log|a_\alpha(w, \zeta)| \leqslant \log|a_\delta(w, \zeta)| + C'_\alpha\left(\frac{|\eta|}{|w - \bar{\zeta}|}\right)^{1+\alpha}, \tag{3.4}$$

где $\delta = \alpha - p \in (-1, 0)$. Оценим теперь $\log|a_\delta(w, \zeta)|$. Для этого произведем замену переменной интегрирования $t = \tau/i(w - \zeta)$ в (2.6) и, воспользовавшись тем, что при $\operatorname{Im} w < \eta$ и $\operatorname{Re} w = \xi$ имеем $i(w - \zeta) = -\operatorname{Im} w + \eta > 0$, в силу единственности аналитической функции получим

$$\log|a_\delta(w, \zeta)| = -\operatorname{Re}\int_0^{\frac{2|\eta|}{i(w-\zeta)}} \frac{t^\delta\, dt}{(1+t)^{1+\delta}}.$$

Если $2|\eta|/|w - \zeta| \leqslant 3$, то, очевидно

$$|\log|a_\delta(w, \zeta)|| \leqslant \int_0^3 \frac{x^\delta\, dx}{|1 - x|^{\delta+1}} = C_\delta < +\infty. \tag{3.5}$$

Если же $2|\eta|/|w-\zeta|>3$, то опять по единственности аналитической функции приходим к неравенству

$$\log|a_\delta(w,\zeta)|\leqslant C_\delta-\mathrm{Re}\int\limits_{3\frac{|w-\zeta|}{i(w-\zeta)}}^{\frac{2|\eta|}{i(w-\zeta)}}\left(1-\frac{1}{1+t}\right)^{1+\delta}\frac{d|t|}{|t|}.$$

Однако здесь $3\leqslant|t|\leqslant 2|\eta|/|w-\zeta|$. Поэтому $|1+t|>2$, и

$$\mathrm{Re}\left(1-\frac{1}{1+t}\right)^{1+\delta}=\left|1-\frac{1}{1+t}\right|^{1+\delta}\cos\left[(1+\delta)\arg\left(1-\frac{1}{1+t}\right)\right]>\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Следовательно

$$\log|a_\delta(w,\zeta)|\leqslant C_\delta-\frac{\sqrt{3}}{4}\int\limits_3^{\frac{2|\eta|}{|w-\zeta|}}\frac{dx}{x}<C_\delta.$$

Отсюда и из (3.5) следует, что в рассматриваемом случае $\log|a_\delta(w,\zeta)|\leqslant C_\delta$. А это, в свою очередь, вместе с (3.4) и (3.3) приводит к оценке

$$\log|a_\alpha(w,\zeta)|\leqslant C_\alpha'\left(\frac{|\eta|}{|w-\bar\zeta|}\right)^{1+\alpha}\left(\frac{2|\eta|}{|w-\bar\zeta|}>\frac{1}{5},\ -1<\alpha<+\infty\right). \quad (3.6)$$

б) Пусть $2|\eta|/|w-\bar\zeta|\leqslant 1/5$. Тогда нетрудно видеть, что

$$\left|\frac{w-\zeta}{w-\bar\zeta}\right|^2=1-\frac{4\eta\,\mathrm{Im}\,w}{|w-\bar\zeta|^2}\quad\text{и}\quad\frac{2|\mathrm{Im}\,w|}{|w-\bar\zeta|}<\frac{2|\eta|}{|w-\bar\zeta|}+2.$$

Поэтому

$$\left|\frac{w-\zeta}{w-\bar\zeta}\right|^2\geqslant 1-\frac{1}{5}\,\frac{2|\mathrm{Im}\,w|}{|w-\bar\zeta|}>1-\frac{1}{5}\left(\frac{2|\eta|}{|w-\bar\zeta|}+2\right)\geqslant\frac{14}{25},$$

и, следовательно, при любом $x\in[0,1]$

$$\left|\frac{w-\zeta}{w-\bar\zeta}-\frac{2i|\eta|x}{w-\bar\zeta}\right|\geqslant\left|\frac{w-\zeta}{w-\bar\zeta}\right|-\frac{2|\eta|}{|w-\bar\zeta|}\geqslant\frac{\sqrt{14}}{5}-\frac{1}{5}>\frac{1}{2}.$$

Воспользовавшись этим, получаем, что при любом $\alpha\ (-1<\alpha<+\infty)$

$$|\log|a_\alpha(w,\zeta)||\leqslant\frac{4^{1+\alpha}}{1+\alpha}\left(\frac{|\eta|}{|w-\bar\zeta|}\right)^{1+\alpha}.$$

Отсюда и из (3.6) следует оценка

$$\log|a_\alpha(w,\zeta)|\leqslant C_\alpha\left(\frac{|\eta|}{|w-\bar\zeta|}\right)^{1+\alpha};\ w,\zeta\in G^{(-)},\ -1<\alpha<+\infty,$$

где $C_\alpha\in(0,+\infty)$ — постоянная, зависящая лишь от α. Переход же к оценке (3.1) леммы не представляет труда.

3.2. В этом пункте наряду с исследованием вопроса о принадлежности произведений B_α классам $\mathbf{N}^m_{\alpha,\beta}$ дается полная характеристика плотности нулей и полюсов функций этих классов. Для этих целей необходима следующая предварительная

Лемма 3.2. *Пусть последовательность* $\{w_k\} \subset G^{(-)}$ *такова, что при данном* $\alpha\,(0 < \alpha < +\infty)$ *выполнено условие* (2.8). *Тогда для произведения* $B_\alpha(w, \{w_k\})$ *справедливо соотношение равновесия*

$$\mathrm{L}(\rho, B_\alpha) = \mathrm{L}(\rho, B_\alpha^{-1}); \ -\infty < \rho < 0. \tag{3.7}$$

Доказательство. Сначала убедимся в том, что при любом $\rho < 0$

$$\sup_{v<\rho} \int_{-\infty}^{+\infty} |\log|B_\alpha(u+iv, \{w_k\})||\,du < +\infty. \tag{3.8}$$

Для этого зафиксировав $\rho < 0$, выберем натуральное $N_\rho \geqslant 1$ так, чтобы $|\mathrm{Im}\, w_k| < |\rho|/2$ при $k \geqslant N_\rho + 1$. Очевидно

$$|\log|B_\alpha(w, \{w_k\})|| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{N_\rho} + \sum_{k=N_\rho+1}^{\infty}\right) |\log|a_\alpha(w, w_k)||. \tag{3.9}$$

Если $k \geqslant N_\rho + 1$, то при $v < \rho$ имеем $|u + iv - \overline{w}_k| \geqslant |v| + |\mathrm{Im}\, w_k| > 2|\mathrm{Im}\, w_k| + |\rho|/2$. Поэтому, ввиду (2.6)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\log|a_\alpha(u+iv, w_k)||\,du \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2^{1+\alpha}}{1+\alpha} |\mathrm{Im}\, w_k|^{1+\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{[|u + i(|v| + |\mathrm{Im}\, w_k|)| - 2|\mathrm{Im}\, w_k|]^{1+\alpha}}.$$

Оценивая последний интеграл отдельно при $|u| > 2|\rho|$ и $|u| < 2|\rho|$ приходим к неравенству

$$\sup_{v<\rho} \sum_{k=N_\rho+1}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Big| \log|a_\alpha(u+iv, w_k)| \Big|\,du \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2^{3+\alpha}}{1+\alpha} |\rho|^{-\alpha} \left(\frac{1}{\alpha} + 2^{1+\alpha}\right) \sum_{k=N_\rho+1}^{\infty} |\mathrm{Im} w_k|^{1+\alpha} < +\infty. \tag{3.10}$$

Пусть теперь $v < \rho$ и $k\,(1 \leqslant k \leqslant N_\rho)$ фиксировано. Тогда, обозначив $m_0 = \max\limits_k |\mathrm{Im}\, w_k|$, будем иметь

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Big| \log|a_\alpha(u+iv, w_k)| \Big|\,du \leqslant \int\limits_{|u|>4m_0} du \int_0^{2|\mathrm{Im}\, w_k|} \frac{\tau^\alpha d\tau}{|\tau + |v| + |\mathrm{Im}\, w_k| + iu|^{1+\alpha}} +$$

$$+ \int\limits_{|u|<4m_0} \Big| \log|a_\alpha(u+iv, i\,\mathrm{Im}\, w_k)| \Big|\,du \equiv I_1 + I_2. \tag{3.11}$$

Однако, как нетрудно убедиться

$$I_1 < \frac{2^{2+\alpha} m_0^{1+\alpha}}{\alpha(1+\alpha)}. \tag{3.12}$$

С другой стороны, $I_2=\Psi_{\alpha,k}(v)$ — непрерывная по $v\in(-\infty, 0)$ функция. Причем, в силу (2.19), $\lim\limits_{v\to-\infty}\Psi_{\alpha,k}(v)=0$. Поэтому $I_2\leqslant\max\limits_{1<k<N_\rho}\times$ $\times\max\limits_{-\infty<v<\rho}\Psi_{\alpha,k}(v)<+\infty$. Отсюда, из (3.11), (3.12), (3.10) и (3.9) следует соотношение (3.8). Остается заметить, что в силу (3.8) функция B_α удовлетворяет условиям теоремы 1.2 и, тем самым, для нее справедливы формулы (1.7) и соотношение равновесия (1.11), которое, в силу оценки (2.19), запишется в виде (3.7).

Лемма 3.3 *Пусть* $\{w_k\}\subset G^{(-)}$ — *произвольная последовательность. Тогда*

1°. *Если при некотором* $\alpha\,(0<\alpha<+\infty)$ *выполнено условие* (2.8), *то при любом* $\alpha_0>\alpha$ *имеем* $B_{\alpha_0}(w, \{w_k\})\subset \mathrm{N}^m_{\alpha,0}$.

2°. *Если при некотором* $\alpha\,(0<\alpha<+\infty)$

$$\sum_k|\mathrm{Im}\,w_k|^{1+\alpha}\log\frac{1}{|\mathrm{Im}\,w_k|}<+\infty,$$

то при любом $\beta>0$ *имеем* $B_\alpha(w, \{w_k\})\in\mathrm{N}^m_{\alpha,\beta}$.

Доказательство. 1°. Пусть $\alpha_0>\alpha$ любое. Тогда, в силу (3.2)

$$\int\limits_0^{+\infty}t^{\alpha-1}\,dt\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\log^+|B_{\alpha_0}(u-it, \{w_k\})|du\leqslant$$

$$\leqslant C_\alpha\sum_k|\mathrm{Im}\,w_k|^{1+\alpha_0}\int\limits_0^{+\infty}t^{\alpha-1}I_{\alpha_0,k}(t)\,dt, \tag{3.13}$$

где, как нетрудно видеть,

$$I_{\alpha_0,k}(t)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{[(t+|\mathrm{Im}\,w_k|)^2+x^2]^{\frac{1+\alpha_0}{2}}}=\frac{C_1}{(t+|\mathrm{Im}\,w_k|)^{\alpha_0}}, \tag{3.13'}$$

а $C_1\in(0, +\infty)$ — постоянная. Поэтому

$$\int\limits_0^{+\infty}t^{\alpha-1}I_{\alpha_0,k}(t)\,dt=C_2|\mathrm{Im}\,w_k|^{\alpha-\alpha_0},$$

где $C_2\in(0, +\infty)$ также постоянная. Следовательно

$$\int\limits_0^{+\infty}t^{\alpha-1}\,\mathrm{L}(-t, B_{\alpha_0})\,dt\leqslant C_\alpha C_2\sum_k|\mathrm{Im}\,w_k|^{1+\alpha}<+\infty.$$

Отсюда и из (3.7) очевидно, что, $B_{\alpha_0}(w, \{w_k\})\in\mathrm{N}^m_{\alpha,0}$.

2°. Пусть $\beta>0$ любое. Тогда, в силу (3.1) и (3.13)—(3.13′)

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{t^{\alpha-1}}{1+t^\beta}\mathrm{L}(-t, B_\alpha)\,dt<C_\alpha C_1\sum_k|\mathrm{Im}\,w_k|^{1+\alpha}\int\limits_0^{+\infty}\frac{t^{\alpha-1}}{1+t^\beta}\frac{dt}{(t+|\mathrm{Im}\,w_k|)^\alpha}\cdot$$

Далее, оценивая подынтегральную функцию последнего интеграла отдельно для $0<t<1$ и $1<t<+\infty$, приходим к неравенству

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{1+t^{\beta}} \mathbf{L}(-t, B_\gamma)\,dt < C_\gamma C_1 \sum_k |\operatorname{Im} w_k|^{1+\alpha} \left\{ \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \left|\log \frac{1}{|\operatorname{Im} w_k|}\right| \right\},$$

которое вместе с (3.7) обеспечивает включение $B_\alpha(w, \{w_k\}) \in \mathbf{N}^m_{\alpha,\beta}$.

Замечание. Утверждение 1° доказанной леммы вместе с леммой 2.1 устанавливают, что полной характеристикой плотности нулей и полюсов функций классов $\mathbf{N}^m_{\alpha,\beta}$ $(0<\alpha<+\infty,\ 0\leqslant\beta\leqslant 1+\alpha)$ является условие (2.3).

Лемма 3.4. *При любом* $\alpha\,(0<\alpha<+\infty)$ *можно подобрать последовательность* $\{w_k\}_1^\infty \subset G^{(-)}$, *удовлетворяющую условию* (2.8), *такую, чтобы* $B_\alpha(w, \{w_k\}_1^\infty) \overline{\in} \mathbf{N}^m_{\alpha, 1+\alpha}$.

Доказательство. Пусть последовательность $\{w_k\}_1^\infty \equiv \{-ir_k\}_1^\infty$ $(0<r_k<r)$ лежит на мнимой оси и такова, что одновременно

$$\sum_{k=1}^\infty r_k^{1+\alpha} < +\infty, \text{ но } \sum_{k=1}^\infty r_k^{1+\alpha} \log\frac{1}{r_k} = +\infty.$$

Введем в рассмотрение функцию

$$G_\alpha(w) \equiv \frac{B_{\alpha+1}(w, \{w_k\})}{B_\alpha(w, \{w_k\})} \quad (w = re^{i\theta},\ -\pi<\theta<0).$$

Поскольку в силу рекуррентной формулы (3.2)

$$g_\alpha(w, w_k) \equiv \frac{a_{\alpha+1}(w, w_k)}{a_\alpha(w, w_k)} = \exp\left\{\frac{1}{1+\alpha}\left(\frac{2r_k}{iw-r_k}\right)^{1+\alpha}\right\},$$

то

$$\log|g_\alpha(re^{i\theta}, -ir_k)| = \frac{2^{1+\alpha}}{1+\alpha} \frac{r_k^{1+\alpha}\cos\left[(1+\alpha)\operatorname{arctg}\left(\frac{r\cos\theta}{r|\sin\theta|+r_k}\right)\right]}{\left|re^{i\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}+r_k\right|^{1+\alpha}}.$$

Поэтому справедливо также представление

$$\log|G_\alpha(re^{i\theta})| = \frac{2^{1+\alpha}}{1+\alpha}\int_{-1}^0 \frac{|t|^{1+\alpha}\cos\left[(1+\alpha)\operatorname{arctg}\left(\frac{r\cos\theta}{r|\sin\theta|+|t|}\right)\right]}{\left|re^{i\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}-t\right|^{1+\alpha}}\,dn(t),$$

где $n(t)$ — количество тех чисел r_k, для которых $-r_k<t\in(-1, 0)$.

Заметим теперь, что

$$\cos\left[(1+\alpha)\operatorname{arctg}\left(\frac{r\cos\theta}{r|\sin\theta|+|t|}\right)\right] > \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ при } \left|\theta+\frac{\pi}{2}\right| < \frac{\pi}{4(1+\alpha)}.$$

Следовательно, как нетрудно убедиться

$$I = \iint\limits_{G^{(-)}} \frac{|\operatorname{Im}\zeta|^{\alpha-1}}{1+|\operatorname{Im}\zeta|^{\alpha+1}} \log^+ |G_\alpha(\zeta)|\, d\sigma(\zeta) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{2^\alpha}{1+\alpha} C_\alpha \int\limits_{-\pi/4(1+\alpha)}^{\pi/4(1+\alpha)} d\theta \int\limits_0^1 r^\alpha \left\{ \int\limits_{-1}^0 \frac{|t|^{1+\alpha}\, dn(t)}{|re^{i\theta}-t|^{1+\alpha}} \right\} dr,$$

где $C_\alpha = \min\left\{\left|\cos\dfrac{\pi}{4(1+\alpha)}\right|^{\alpha-1}, 1\right\}$. Как нетрудно проверить, отсюда следует, что

$$I \geqslant \frac{\pi C_\alpha}{4(1+\alpha)^2} \int\limits_{-1}^0 |t|^{1+\alpha} \log\frac{1}{|t|}\, dn(t) = +\infty.$$

Тем самым $G_2(w) \overline{\in} \mathbf{N}^m_{\alpha, 1+\alpha}$, и так как в силу утверждения 1° леммы 3.3 $B_{\alpha+1}(w, \{w_k\}_1^\infty) \in \mathbf{N}^m_{\alpha, 1+\alpha}$, то $B_\alpha(w, \{w_k\}_1^\infty) \overline{\in} \mathbf{N}^m_{\alpha, 1+\alpha}$.

3.3. Перейдем к доказательству основной теоремы параграфа о параметрических представлениях классов $\mathbf{N}^m_{\alpha, \beta}$.

Теорема 3.1. *Класс* $\mathbf{N}^m_{\alpha, \beta}$ $(0 < \alpha < +\infty,\ 0 \leqslant \beta < \alpha)$ *совпадает с множеством функций, допускающих при каком-либо* $\alpha_0 > \alpha$ *представление вида*

$$F(w) = C \frac{B_{\alpha_0}(w, \{a_\mu\})}{B_{\alpha_0}(w, \{b_\nu\})} \times$$

$$\times \exp\left\{\frac{\alpha_0 2^{\alpha_0}}{\pi} e^{-i\frac{\pi}{2}(1+\alpha_0)} \iint\limits_{G^{(-)}} \frac{|\operatorname{Im}\zeta|^{\alpha_0-1}}{(w-\bar\zeta)^{1+\alpha_0}} d\mu(\zeta)\right\};\ w \in G^{(-)}, \tag{3.14}$$

где B_α *— сходящиеся произведения типа Бляшке с нулями в точках каких-либо последовательностей* $\{a_\mu\}, \{b_\nu\} \subset G^{(-)}$, *подчиненных условию* (2.3). $C = \pm 1$, а $\mu(\zeta) \equiv \mu_{\alpha_0}(\zeta)$ *— комплексная функция ограниченной вариации на каждом компакте из* $G^{(-)}$, *подчиненная условию*

$$\iint\limits_{G^{(-)}} \frac{|\operatorname{Im}\zeta|^{\alpha-1}}{1+|\operatorname{Im}\zeta|^\beta} |d\mu(\zeta)| < +\infty. \tag{3.15}$$

Доказательство. Пусть $F(w) \in \mathbf{N}^m_{\alpha, \beta}$ $(0 < \alpha < +\infty,\ 0 \leqslant \beta < \alpha)$. Тогда, в силу 2.1, нули $\{a_\mu\}$ и полюсы $\{b_\nu\}$ этой функции подчинены условию (2.3). Одновременно, сходится интеграл (2.4). Далее, ввиду включений (2.2) — (2.2'), $\mathbf{N}^m_{\alpha, \beta} \subseteq \mathbf{N}^m_{\alpha, 1+\alpha} \subseteq \mathbf{N}^m_{\alpha_0, 1+\alpha_0}$ $(\alpha_0 > \alpha)$, и поэтому, учитывая теорему 2.2 и замечание к лемме 2.7, приходим к заключению, что $F(w)$ допускает представление (3.14) — (3.15), каково бы ни было $\alpha_0 > \alpha$, причем с $d\mu(\zeta) \equiv \log|F(\zeta)|\, d\sigma(\zeta)$.

Докажем теперь обратную часть теоремы. Для чего, во-первых заметим, что в силу утверждения 1° леммы 3.3 классу $\mathbf{N}^m_{\alpha, \beta}$ принадлежат произведения типа Бляшке B_α факторизации (3.14). Поэтому достаточно убедиться в том, что также

$$\varphi(w) \equiv \exp\left\{\frac{\alpha_0 2^{\alpha_0}}{\pi} \iint\limits_{G^{(-)}} \frac{|\operatorname{Im}\zeta|^{\alpha_0-1}}{[i(w-\bar\zeta)]^{1+\alpha_0}}\, d\mu(\zeta)\right\} \in N^{\infty}_{\alpha,\beta}. \tag{3.16}$$

Записав неравенство

$$A = \iint\limits_{G^{(-)}} \frac{|\operatorname{Im} w|^{\alpha-1}}{1+|\operatorname{Im} w|^{\beta}} \log^{+}|\varphi(w)|\, d\sigma(w) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\alpha_0 2^{\alpha_0}}{\pi} \iint\limits_{G^{(-)}} |\operatorname{Im}\zeta|^{\alpha_0-1} I(\alpha, \alpha_0, \beta, \zeta)\, |d\mu(\zeta)|, \tag{3.17}$$

где

$$I(\alpha, \alpha_0, \beta, \zeta) = \iint\limits_{G^{(-)}} \frac{|\operatorname{Im} w|^{\alpha-1}}{1+|\operatorname{Im} w|^{\beta}} \frac{d\sigma(w)}{|w-\bar\zeta|^{1+\alpha_0}}. \tag{3.17'}$$

Для оценки последнего интеграла заметим, что при любом $a>0$ имеем

$$J(\alpha, \alpha_0, \beta, a) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}\,dt}{(1+t^{\beta})(t+a)^{\alpha_0}} \leqslant a^{\alpha-\alpha_0} \int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}\,dx}{1+x^{\alpha_0}} = C_1 a^{\alpha-\alpha_0}. \tag{3.18}$$

Далее, при $a>1$, как нетрудно убедиться

$$\int\limits_0^{a} \frac{t^{\alpha-1}\,dt}{(1+t^{\beta})(t+a)^{\alpha_0}} < \frac{a^{\alpha-\alpha_0-\beta}}{\alpha-\beta}$$

и, одновременно,

$$\int\limits_a^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}\,dt}{(1+t^{\beta})(t+a)^{\alpha_0}} < \frac{a^{\alpha-\alpha_0-\beta}}{\alpha_0-\alpha+\beta}.$$

Поэтому, при $a>1$ имеем

$$J(\alpha, \alpha_0, \beta, a) < \frac{\alpha_0}{(\alpha-\beta)(\alpha_0-\alpha+\beta)} a^{\alpha-\alpha_0-\beta} \equiv C_2 a^{\alpha-\alpha_0-\beta}.$$

В силу непрерывности функции $g(a) \equiv J(\alpha, \alpha_0, \beta, a)$ на $(0, +\infty)$ из последней оценки и из (3.18) заключаем, что

$$J(\alpha, \alpha_0, \beta, a) \leqslant C_3 \frac{a^{\alpha-\alpha_0}}{1+a^{\beta}} \quad (0<a<+\infty), \tag{3.19}$$

где $C_3 \in (0, +\infty)$ — постоянная.

Вернемся к доказательству включения (3.16), или, что то же самое, доказательству ограниченности правой части (3.17). Очевидно, что если $\zeta = \xi + i\eta$ $(\eta<0)$, то в силу последней оценки

$$I(\alpha, \alpha_0, \beta, \zeta) \leqslant C_4 \frac{|\eta|^{\alpha-\alpha_0}}{1+|\eta|^{\beta}},$$

где $C_4 \in (0, +\infty)$ — постоянная. Поэтому при некоторой постоянной $C_5 \in (0, +\infty)$ будем иметь

$$A \leqslant C_5 \iint\limits_{G^{(-)}} \frac{|\operatorname{Im}\zeta|^{\alpha-1}}{1+|\operatorname{Im}\zeta|^{5}} |d\mu(\zeta)| < +\infty.$$

3.4. Покажем, что классы $N^{m}_{\alpha,\beta}$ $(0<\alpha<+\infty)$ при $\alpha<\beta\leqslant 1+\alpha$ не имеют параметрических представлений вида (3.14) — (3.15). С этой целью для любых таких α, β и любого $\alpha_0>\alpha$ рассмотрим меру

$$d\mu_{\alpha_0}(\zeta) = C_{\alpha_0} \frac{|\eta|^{(\beta-\alpha)/2}}{1+\xi^2} d\xi d\eta \left(\zeta=\xi+i\eta,\ C_{\alpha_0} = \frac{2^{-\alpha_0}\Gamma(\alpha_0)}{\Gamma\left(\alpha_0+\frac{\beta-\alpha}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{\beta-\alpha}{2}\right)}\right).$$

Очевидно, что эта мера удовлетворяет условию (3.15). Докажем, что несмотря на это

$$F(w) \equiv \exp\left\{\frac{\alpha_0 2^{\alpha_0}}{\pi} \iint\limits_{G^{(-)}} \frac{|\operatorname{Im}\zeta|^{\alpha_0-1}}{[i(w-\overline{\zeta})]^{1+\alpha_0}} d\mu_{\alpha_0}(\zeta)\right\} \overline{\in} N^{m}_{\alpha,\beta}, \tag{3.20}$$

отметив, что интеграл в экспоненте абсолютно и равномерно сходится внутри $G^{(-)}$, и тем самым, функция

$$G(w) \equiv \frac{\alpha_0 2^{\alpha_0}}{\pi} \iint\limits_{G^{(-)}} \frac{|\operatorname{Im}\zeta|^{\alpha_0-1}}{[i(w-\overline{\zeta})]^{1+\alpha_0}} d\mu_{\alpha_0}(\zeta)$$

аналитична в $G^{(-)}$.

Как нетрудно видеть

$$G(w) = \frac{\alpha_0 2^{\alpha_0}}{\pi} C_{\alpha_0} \int_0^{+\infty} t^{\alpha_0+\frac{\beta-\alpha}{2}-1} I_{\alpha_0}(w-it)\, dt, \tag{3.21}$$

где

$$I_{\alpha_0}(w-it) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\xi}{[i[(w-it)-\xi]]^{1+\alpha_0}(1+\xi^2)}.$$

Последний интеграл вычисляется стандартными методами теории вычетов. А именно, обозначив $w-it=s$ $(s\in G^{(-)})$, будем иметь

$$I_{\alpha_0}(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{[i(s-x)]^{1+\alpha_0}(1+x^2)} \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_s(x)\, dx,$$

где функция $\Phi_s(z) = \{[i(s-z)]^{1+\alpha_0}(1+z^2)\}^{-1}$ аналитична в плоскости z с разрезом по лучу $\{z: \operatorname{Re} z = \operatorname{Re} s,\ \operatorname{Im} z \leqslant \operatorname{Im} s\} \subset G^{(-)}$ и имеет простые полюсы в точках $z=\pm i$. Далее, вычислив интеграл от этой функции по контуру $\Gamma_R = \{Re^{i\theta}: 0<\theta<\pi\} \cup [-R, R]$ и устремив $R\to+\infty$, получаем

$$I_{\alpha_0}(s) = \pi(1+is)^{-1-\alpha_0}.$$

Подставим это последнее выражение в (3.21) и, воспользовавшись общеизвестной формулой для бэта-функции Эйлера, получим

$$G(w) = (1+iw)^{\frac{\beta-\alpha}{2}-1}.$$

Следовательно, при $w = u + iv \in G^{(-)}$ имеем

$$F(w) = \exp\left\{(1+iw)^{\frac{\beta-\alpha}{2}-1}\right\}$$

и

$$\log|F(w)| = |1+iw|^{\frac{\beta-\alpha}{2}-1} \cos\left[\left(1-\frac{\beta-\alpha}{2}\right)\operatorname{arctg}\left(\frac{v}{1+|v|}\right)\right].$$

При этом, поскольку $1/2 \leqslant 1-(\beta-\alpha)/2 < 1$, то $\log|F(w)| > 0$. Поэтому, как нетрудно убедиться, для любого $t<0$

$$L(t, F) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \log^+|F(u+it)|\,du \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\cos\left[\left(1-\frac{\beta-\alpha}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right]}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{du}{\left[(1+|t|)^2+u^2\right]^{\frac{1}{2}-\frac{\beta-\alpha}{4}}} = +\infty,$$

и, тем самым, выполнено (3.20).

Таким образом, построен контрпример, показывающий, что классы $N^m_{\alpha,\beta}$ $(0<\alpha<+\infty)$ в случае, когда $\alpha<\beta\leqslant 1+\alpha$ не имеют параметрического представления вида (3.14)—(3.15), которое, как было установлено в теореме 3.1, имеет место, когда $0\leqslant\beta<\alpha$. Случай $\beta=\alpha$ остается открытым. Однако автор предполагает, что и в этом случае вопрос должен иметь отрицательный ответ.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 22. IV. 1986

Ա. Մ. ՋՐԲԱՇՅԱՆ. Ցուծիի անսահմանափակ բնութագրիչ ունեցող մերոմորֆ ֆունկցիաների դասերի պարամետրական ներկայացումներ *(ամփոփում)*

Հոդվածում Մ. Մ. Ջրբաշյանի 1945 թ. հայտնի արդյունքների [9] հիման վրա և արտապատկերմանը հաջորդող սահմանային անցման հատուկ մեթոդի կիրառման միջոցով ստացված են Բ. Յա. Լևինի տիպի նոր բանաձևեր և Ցուծիի տիպի նոր բնութագրիչներ։

Նույն ճանապարհով ստացված է վերը նշվածների հետ առնչված հետևյալ արդյունքը՝ $G^{(-)} = \{w: \operatorname{Im} w < 0\}$ *կիսահարթությունում մերոմորֆ ֆունկցիաների Վ. Ի. Կռիլովի տիպի* $N^m_{\alpha,\beta}$ $(0<\alpha<+\infty,\ 0<\beta\leqslant 1+\alpha)$ *դասերի կանոնական ֆակտորիզացիաները։ Պետք է նշել, որ եթե* $F(w)\in N^m_{\alpha,\beta}$ $(0<\alpha<+\infty,\ 0<\beta\leqslant 1+\alpha)$ *և* $\{b_\nu\}\subset G^{(-)}$ *-նրա բևեռներն են, ապա այդ ֆունկցիայի*

$$L(t, F) \equiv \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\log^+|F(u+it)|\,du + \sum_{\operatorname{Im} b_\nu < t}\left(|\operatorname{Im} b_\nu| - |t|\right) \quad (t<0)$$

Ցուծիի բնութագրիչը, ընդհանրապես ասած, կարող է լինել անսահմանափակ, քանի որ $N^m_{\alpha,\beta}$*-ն սահմանված է որպես* $G^{(-)}$*-ում մերոմորֆ այն ֆունկցիաների դասը, որոնց համար*

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{|t|^{\alpha-1}}{1+|t|^{\beta}}\left[\mathbf{L}(t, F)+\mathbf{L}(t, F^{-1})\right] dt<+\infty .$$

$\mathrm{N}^{m}_{\alpha,\beta}$ $(0 < \alpha < +\infty)$ դասերի համար, այն դեպքում, երբ $0 < \beta < \alpha$, ստացված են նաև պարամետրական ներկայացումները։ Իսկ $\alpha < \beta < 1+\alpha$ դեպքի համար կառուցված է կոնտրօրինակ, որը ցույց է տալիս, որ այդ դասերը նույնատիպ պարամետրական ներկայացում չունեն։

A. M. DJRBASHIAN. *Parmetrical representations of some classes of meromorphic functions with unbounded Tsuji characteristics* (summary)

On the basis of M. M. Djrbashian's results new E. Ya. Levin type formulae are found and Tsuji type characteristics introduced.

Also the canonical factorizations of V. I. Krilov type classes $\mathrm{N}^{m}_{\alpha,\beta}$ $(0<\alpha<+\infty,$ $0<\beta<1+\alpha)$ of meromorphic functions $F(w)$ in the lower half-plane $G^{(-)}$ are found. They have unbounded Tsuji characteristics of the form

$$\mathbf{L}(t, F)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \log^{+}|F(u+it)|\, du+\sum_{\operatorname{Im} b_{\nu}<t}(|\operatorname{Im} b_{\nu}|-|t|) \quad (t<0)$$

$(\{b_{\nu}\}\subset G^{(-)}$ are the poles of $F(w)$ numbered according to their multiplicity). Note that the classes $\mathrm{N}^{m}_{\alpha,\beta}$ are the sets of those functions $F(w)$ meromorphic in $G^{(-)}$, for which

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{|t|^{\alpha-1}}{1+|t|^{\beta}}\left[\mathbf{L}(t, F)+\mathbf{L}(t, F^{-1})\right] dt<+\infty .$$

In the case $\beta=0$ this condition coincides with the condition of boundedness of Tsuji type characteristics.

In the case $0 < \beta < \alpha$ the parametrical representations of the classes $\mathrm{N}^{m}_{\alpha,\beta}$ $(0<\alpha<+\infty)$ are established. For $\alpha<\beta\leqslant 1+\alpha$ an example is constructed which show that in this case these classes do not allow parametrical representations of the same type.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Р. Неванлинна.* Однозначные аналитические функции, М., ГИТТЛ, 1941.
2. *Б. Я. Левин.* О функциях, голоморфных в полуплоскости, Труды Одесского державного ун-та, т. 3, 1941, 5—14.
3. *Б. Я. Левин.* Распределение корней целых функций, М., ГИТТЛ, 1956.
4. *M. Tsuji.* On Borel's directions of meromorphic functions of finite order, Tôhoku Math. J., v. 2, № 2, 1950, 97—112.
5. *А. А. Гольдберг, И. В. Островский.* Распределение значений мероморфных функций, М., «Наука», 1970.
6. *В. И. Крылов.* О функциях, регулярных в полуплоскости, Мат. сб., т. 6 (48), № 1, 1939, 95—138.
7. *М. М. Джрбашян.* О каноническом представлении мероморфных в единичном круге функций, ДАН АрмССР, т. 3, № 1, 1945, 3—9.
8. *М. М. Джрбашян.* К проблеме представимости аналитических функций, Сообщ. ин-та матем и мех. АН АрмССР, вып. 2, 1948, 3—55.
9. *М. М. Джрбашян.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, М., «Наука», 1966.

10. *M. Tsuji.* Potential theory in modern funclion theory, Tokyo, 1975.
11. *Ф. А. Шамоян.* Факторизационная теорема М. М. Джрбашяна и характеристика нулей аналитических в круге функций с мажорантой конечного роста, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», XIII, №№ 5—6, 1978. 405—422.
12. *Ф. А. Шамоян.* Факторизация, интегральные представления и идеалы аналитических функций, автореферат дис. на соискание уч. степ. доктора физ.-мат. наук, Ленинград. 1983.
13. *А. М. Джрбашян.* Соотношения равновесия и факторизационные теоремы для мероморфных в полуплоскости функций, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», XXI. № 3, 1986, 213—279.
14. *А. М. Джрбашян.* Функции типа Бляшке для полуплоскости, ДАН СССР, 246, № 6, 1979, 1295—1298.
15. *А. М. Джрбашян.* Функции типа Бляшке для полуплоскости, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», XVIII, № 6, 1983, 409—440.
16. *А. М. Джрбашян, Г. В. Микаелян.* Построение и основные свойства одного семейства функций типа Бляшке для полуплоскости, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», XV, № 6, 1980, 461—474.
17. *М. М. Джрбашян, А. Э. Джрбашян.* Интегральное представление некоторых классов аналитических в полуплоскости функций, ДАН СССР, 285, № 3, 1985, 547—550.