ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XXII, № 5, 1987 Математика

УДК 517.968

А. С. ЛАЛАЯН, А. Б. НЕРСЕСЯН

УСЛОВИЯ РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ ЗАДАЧИ СОПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ ПАРЫ КУСОЧНО-АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Введение

В работе [1] была предложена следующая дискретно-континуальная система Винера-Хопфа ($x \geqslant 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$)

$$\begin{gathered} y(x) = \int_0^\infty K_{11}(x-t)\, y(t)\, dt + \sum_{j=0}^{\infty} K_{12}(x-j)\, y_j + f(x), \\ \int_0^\infty K_{21}(n-t)\, y(t)\, dt + \sum_{j=0}^{\infty} K_{22}(n-j)\, y_j = b_n \end{gathered} \tag{1}$$

относительно неизвестной функции $y(x)$ $(x > 0)$ и последовательности $\{y_n\}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$.

При естественных ограничениях (см. [1]) задача эта сводится к следующей задаче сопряжения для двух пар функций $y^{\pm}(t)$, $z^{\pm}(\tau)$, аналитических, соответственно, в верхней (нижней) полуплоскости ($\operatorname{Im} t \gtrless 0$) и внутри (вне) единичного круга ($|\tau| \gtrless 1$) (знак преобразований Фурье для простоты опущен)

$$\begin{gathered} [K_{11}(t) - 1]\, y^+(t) + K_{12}(t)\, z^+(e^{it}) = y^-(t) + f(t), \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} K_{21}(t + 2\pi n)\, y^+(t + 2\pi n) + K_{22}(e^{it})\, z^+(e^{it}) = z^-(e^{it}) + b(e^{it}). \end{gathered} \tag{2}$$

Решение системы (2) в общем случае — задача не менее трудная, чем факторизация матрицы-функции 2×2. В [1] были указаны простейшие случаи явной разрешимости этой системы. Основную роль при этом (обеспечивающую нетеровость задачи (2)) играли условия

$$\begin{gathered} \Delta_1(t) \overset{\text{def}}{=} K_{11}(t) - 1 \neq 0, \quad (-\infty \leqslant t \leqslant \infty), \\ \Delta_2(e^{it}) \overset{\text{def}}{=} K_{22}(e^{it}) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{K_{12}(t + 2\pi n)\, K_{21}(t + 2\pi n)}{K_{11}(t + 2\pi n) - 1} \neq 0 \; (0 \leqslant t \leqslant 2\pi). \end{gathered} \tag{3}$$

Ниже задача (2) полностью исследуется в предположении рациональности некоторой функции (см. ниже условие (1.4)), но при допущении обращения в нуль функции $\Delta_1(t)$ (что влечет за собой, вообще говоря, наличие особенностей у $\Delta_2(e^{it})$).

§ 1. Постановка задачи и основные результаты

1.1. Рассматривается следующая однородная краевая задача (2) для двух пар функций, $y^{\mp}(t)$ и $z^{\mp}(\tau)$, аналитических, соответственно, в верхней (нижней) полуплоскости переменной t и внутри (вне) единичного круга переменной $\tau = e^{it}$

$$\begin{aligned} &[K_{11}(t)-1]\,y^{+}(t)+K_{12}(t)\,z^{+}(e^{it})=y^{-}(t), \\ &\sum_{n=-\infty}^{\infty} K_{21}(t+2\pi n)\,y^{+}(t+2\pi n)+K_{22}(e^{it})\,z^{+}(e^{it})=z^{-}(e^{it}). \end{aligned} \tag{1.1}$$

Функции $K_{11}(t)$, $K_{12}(t)$, $K_{21}(t)$ удовлетворяют условию Гельдера на $R=(-\infty,\infty)$ и обращаются на бесконечности в нуль. Функция $K_{22}(\tau)$ удовлетворяет условию Гельдера на единичной окружности Γ. Решения задачи ищутся в классе функций, удовлетворяющих условию Гельдера соответственно на R и Γ и обращающихся на бесконечности в нуль.

Всюду в дальнейшем будем предполагать, что

1.

$$K_{11}(t)-1=[K^{11}(t)-1]\prod_{s=1}^{\nu}\left(\frac{t-t_s}{t+i}\right)^{p_s^{11}}, \tag{1.2}$$

где p_s^{11} — целые $\geqslant 0$, $\sum_{s=1}^{\nu} p_s^{11}=p$; $K^{11}(t)-1\neq 0\ (-\infty\leqslant t\leqslant\infty)$.

2.

$$K_{12}(t)=K^{12}(t)\prod_{s=1}^{\nu}\left(\frac{t-t_s}{t+i}\right)^{p_s^{12}}, \tag{1.3}$$

где p_s^{12} — целые $\geqslant 0$, $K^{12}(t_s)\neq 0$.

Функции $K^{11}(t)$, $K^{12}(t)$ удовлетворяют условию Гельдера на R.

3. Имеет место представление

$$\frac{K_{12}(t)}{K_{11}(t)-1}\prod_{s=1}^{\nu}(t-t_s)^{d_s}=\frac{K^{+}(t)}{\prod_{j=1}^{\mu}(t-z_j^{+})^{q_j}}, \tag{1.4}$$

где

$$K^{+}(z_j^{+})\neq 0,\ d_s=p_s^{11}-h_s,\ h_s=\min(p_s^{11},\ p_s^{12}),\ \sum_{s=1}^{\nu} h_s=h,\ \sum_{s=1}^{\nu} d_s=d,$$

z_j^{+} — фиксированные точки верхней полуплоскости, q_j — целые $\geqslant 0$.

Функция $K^{+}(t)$ аналитична в верхней полуплоскости, за исключением, быть может, бесконечно удаленной точки, в которой ее порядок равен $k_{12}-d-q$ (где k_{12} — порядок на бесконечности функции $K_{12}(t)$), и удовлетворяет условию Гельдера во всех конечных t, принадлежащих R.

Замечание 1. Для тех точек t_s, для которых $d_s>0$, в соответствии с (1.2) и (1.3), $K^{+}(t_s)\neq 0$.

Учитывая (1.2), приходим к следующему общему представлению функции $\Delta_2(e^{it})$ (см. (3))

$$\Delta_2(e^{it}) = \Delta_0(e^{it}) \cdot \frac{\prod\limits_{k=1}^{b} (e^{it} - \tau_k)^{l_k}}{\prod\limits_{s=1}^{\nu} (e^{it} - e^{it_s})^{m_s}}, \tag{1.5}$$

где $l_k \geqslant 0$ — целые, $\sum\limits_{k=1}^{b} l_k = L$; $m_s > 0$ — целые, $\sum\limits_{s=1}^{\nu} m_s = m$; $\Delta_0(e^{it}) \neq 0, \infty$; $e^{it_s} \neq \tau_k \in \Gamma$ $(k = 1, 2, \cdots, b;\ s = 1, 2, \cdots, \nu)$.

Из вышеприведенных условий следует, что $\Delta_0(e^{it})$ удовлетворяет условию Гельдера на Γ.

1.2. Факторизация функций $[K^{11}(t) - 1]^{-1}$ и $\Delta_0^{-1}(e^{it})$ приводит к следующему для них представлению ([2]):

$$[K^{11}(t) - 1]^{-1} = \frac{X_1^+(t)}{X_1^-(t)}, \tag{1.6}$$

где

$$X_1^+(z) = \exp \Gamma^+(z), \quad X_1^-(z) = \left(\frac{z-i}{z+i}\right)^{-\varkappa_1} \exp \Gamma^-(z),$$

$$\Gamma_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \ln \left[\left(\frac{t-i}{t+i}\right)^{-\varkappa_1} [K^{11}(t) - 1]^{-1} \right] \frac{dt}{t-z},$$

$$\varkappa_1 = \operatorname{ind} [K^{11}(t) - 1]^{-1}, \quad (-\infty \leqslant t \leqslant \infty),$$

$$\Delta_0^{-1}(e^{it}) = \frac{X_2^+(e^{it})}{X_2^-(e^{it})}, \tag{1.7}$$

где

$$X_2^+(z) = \exp \Gamma_2^+(z), \quad X_2^-(z) = z^{-\varkappa_2} \exp \Gamma_2^-(z),$$

$$\Gamma_2(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \ln [\tau^{-\varkappa_2} \Delta_0^{-1}(\tau)] \frac{d\tau}{\tau - z}, \quad \varkappa_2 = \operatorname{ind} \Delta_0^{-1}(e^{it}) \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi).$$

Замечание 2. В частном случае, когда $m = L = p = 0$,

$$\varkappa_1 = \operatorname{ind} [K_{11}(t) - 1]^{-1} \quad (-\infty < t \leqslant \infty),$$

$$\varkappa_2 = \operatorname{ind} \Delta_2^{-1}(e^{it}) \quad (0 \leqslant t < 2\pi).$$

Пусть

$$\prod_{s=1}^{\nu} (t - t_s)^{d_s} = \prod_{s=1}^{\nu} (t - t_s)^{c_s} \prod_{s=1}^{\nu} (t - t_s)^{r_s}, \tag{1.8}$$

$$c_s > 0, \ r_s \geqslant 0; \ \sum_{s=1}^{\nu} c_s = c, \ \sum_{s=1}^{\nu} r_s = r, \ r_s \leqslant m_s.$$

Функция $\prod\limits_{s=1}^{\nu} (e^{it} - e^{it_s})^{m_s} \ (t - t_s)^{-r_s}$ на R не имеет полюсов.

Потребуем, наконец, выполнения следующих условий дифференцируемости

d_1. Функции $K^{11}(t)$, $K_{12}(t)$, $K_{21}(t)$ в точках $-i\ln\tau_k$ ($k=1, 2,\cdots, b$), $t_s+2\pi n$ ($s=1, 2,\cdots, \nu$; $n=k=0, \pm 1, \pm 2,\cdots$) дифференцируемы, соответственно, l_k-1 и $m+d_s-1$ раз.

d_2. Функция $K_{12}(t)[K_{11}(t)-1]^{-1}\prod\limits_{s=1}^{\nu}(t-t_s)^{d_s}$ в точках t_s ($s=1, 2,\cdots, \nu$) дифференцируема, соответственно, d_s-1 раз.

d_3. Функция $K_{22}(\tau)$ в точках τ_k ($k=1, 2,\cdots, b$), $\tau=e^{it_s}$ ($s=1, 2,\cdots \nu$) дифференцируема, соответственно, l_k-1 и $m+d_s-1$ раз.

Сформулируем основные результаты.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (1.2), (1.3), (1.4) *и* d_1, d_2, d_3. *Тогда число линейно независимых решений задачи* (1.1), *удовлетворяющих поставленным условиям, выражается следующими формулами**:

а) *при* $\varkappa_2-L>0$, $N=(\varkappa_2-L-p-\operatorname{rang}A+r+\max\{\varkappa_1, -q+h\})\times$ $\times H(\varkappa_2-L-p-\operatorname{rang}A+r+\max\{\varkappa_1, -q+h\})$,

б) *при* $\varkappa_2-L\leqslant 0$, $N=\varkappa_1+q-h-\operatorname{rang}B-\operatorname{rang}D-\operatorname{rang}E$,

матрицы A, B, D, E *приводятся ниже* (см. (2.15), (2.22), (2.23), (2.24)).

Теорема 2. *Пусть* $m=L=p=0$ (*см замечание* 2). *Тогда в условиях теоремы* 1 *задача* (1.1) *нетерова, ее индекс* $\varkappa$ *равен* $\varkappa_1+\varkappa_2$ *и, следовательно* (*см. теорему* 1), *можно вычислить количество условий разрешимости неоднородной задачи.*

§ 2. Доказательство теоремы 1

2.1. Подстановка (1.2) и (1.3) в первое уравнение задачи (1.1) дает

$$[K^{11}(t)-1]\prod_{s=1}^{\nu}\left(\frac{t-t_s}{t+i}\right)^{p^{11}} y^+(t)+K^{12}(t)\prod_{s=1}^{\nu}\left(\frac{t-t_s}{t+i}\right)^{p^{12}} z^+(e^{it})=y^-(t). \tag{2.1}$$

Так как левая часть (2.1) в точках t_s ($s=1, 2, \ldots, \nu$) имеет нули порядков не ниже h_s, то необходимо

$$y^-(t)=y_1^-(t)\prod_{s=1}^{\nu}\left(\frac{t-t_s}{t-i}\right)^{h_s}. \tag{2.2}$$

Отсюда, учитывая (1.4), получаем

$$\frac{\prod\limits_{s=1}^{\nu}(t-t_s)^{a_s}}{(t+i)^p}(t-i)^h\,y^+(t)+\frac{K^+(t)\,(t-i)^h}{(t+i)^p\prod\limits_{j=1}^{\mu}(t-z_j^+)^{q_j}}z^+(e^{it})=$$

$$=[K^{11}(t)-1]^{-1}\,y_1^-(t). \tag{2.3}$$

После факторизации функции $[K^{11}(t)-1]^{-1}$ и использования обобщенной теоремы Лиувилля ([2]), имеем

* Здесь и далее $H(t)$—функция Хевисайда.

$$\frac{(t-i)^h \prod\limits_{s=1}^{\nu}(t-t_s)^{d_s} y^+(t)}{X_1^+(t)\,(t+i)^p} + \frac{K^+(t)\,(t-i)^h\, z^-(e^{it})}{X_1^+(t)\,(t+i)^p \prod\limits_{j=1}^{\mu}(t-z_j^+)^{q_j}} = \frac{y_1^-(t)}{X_1^-(t)} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{P_{\varkappa_1+q-1}(t)}{(t+i)^{\varkappa_1} \prod\limits_{j=1}^{\mu}(t-z_j^+)^{q_j}}, & \varkappa_1 > 0 \\ \dfrac{P_{q-1}(t)}{\prod\limits_{j=1}^{\mu}(t-z_j^+)^{q_j}}, & \varkappa_1 < 0, \end{cases} \tag{2.4}$$

где $P_{\varkappa_1+q-1}(t)$, $P_{q-1}(t)$—полиномы степеней, соответственно, не выше $\varkappa_1+q-1$ и $q-1$ с произвольными коэффициентами. В случае $\varkappa_1<0$ для аналитичности функции $y_1^-(t)$ в нижней полуплоскости необходимо, чтобы $P_{q-1}(t)=(t+i)^{-\varkappa_1} P_{\varkappa_1+q-1}(t)$. Таким образом, в обоих случаях в (2.4) мы имеем одинаковые правые части. Отсюда следует представление для функции $y^+(t)$ через функцию $z^+(e^{it})$

$$y^+(t) = \frac{1}{\left[\prod\limits_{s=1}^{\nu}(t-t_s)^{d_s}\right]\left[\prod\limits_{j=1}^{\mu}(t-z_j^+)^{q_j}\right]} \cdot \left\{ \frac{X_1^+(t)\,P_{\varkappa_1+q-1}(t)}{(t+i)^{\varkappa_1-p}\,(t-i)^h} - \right.$$

$$\left. - K^+(t)\, z^+(e^{it}) \right\}. \tag{2.5}$$

Для аналитичности функции $y^+(t)$ в верхней полуплоскости необходимо, чтобы $P_{\varkappa_1+q-1}(t)=(t-i)^h\, P_{\varkappa_1+q-h-1}(t)$, откуда

$$y^+(t) = \frac{1}{\left[\prod\limits_{s=1}^{\nu}(t-t_s)^{d_s}\right]\left[\prod\limits_{j=1}^{\mu}(t-z_j^+)^{q_j}\right]} \left\{ \frac{X_1^+(t)\,P_{\varkappa_1+q-h-1}(t)}{(t+i)^{\varkappa_1-p}} - \right.$$

$$\left. - K^+(t)\, z^+(e^{it}) \right\}, \tag{2.6}$$

причем, если $\varkappa_1+q-h-1<0$, следует положить $P_{\varkappa_1+q-h-1}(t)\equiv 0$.

Подстановка (2.6) во второе уравнение задачи (1.1) приводит к краевой задаче Римана на Γ

$$\Delta_2(e^{it})\, z^+(e^{it}) = z^-(e^{it}) - \sum_{a=0}^{\varkappa_1+q-h-1} \theta_a \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_a(t+2\pi n), \tag{2.7}$$

θ_a — коэффициенты полинома $P_{\varkappa_1+q-h-1}(t)$,

$$g_a(t) = \frac{K_{21}(t)\,X_1^+(t)\,t^a}{\left[\prod\limits_{s=1}^{\nu}(t-t_s)^{d_s}\right]\left[\prod\limits_{j=1}^{\mu}(t-z_j^+)^{q_j}\right](t+i)^{\varkappa_1-p}} \tag{2.8}$$

$(a=0,\,1,\cdots,\,\varkappa_1+q-h-1)$.

Отсюда с учетом (1.5)

$$z^+(e^{it})=\Delta_0^{-1}(e^{it})\frac{\prod\limits_{s=1}^{\nu}(e^{it}-e^{it_s})^{m_s}}{\prod\limits_{k=1}^{b}(e^{it}-\tau_k)^{l_k}}z^-(e^{it})-\sum_{a=0}^{x_1+q-h-1}\theta_a\varphi_a(e^{it}), \quad (2.9)$$

где

$$\varphi_a(e^{it})=\Delta_2^{-1}(e^{it})\sum_{n=-\infty}^{\infty}g_a(t+2\pi n). \quad (2.10)$$

Функции $\varphi_a(e^{it})$ в точках $e^{it}=\tau_k$ $(k=1, 2, \cdots, b)$, вообще говоря, обращаются в бесконечность порядков не выше l_k, соответственно. Поэтому краевое условие (2.9) может быть удовлетворено конечными на Г функциями $z^+(\tau)$, $z^-(\tau)$ ([2]).

Функции $\prod\limits_{k=1}^{b}(e^{it}-\tau_k)^{l_k}\varphi_a(e^{it})[X_2^+(e^{it})]^{-1}$ будут интегрируемы на Г, причем

$$\prod_{k=1}^{b}(e^{it}-\tau_k)^{l_k}\frac{\varphi_a(e^{it})}{X_2^+(e^{it})}=\psi_a^+(e^{it})-\psi_a^-(e^{it}), \quad (2.11)$$

где

$$\psi_a(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\prod_{k=1}^{b}(\tau-\tau_k)^{l_k}\frac{\varphi_a(\tau)}{X_2^+(\tau)}\frac{d\tau}{\tau-z}. \quad (2.12)$$

В силу условий d_1, d_2, d_3, функции $\Delta_0^{-1}(e^{it})$, $\varphi_a(\tau)\prod\limits_{k=1}^{b}(\tau-\tau_k)^{l_k}$ и, следовательно, функции $\psi_a^{\pm}(\tau)$ в точках τ_k, e^{it_s} единичной окружности будут обладать производными порядков, соответственно, l_k-1, $m-1$ Следовательно, функции $z^+(\tau)$, $z^-(\tau)$, удовлетворяющие краевому условию (2.7) при условии, что $z^-(\tau)$ обращается на бесконечности в нуль, определяются следующими формулами ([2]):

$$\begin{aligned} z^+(z)&=\sum_{a=0}^{x_1+q-h-1}\theta_a Y_a^+(z)+X_2^+(z)\prod_{s=1}^{\nu}(z-e^{it_s})^{m_s}Q_{x_2-L-1}(z),\\ z^-(z)&=\sum_{a=0}^{x_1+q-h-1}\theta_a Y_a^-(z)+X_2^-(z)\prod_{k=1}^{b}(z-\tau_k)^{l_k}Q_{x_2-L-1}(z), \end{aligned} \quad (2.13)$$

где $Q_{x_2-L-1}(z)$ — полином степени не выше x_2-L-1 с произвольными коэффициентами, $\sum\limits_{a=0}^{x_1+q-h-1}\theta_a Y(z)$ — общий вид канонической функции неоднородной задачи ([2]), линейно зависящей от x_1+q-h произвольных постоянных.

2.2. Подстановка (2.13) в (2.5) приводит к представлеиию для функции $y^+(t)$, не зависящему от $z^+(e^{it})$

$$y^+(t)=\frac{1}{\left[\prod\limits_{s=1}^{\nu}(t-t_s)^{d_s}\right]\left[\prod\limits_{j=1}^{\mu}(t-z_j^+)^{q_j}\right]}\times$$

$$\times\left\{f^{+}(t)\sum_{a=0}^{\varkappa_1+q-h-1}\theta_a\chi_a^{+}(t)-K^{+}(t)X_2^{+}(e^{it})\cdot\times\right.$$

$$\left.\times\prod_{s=1}^{\nu}(e^{it}-e^{it_s})^{m_s}Q_{\varkappa_2-L-1}(e^{it})\right\},\tag{2.14}$$

где

$$f^{+}(t)\equiv X_1^{+}(t)(t+i)^{-\varkappa_1+p}-K^{+}(t),\ \chi_a^{+}(t)\equiv t^a-Y_a^{+}(e^{it}).$$

Для ограниченности функции $y^{+}(t)$ в точках t_s $(s=1,2,\cdots,\nu)$ и аналитичности в точках z_j^{+} $(j=1,2,\cdots,\mu)$ необходимо:

а) наложить на функцию $\left[f^{+}(t)\sum_{a=0}^{\varkappa_1+q-h-1}\theta_a\chi_a^{+}(t)\right]$ r условий обращения в точках t_s в нули порядков, соответственно, r_s:

$$\frac{d^{\alpha_s-1}}{dt^{\alpha_s-1}}\left[f^{+}(t)\sum_{a=0}^{\varkappa_1+q-h-1}\theta_a\chi_a^{+}(t)\right]_{t=t_s}=0,\tag{2.15}$$

$$(\alpha_s=1,2,\cdots,r_s;\ s=1,2,\cdots,\nu).$$

Если A — матрица преобразования (2.15), то $\dim\operatorname{Ker}A=\varkappa_1+q-h-$ $-\operatorname{ranq}A$.

б) На функцию

$$F(t)\equiv\frac{f^{+}(t)\sum_{a=0}^{\varkappa_1+q-h-1}\theta_a\chi_a^{+}(t)}{K^{+}(t)\cdot X_2^{+}(e^{it})\prod_{s=1}^{\nu}(e^{it}-e^{it_s})^{m_s}}-Q_{\varkappa_2-L-1}(e^{it}),\tag{2.16}$$

линейно зависящую от $(\varkappa_1+q-h)H(\varkappa_1+q-h)-\operatorname{rang}A+\varkappa_2-L$ произвольных постоянных, и, в силу замечания 1 и условий (1.4), (1.8), (2.15) $\neq\infty$ в точках t_s (если $c_s>0$) и z_j^{+} $(s=1,2,\cdots,\nu;\ j=1,2,\cdots,\mu)$, необходимо наложить $c+q=p-h-r+q$ условий обращения в точках t_s, z_j^{+} в нули порядков, соответственно, c_s, q_j:

$$\begin{gathered}\frac{d^{\beta_s-1}}{dt^{\beta_s-1}}[F(t)]_{t=t_s}=0,\\ \frac{d^{\gamma_j-1}}{dz^{\gamma_j-1}}[F(z)]_{z=z_j^{+}}=0\end{gathered}\tag{2.17}$$

$(\beta_s=1,2,\cdots,c_s;\ \gamma_j=1,2,\cdots,q_j)$.

В силу условий d_1, d_2, d_3 все операции дифференцирования имеют смысл. В случае, когда $\varkappa_2-L\geqslant p-h-r+q$, в силу общих свойств определителя Вандермонда, в записи условий (2.17) существуют не менее $p-h-r+q$ линейно независимых столбцов. Следовательно, число линейно независимых постоянных, определяющих функцию $y^{+}(t)$, в данном случае равно

$$\begin{gathered}(\varkappa_2-L-p-q-\operatorname{rang}A+h+r+(\varkappa_1+q-h)H(\varkappa_1+q-h))\times\\ \times H(\varkappa_2-L-p-q-\operatorname{rang}A+h+r+(\varkappa_1+q-h)H(\varkappa_1+q-h))=\\ =(\varkappa_2-L-p-\operatorname{rang}A+r+\max\{\varkappa_1,-q+h\})H(\varkappa_2-L-p-\operatorname{rang}A+\\ +r+\max\{\varkappa_1,-q+h\}).\end{gathered}\tag{2.18}$$

2.3. Для случая, когда $0<\varkappa_2-L<p-h-r+q$, предварительно докажем следующее

Предложение 1. *Пусть $\varkappa_2-L>0$ и выполнены условия* (1.2), (1.3), (1.4) *и* d_1, d_2, d_3. *Тогда, если число линейно независимых решений задачи* (1.1) *есть* N, *то число линейно независимых решений задачи*

$$\begin{gathered}[K_{11}(t)-1]\,y^+(t)+K_{12}(t)\,z^+(e^{it})=y^-(t),\\ \sum_{n=-\infty}^{\infty}K_{21}(t+2\pi n)\,y^+(t+2\pi n)+K_{22}(e^{it})\,z^+(e^{it})=e^{-it}z^-(e^{it}),\end{gathered}\tag{2.19}$$

равно $(N-1)\,H(N-1)$.

▲ Обозначая в задаче (2.19) $e^{-it}\,z^-(e^{it})\equiv Z^-(e^{it})$, придем к задаче (1.1). Однако в этом случае на произвольные постоянные наложится одно условие, исходящее из следующего требования: $[zZ^-(z)]_{z=\infty}=0$, уменьшающего на единицу число линейно независимых постоянных. Для случая $\varkappa_2-L<0$ предложение не в силе, т. к. в случае разрешимости задачи (1.1) (см. [2]), функция $Z^-(z)$, являющаяся ее решением, может иметь на бесконечности нуль порядка выше первого (в отличии от предыдущего случая) ▼

Пусть $0<\varkappa_2-L<p-h-r+q$, причем $p-h-r+q-\varkappa_2+L=\varkappa_0$. Рассмотрим краевое условие

$$\begin{gathered}[K_{11}(t)-1]\,y^+(t)+K_{12}(t)\,z^+(e^{it})=y^-(t),\\ \sum_{n=-\infty}^{\infty}K_{21}(t+2\pi n)\,y^+(t+2\pi n)+K_{22}(e^{it})\,z^+(e^{it})=e^{i\varkappa_0 t}\cdot z^-(e^{it}),\end{gathered}\tag{2.20}$$

эквивалентное следующему:

$$\begin{gathered}[K_{11}(t)-1]\,y^+(t)+K_{12}(t)\,z^+(e^{it})=y^-(t),\\ e^{-i\varkappa_0 t}\sum_{n=-\infty}^{\infty}K_{21}(t+2\pi n)\,y^+(t+2\pi n)+e^{-i\varkappa_0 t}K_{22}(e^{it})\,z^+(e^{it})=z^-(e^{it}).\end{gathered}\tag{2.21}$$

Индекс приведенной задачи на Γ (см. (1.7)) для краевого условия (2.21) равен $\varkappa_2+\varkappa_0$. Так как $\varkappa_2+\varkappa_0-L=p-h-r+q$, то задача (2.20) имеет

$$(\varkappa_2+\varkappa_0-L-p-\operatorname{rang}A+r+\max\{\varkappa_1,-q+h\})\,H(\varkappa_2+\varkappa_0-L-p-\\ -\operatorname{rang}A+r+\max\{\varkappa_1,-q+h\})$$

линейно независимых решений. Воспользовавшись результатом предложения 1, заключаем, что и в этом случае задача (1.1) имеет число линейно независимых решений, даваемое формулой (2.18).

В случае, если $\varkappa_2-L\leqslant 0$, в (2.13) следует положить $Q_{\varkappa_2-L-1}(e^{it})\equiv\equiv 0$. Функции $Y_a^-(z)$ $(a=0,1,\cdots,\varkappa_1+q-h-1)$ на бесконечности, вообще говоря, будут иметь полюс порядка не выше $L-\varkappa_2-1$ ([2]). Пусть главные части разложения функций $Y_a^-(z)$ в окрестности бесконечно удаленной точки есть $\sum_{n=0}^{L-\varkappa_2-1} b_{n\alpha} z^n$. Пусть B — матрица коэффициентов $b_{n\alpha}$ ($n=0, 1, \cdots, L-\varkappa_2-1$; $\alpha=0, 1, \cdots, \varkappa_1+q-h-1$). Для аналитичности функции $z^-(z)$ вне Γ необходимо условие

$$\Theta \cdot B=0, \tag{2.22}$$

где $\Theta=(\theta_0, \theta_1, \cdots, \theta_{\varkappa_1+q-h-1})$. Отсюда $\dim \operatorname{Ker} B=\varkappa_1+q-h-\operatorname{rang} B$.

Для ограниченности функции $y^+(z)$ в точках t_s и аналитичности в точках z_j^+ необходимо

$$\frac{d^{\delta_s-1}}{dt^{\delta_s-1}}\Big[f^+(t)\sum_{\alpha=0}^{\varkappa_1+q-h-1}\theta_\alpha \chi_\alpha^+(t)\Big]_{t=t_s}=0 \tag{2.23}$$

($\delta_s^{\prime\prime}=1, 2, \cdots, d_s$; $s=1, 2, \cdots, \nu$),

$$\frac{d^{\gamma_j-1}}{dz^{\gamma_j-1}}\Big[f^+(z)\sum_{\alpha=0}^{\varkappa_1+q-h-1}\theta_\alpha \chi_\alpha^+(z)\Big]_{z=z_j^+}=0. \tag{2.24}$$

($\gamma_j=1, 2, \cdots, q_j$; $j=1, 2, \cdots, \mu$).

Все операции дифференцирования обоснованы, благодаря условиям d_1, d_2, d_3. Отсюда, если D — матрица преобразования (2.23), E—матрица преобразования (2.24), то

$$N=\varkappa_1+q-h-\operatorname{rang} B-\operatorname{rang} D-\operatorname{rang} E. \tag{2.25}$$

Теорема 1 доказана.

§ 3. Доказательство теоремы 2

По определению $\varkappa=N-N'$, где N' — есть суммарное число условий на функции $f(t)$, $b(e^{it})$ для разрешимости неоднородной задачи (2) в классе функций, исчезающих на бесконечности. Рассмотрим отдельно каждый из четырех возможных вариантов.

3.1. $\varkappa_1>0$, $\varkappa_2>0$. В этом случае, в соответствии с теоремой 1, $N=\varkappa_1+\varkappa_2$, а неоднородная задача разрешима безусловно, т. е. $N'=0$. Отсюда $\varkappa=\varkappa_1+\varkappa_2$.

3.2. $\varkappa_1>0$, $\varkappa_2<0$. В соответствии с теоремой 1 в этом случае $N=\varkappa_1+q-\operatorname{rang} B-\operatorname{rang} E$.

В случае неоднородной задачи

$$y^+(t)=X_1^+(t)\,\psi^+(t)+\frac{1}{\prod_{j=1}^{\mu}(t-z_j^+)^{q_j}}\times$$

$$\times\left\{\frac{X_1^+(t)\,P_{\varkappa_1+q-1}(t)}{(t+i)^{\varkappa_1}}-K^+(t)\,z^+(e^{it})\right\}, \tag{3.1}$$

$$z^+(e^{it})=\Delta_2^{-1}(e^{it})z^-(e^{it})-\sum_{\alpha=0}^{\varkappa_1+q-1}\theta_\alpha \varphi_\alpha(e^{it})+\lambda(e^{it}), \tag{3.2}$$

где

$$\psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t)}{X_1^-(t)}\,\frac{dt}{t-z};\ \lambda(e^{it})=-\Delta_2^{-1}(e^{it})\times$$

$$\times\sum_{n=-\infty}^{\infty}K_{21}(t+2\pi n)\,X_1^+(t+2\pi n)\,\psi^+(t+2\pi n).$$

Если в окрестности бесконечно удаленной точки $\lambda_1^-(z)=-\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n z^{-n}$, где

$$\lambda_1(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\lambda(\tau)}{X_2^+(\tau)}\,\frac{d\tau}{\tau-z},$$

то условиями разрешимости задачи (3.2), аналогично выводу (2.22) будут

$$\Theta\cdot B=\lambda, \tag{3.3}$$

где $\lambda=(\lambda_0,\lambda_1,\cdots,\lambda_{L-\varkappa_2-1})$.

Для разрешимости системы (3.3) необходимо, чтобы свободный член удовлетворял $l-\varkappa_2-\operatorname{rang}B$ условиям; для существования же функции $y^+(z)$ необходимо наложить на свободный член еще $q-\operatorname{rang}E$ условий. Следовательно, $N'=-\varkappa_2-\operatorname{rang}B+q-\operatorname{rang}E$. Отсюда $\varkappa=\varkappa_1+\varkappa_2$.

3.3 $\varkappa_1<0$, $\varkappa_2\geqslant 0$. В соответствии с теоремой 1 в этом случае

$$N=(\varkappa_2+\max\{\varkappa_1,-q\})H(\varkappa_2+\max\{\varkappa_1,-q\}).$$

В случае неоднородной задачи

$$y^+(t)=X_1^+(t)\psi^+(t)+\frac{1}{\prod_{j=1}^{\mu}(t-z_j^+)^{q_j}}\{X_1^+(t)P_{q-1}(t)-K^+(t)z^+(e^{it})\}, \tag{3.4}$$

$$y^-(t)=X_1^-(t)\left[\psi^-(t)+\frac{P_{q-1}(t)}{\prod_{j=1}^{\mu}(t-z_j^+)^{q_j}}\right]. \tag{3.5}$$

Неоднородная задача на Γ (3.2) разрешима безусловно, поэтому условия на свободный член основаны на существовании функций $y^+(z)$, $y^-(z)$. Функция $X_1^-(z)$ в точке $-i$ имеет полюс порядка $-\varkappa_1$. Пусть в окрестности точки $-i$

$$\psi^-(z)\cdot\prod_{j=1}^{\mu}(z-z_j^+)^{q_j}=-\sum_{n=0}^{\infty}k_n(z+i)^n.$$

Условиями существования функции $y^-(z)$ будут

$$\frac{d^n}{dz^n}P_{q-1}(z)=k_n \tag{3.6}$$

$$(n=0,1,\cdots,-\varkappa_1-1).$$

Пусть K—матрица преобразования (3.6), причем

$$\operatorname{rang}K=\min\{-\varkappa_1,q\}. \tag{3.7}$$

а) Если $q < -\varkappa_1$, то $N = (\varkappa_2 - q) H(\varkappa_2 - q)$.

Для существования функции $y^-(z)$ свободный член должен удовлетворять $-\varkappa_1 - q$ условиям, причем коэффициенты θ_α $(\alpha = 0, 1, \cdots, q-1)$ полинома $P_{q-1}(t)$ в этом случае определены однозначно.

Для существования функции $y^+(z)$ необходимо на $\varkappa_2$ произвольных постоянных полинома $Q_{\varkappa_2-1}(e^{it})$ (см. (2.13)) наложить $(q - \varkappa_2) \cdot H(q - \varkappa_2)$ условий обращения в нули порядков q_j $(j = 1, 2, \cdots, \mu)$ в точках z_j^+ функции $X_1^+(z) P_{q-1}(z) - K^+(z) z^-(e^{iz})$ (см. 3.4)). Следовательно $N' = -\varkappa_1 - q + (q - \varkappa_2) H(q - \varkappa_2)$. Отсюда $\varkappa = \varkappa_1 + q + (\varkappa_2 - q)$ $[H(\varkappa_2 - q) + H(q - \varkappa_2)] = \varkappa_1 + \varkappa_2$.

б) Если $-\varkappa_1 \leqslant q$, то функция $y^-(z)$ существует безусловно и $N' = (\varkappa_1 + \varkappa_2) H(\varkappa_1 + \varkappa_2)$. Обеспечение существования функции $y^-(z)$ уменьшает число произвольных постоянных полинома $P_{q-1}(z)$ до величины $\varkappa_1 + q$. К ним прибавляется еще $\varkappa_2$ произвольных постоянных, появляющихся при решении задачи на (3.2) Г.

Для существования функции $y^+(z)$ необходимо удовлетворить следующим q условиям:

а) в случае однородной задачи

$$\frac{d^{\gamma_j - 1}}{dz^{\gamma_j - 1}} [X_1^+(z) P_{q-1}(z) - K^+(z) z^-(e^{iz})]_{z = z_j^+} = 0, \tag{3.8}$$

б) в случае неоднородной задачи

$$\frac{d^{\gamma_j - 1}}{dz^{\gamma_j - 1}} [X_1^+(z) P_{q-1}(z) - K^+(z) z^-(e^{iz})]_{z = z_j^+} = \omega(\gamma_j, z_j^+) \tag{3.9}$$

$$(\gamma_j = 1, 2, \cdots, q_j;\ j = 1, 2, \cdots, \mu),$$

где значения $\omega(\gamma_j, z_j^+)$ нетрудно выписать.

Пусть W — матрица преобразования (3.8). Тогда $N = \varkappa_1 + \varkappa_2 + q - \operatorname{rang} W$, $N' = q - \operatorname{rang} W$, следовательно, $\varkappa = \varkappa_1 + \varkappa_2$. Остается показать, что в данном случае $\varkappa_1 + \varkappa_2 + q - \operatorname{rang} W = (\varkappa_1 + \varkappa_2) H(\varkappa_1 + \varkappa_2)$.

Имеем

$$\operatorname{rang} W = \varkappa_1 + \varkappa_2 + q - N \leqslant q. \tag{3.10}$$

Если $\varkappa_2 > q$, то, в соответствии с (3.10), $\operatorname{rang} W = q$. Если $q > \varkappa_2 > -\varkappa_1$, то $N \neq 0$, откуда, в соответствии с предложением 1, $\operatorname{rang} W = q$ Если $\varkappa_2 = -\varkappa_1$, то $\operatorname{rang} W = q$, $N = 0$. Пусть $\varkappa_2 < -\varkappa_1$. В соответствии с предложением 1, $N = 0$. Отсюда $\operatorname{rang} W = \varkappa_1 + \varkappa_2 + q$.

Таким образом

$$\varkappa_1 + \varkappa_2 + q - \operatorname{rang} W = \begin{cases} \varkappa_1 + \varkappa_2, & \text{если } \varkappa_2 \geqslant -\varkappa_1 \\ 0, & \text{если } \varkappa_2 < -\varkappa_1, \end{cases}$$

что и требовалось доказать.

3.4. Случай, когда $\varkappa_1 < 0$, $\varkappa_2 < 0$ является композицией случаев 3.2 и 3.3, рассматривается вполне аналогично и также приводит к результату $\varkappa = \varkappa_1 + \varkappa_2$. Этим завершается доказательство теоремы 2.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 14. V. 1986

Ա. Ս. ԼԱԼԱՅԱՆ, Հ. Բ. ՆԵՐՍԻՍՅԱՆ. Կտոր առ կտոր-անալիտիկ ֆունկցիաների զույգի համար համալուծման մի խնդրի լուծելիության պայմանները *(ամփոփում)*

Ներկայացվող հոդվածում հետազոտվում է համալուծման խնդիրը կտոր առ կտոր անալիտիկ ֆունկցիաների համար (անվերջ ուղղի և միավոր շրջանագծի վրա) ենթադրելով որոշակի ֆունկցիայի ռացիոնալությունը և մյուսի զրոյի վերածվելը։

Դուրս են բերվում ընդհանուր դեպքում խնդրի գծորեն անկախ լուծումների թվի համար բանաձևեր և ապացուցվում է նյոտերի պայմանի տեղի ունենալը որոշակի պայմանների դեպքում։

A. S. LALAJAN, A. B. NERSESIAN. *Solvability conditions for the conjugation problem for a pair of piecewite-analytic functions* (summary)

The paper studies the problem of conjugation for a pair of piecewite-analytic functions on the infinite line and the unit sphere. We derive formulas for the number of linearly independent solutions and show that under some conditions the problem is noetherian.

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. Б. Нерсесян.* Разрешимость некоторых уравнений и задачи сопряжения со сдвигом, Республиканская научно-практическая конференция по методике преподавания математики и механики в ВУЗе (24—27 мая 1983 года), Тезисы докладов, 40—42.
2. *Ф. Д. Гахов.* Кравые задачи, Физматгиз, М., 1963.