ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XXII, № 5, 1987 Математика

УДК 519. 212.3

Р. Г. АРАМЯН

О СТОХАСТИЧЕСКОЙ АППРОКСИМАЦИИ ВЫПУКЛЫХ ТЕЛ

В работе Р. В. Амбарцумяна [1] было указано на существование т. н. $\sin^2$-представлений функций ширины выпуклых тел в R^3 и была поставлена задача их систематического изучения.

Пусть $H(\xi)$—ширина некоторого выпуклого тела в направлении $\xi \in S^2$. Существует представление

$$H(\xi) = \int\limits_{S^2 \times S^1} \sin^2 \alpha(\xi, \Omega, \Phi)\, m(d\Omega, d\Phi). \tag{1}$$

Здесь S^i—единичная сфера в R^{i+1}, $i=1, 2$, $\Omega \in S^2$, $\Phi \in S^1$, m есть некоторая мера на произведении $S^2 \times S^1$. Угол α определяется с помощью следующего геометрического построения. Каждой $(\Omega, \Phi) \in S^2 \times S^1$ соответствует проходящая через 0 плоскость $e(\Omega, \Phi)$: последняя содержит Ω и повернута вокруг неё на угол Φ. Через e_ξ обозначим плоскость, нормальную к пространственному направлению ξ. По определению $\alpha(\xi, \Omega, \Phi)$ есть угол между Ω и следом e_ξ на $e(\Omega, \Phi)$. В [1] было указано некоторое „стандартное" $\sin^2$-представление для многогранников и отсюда было выведено существование (1) для произвольных выпуклых тел в R^3. В [2] было получено одно конкретное $\sin^2$-представление для гладких выпуклых телл. Однако представление (1) не единственно (для данного H существует много мер m). В настоящей работе находится вид меры m, которая получается при некоторой стохастической аппроксимации выпуклого тела K. Стохастическая аппроксимация, которую мы рассматриваем, состоит в следующем. На тело K независимо друг от друга бросаются n точек с одним и тем же распределением **P**. Для случайного выпуклого многогранника, натянутого на эти точки, выписывается „стандартное" $\sin^2$-представление, предложенное в [1]. Это представление усредняется относительно последовательности бросаемых точек и рассматривается поведение усредненного представления при $n \to \infty$. В настоящей статье показано, что в пределе получаем $\sin^2$—представление функции ширины тела K, и что это представление не зависит от **P** при выборе **P** в некотором широком классе. Найдена плотность меры m в предельном представлении в терминах нормальных кривизн поверхности K.

1. *Случай равномерного распределения по площади.* Рассмотрим компактное выпуклое тело K (с непустой внутренностью) в R^3, имеющее дважды непрерывно дифференцируемую границу ∂K. Предположим, что во всех точках ∂K гауссова кривизна $k_1 k_2$ положительна. Тогда сферическое отображение поверхности dK на еди-

ничную сферу S^2 (которое сопоставляет каждой точке $P^* \in \partial K$ конец отложенного от 0 единичного вектора внешней нормали к касательной плоскости в точке P^*) является гомеоморфизмом. На S^2 независимо друг от друга бросим n течек $P_1, \cdots, P_n$ с одним и тем же распределением $dP_i = f(\omega)\, d\omega$, $i = 1, 2, \cdots, n$ где $f(\omega)$—плотность распределения, непрерывная функция и $f(\omega) > 0$, $d\omega$—элемент лебеговой меры на S^2.

Точкам $P_1, \cdots, P_n$ по отображению, обратному к сферическому отображению, соответствуют точки $P_1^*, \cdots, P_n^*$ на ∂K. Согласно [1] функция ширины $H_{P_1, \ldots, P_n}(\xi)$ случайного многогранника с вершинами $\{P_1^*, \cdots, P_n^*\}$ представима в виде

$$H_{P_1, \ldots, P_n}(\xi) = (2\pi)^{-1} \sum_{\substack{i, j=1 \\ i \neq j}} I_B(i, j) \int_{A_{ij}} \sin^2\alpha(\xi, \Omega_{ij}, \Phi)\, l_{ij}^*\, d\Phi. \tag{2}$$

Здесь $\xi, \Omega_{ij} \in S^2$, $\Phi \in S^1$, $l_{ij}^* = |P_i^*, P_j^*|$, Ω_{ij}—направление $\overrightarrow{P_i^* P_j^*}$, A_{ij} — внешний двугранный угол ребра $P_i^* P_j^*$, B—множество всех пар (i, j), которым соответствуют ребра. После усреднения по последовательности $(P_1, \cdots, P_n)$ и из соображений симметрии получаем

$$\int_{(S^2)^n} H_{P_1 \ldots P_n}(\xi)\, dP_1 \cdots dP_n = (2\pi)^{-1} C_n^2 \int_{(S^2)^n} \times$$

$$\times \left[\int_{A_{12}} I_B(1, 2) \sin^2\alpha(\xi, \Omega_{12}, \Phi)\, l_{1,2}^*\, d\Phi \right] dP_1 \cdots dP_n. \tag{3}$$

Принимая точку P_1 за полюс, точку P_2 можно описать сферическими координатами (φ, ν) относительно P_1:

$$dP_2 = f(\omega)\, d\omega = f(\varphi, \nu) \sin\nu\, d\nu\, d\varphi = f(\varphi, l)\, l d\, l d\varphi, \text{ где } l = |P_1 P_2|.$$

Так как $f(\omega) > 0$ и $\int_{S^2} f(\omega)\, d\omega = 1$, то в пределе (при $n \to \infty$) в левой части (3) получим функцию ширины H тела K. Имеем

$$H(\xi) = \lim_{n \to \infty} C_n^2 \int_{(S^2)^2} \left[\int_{(S^2)^{n-2}} \left[\int_{A_{12}} I_B(1, 2) \sin^2\alpha(\xi, \Omega_{\varphi l}, \Phi)\, d\Phi \right] \times \right.$$

$$\left. \times\, dP_3 \cdots dP_n \right] f(\omega) f(\varphi, l)\, l^* l\, d\omega\, d\varphi\, dl, \tag{4}$$

здесь $\Omega_{\varphi l}$—направление $\overrightarrow{P_1^* P_2^*}$, где P_1^* точка на ∂K с нормалью ω. P_2^* —точка на ∂K, нормаль которой имеет (φ, l) сферические координаты относительно ω, $l^* = l_{1,2}^*$. Пусть $e(\Omega_{\varphi l}, \Phi)$—плоскость, которая проходит через $\Omega_{\varphi l}$ (проходит через P_1^* и P_2^*) и повернута вокруг $\Omega_{\varphi l}$ на угол Φ. За $e(\Omega_{\varphi l}, 0)$ примем плоскость, которая перпендикулярна плоскости, проходящей через ω и $\Omega_{\varphi l}$.

Сначала рассмотрим случай равномерного распределения, т. е. случай, когда $f(\omega)=(S_0 C(\omega))^{-1}$, где $C(\omega)=k_1(\omega)\,k_2(\omega)$—гауссовая кривизна в точке на ∂K с нормалью ω, S_0—площадь ∂K. Плоскость $e(\Omega_{\varphi l}, \Phi)$ разбивает ∂K на две части. Пусть $S(\Phi, l)$—площадь малой (по площади) части $\partial K_1(\Phi, l)$ (см. рис. 1).

$S(\Phi, l)$ зависит также от ω и φ.

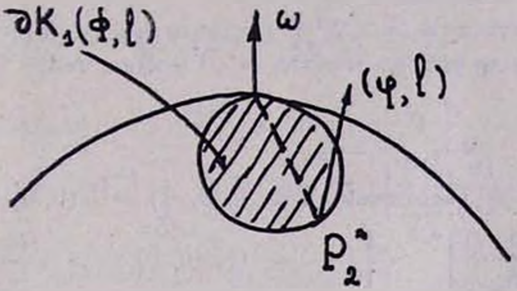

Рис. 1.

Во внутреннем интеграле (4) применяя теорему Фубини, получим

$$H(\xi)=(2\pi)^{-l}\lim_{n\to\infty} C_n^2 \int\limits_{(S^2)^2}\Bigg[\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\Bigg[\left(1-\frac{S(\Phi, l)}{S_0}\right)^{n-2}+\left(\frac{S(\Phi, l)}{S_0}\right)^{n-2}\Bigg]\times$$

$$\times \sin^2\alpha(\xi, \Omega_{\varphi l}, \Phi)\,d\Phi\Bigg]\frac{l^*l\,d\omega\,d\varphi\,dl}{S_0^2\,C(\omega)\,C(\varphi, l)}. \tag{5}$$

В больших скобках (4) записана вероятность того, что $P_1^*P_2^*$ будет ребром и $e(\Omega_{\varphi l}, \Phi)$ принадлежит внешнему двугранному углу ребра $P_1^*P_2^*$ (см. 1)).

Поскольку $\dfrac{S(\Phi, l)}{S_0}<\dfrac{1}{2}$, то

$$\lim_{n\to\infty}\Bigg|C_n^2\int\limits_{(S^2)^2}\Bigg[\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\frac{S(\Phi, l)}{S_0}\right)^{n-2}\sin^2\alpha(\xi, \Omega_{\varphi l}, \Phi)\,d\Phi\Bigg]\times$$

$$\times\frac{l^*l\,d\omega\,d\varphi\,dl}{(S_0)^2\,C(\omega)\,C(\varphi, l)}\Bigg|\leqslant\lim_{n\to\infty} A_0\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}C_n^2=0.$$

Аналогичным образом можно доказать, что область изменения Φ и l можно взять сколь угодно малой.

Таким образом

$$H(\xi)=(2\pi)^{-1}\lim_{n\to\infty} C_n^2\int\limits_{S^2\times S^1}\Bigg[\int\limits_0^{l_0}\int\limits_{-\Phi_0}^{\Phi_0}\left(1-\frac{S(\Phi, l)}{S_0}\right)^{n-2}\times$$

$$\times\frac{l^*l\,\sin^2\alpha(\xi, \Omega_{\varphi l}, \Phi)}{C(\varphi, l)}\,dl\,d\Phi\Bigg]\frac{d\omega\,d\varphi}{S_0^2\,C(\omega)}, \tag{6}$$

где l_0 и Φ_0—сколь угодно малые фиксированные числа. Из регулярности поверхности ∂K имеем разложение Тейлора.

$$S(\Phi, l) = S_l^{'}(0, 0)\, l + S_{\Phi}^{'}(0, 0)\,\Phi + S_{ll}^{''}(0, 0)\cdot\frac{l^2}{2} + S_{l\Phi}^{''}(0, 0)\, l\Phi +$$

$$+ S_{\Phi\Phi}^{''}(0, 0)\,\frac{\Phi^2}{2} + R(\Phi, l)\,(l^2 + \Phi^{-2}), \tag{7}$$

где $R(\Phi, l) \to 0$ при $l^2 + \Phi^2 \to 0$. Здесь все функции непрерывно зависят как от l и Φ, так и от ω и φ.

Из компактности $S^2 \times S^1$ и непрерывности $R(\Phi, l)$ относительно l, Φ, ω, φ для сколь угодно малого $a > 0$ можно найти l_0 и Φ_0, такие, что

$$R(\Phi, l) \geqslant -\frac{a}{2S_0}\, l^2 - \frac{a}{2S_0}\,\Phi^2 \text{ на } S^2 \times S^1 \times [0, l_0] \times [-\Phi_0, \Phi_0].$$

В параграфе 3 докажем, что $S_{\Phi}^{'}(0, 0) = S_l^{'}(0, 0) = 0$, так что имеем:

$$\left[1 - \frac{S(\Phi, l)}{S_0}\right]^{n-2} \leqslant \left[1 - \frac{l^2}{2S_0}\,(S_{ll}^{''}(0, 0) - a) - \frac{l\Phi}{S_0}\, S_{l\Phi}^{''}(0, 0) -\right.$$

$$\left. - \frac{\Phi^2}{2S_0}\,(S_{\Phi\Phi}^{''}(0, 0) - a)\right]^{n-2}. \tag{8}$$

В (6) перейдя к переменным

$$\alpha = l\sqrt{n}, \quad \beta = \Phi\sqrt{n},$$

получим

$$H(\xi) = (2\pi)^{-1} \lim_{n\to\infty} C_n^2 \int_{S^2\times S^1}\left[\int_0^{l_0\sqrt{n}} \int_{-\Phi_0\sqrt{n}}^{\Phi_0\sqrt{n}} \left(1 - \frac{S\left(\frac{\beta}{\sqrt{n}}, \frac{\alpha}{\sqrt{n}}\right)}{S_0}\right)^{n-2} \times\right.$$

$$\left.\times \frac{\alpha\left(\alpha b + o\left(\frac{\alpha}{\sqrt{n}}\right)\sqrt{n}\right)}{n^2 C\left(\varphi, \frac{\alpha}{\sqrt{n}}\right)} \sin^2\alpha\left(\xi, \Omega_{\varphi}\frac{\alpha}{\sqrt{n}}, \frac{\beta}{\sqrt{n}}\right) d\alpha\, d\beta\right] \frac{d\omega\, d\varphi}{S_0^2\, C(\omega)}, \tag{9}$$

здесь $l^* = lb(\omega, \varphi) + o(l)$.

Из (8) и того, что при всех n и $0 \leqslant x \leqslant 1$, $\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \leqslant e^{-x}$ легко видеть, что мажорантой у нас будет следующая функция:

$$A_2 e^{-\frac{\alpha^2}{2S_0}\left(S_{ll}^{''}(0, 0) - a\right) - \frac{\alpha\beta}{S_0} S_{l\Phi}^{''}(0, 0) - \frac{\beta^2}{2S_0}\left(S_{\Phi\Phi}^{''}(0, 0) - a\right)} \cdot \alpha^2,$$

которая при малых a имеет конечный интеграл (в параграфе 3 увидим, что $S_{ll}^{''}(0, 0) > 0$ и $S_{\Phi\Phi}^{''}(0, 0) > 0$ непрерывны по ω и φ и подсчитаем этот интеграл).

Следовательно, в (9) можно заменить предел и интегралы местами. Используя

1. $\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{x_n}{n}\right)^n = e^{-x}$, где $x = \lim_{n\to\infty} x_n$,

2. $\sin^2\alpha\left(\xi,\ \Omega_{\varphi\frac{\alpha}{\sqrt{n}}},\ \frac{\beta}{\sqrt{n}}\right)\to\sin^2\alpha(\xi,\ \omega,\ \varphi_1)$ почти везде при $n\to\infty$,

где $\alpha(\xi,\ \omega,\ \varphi_1)$—угол между направлением φ_1 на плоскости e_ω и пересечением e_ξ плоскостью e_ω, окончательно получим

$$H(\xi)=(2\pi)^{-1}\int\limits_{S^2\times S^1}\sin^2\alpha(\xi,\ \omega,\ \varphi_1)\left[\frac{b(\omega,\ \varphi)}{2S_0^2C^2(\omega)}\times\right.$$

$$\left.\times\int\limits_0^\infty\int\limits_{-\infty}^\infty e^{-\frac{\alpha^2}{2S_0}S''_{ll}(0,\ 0)-\frac{\alpha\beta}{S_0}S''_{l\Phi}(0,\ 0)-\frac{\beta^2}{2S_0}S''_{\Phi\Phi}(0,\ 0)}\alpha^2\,d\alpha\,d\beta\right]d\omega\,d\varphi,$$

или

$$H(\xi)=(2\pi)^{-1}\int\limits_{S^2\times S^1}\sin^2\alpha(\xi,\ \omega,\ \varphi_1)\left[\frac{b(\omega,\ \varphi)}{2C^2(\omega)}\times\right.$$

$$\left.\times\int\limits_0^\infty\int\limits_{-\infty}^\infty e^{-\frac{\alpha^2}{2}S''_{ll}(0,\ 0)-\alpha\beta S''_{l\Phi}(0,\ 0)-\frac{\beta^2}{2}S''_{\Phi\Phi}(0,\ 0)}\alpha^2\,d\alpha\,d\beta\right]d\omega\,d\varphi, \tag{10}$$

где $b(\omega,\ \varphi)=\lim\limits_{l\to\infty}\dfrac{l^*(\omega,\ \varphi)}{l(\omega,\ \varphi)}$.

В параграфе 3 мы получим зависимость φ_1 от φ и в окончательном результате проведем замену переменного.

2. Случай общей плотности $f(\omega)>0$.

Теорема 1. *Мера (плотность) $\sin^2$-представления функции ширины $H(\xi)$ выпуклого тела K, получаемая при стохастической аппроксимации тела K, не зависит от распределения бросаемых точек (от $f(\omega)$).*

Доказательство. Во внутреннем интеграле (4), применяя теорему Фубини, получим

$$H(\xi)=(2\pi)^{-1}\lim_{n\to\infty}C_n^2\int\limits_{S^2\times S^1}\left[\int\sin^2\alpha(\xi,\ \Omega_{\varphi l},\ \Phi)\times\right.$$

$$\left.\times[(1-\mathrm{P}(\Phi,\ l))^{n-2}+\mathrm{P}(\Phi,\ l)^{n-2}]\,l^*l\,f(\varphi,\ l)\,dl\,d\Phi\right]f(\omega)\,d\omega\,d\varphi.$$

Здесь $\mathrm{P}(\Phi,\ l)$—вероятность того, что P^* попадает на $\partial K_1(\Phi,\ l)$. Здесь таким же образом, как в 1-ом параграфе, можно доказать, что

$$H(\xi)=(2\pi)^{-1}\lim_{n\to\infty}C_n^2\int\limits_{S^2\times S^1}\left[\int\limits_0^{l_0}\int\limits_{-\Phi_0}^{\Phi_0}\sin^2\alpha(\xi,\ \Omega_{\varphi l},\ \Phi)(1-\mathrm{P}(\Phi,\ l))^{n-2}\times\right.$$

$$\left.\times\,l^*l\,f(\varphi,\ l)\,dl\,d\Phi\right]f(\omega)\,d\omega\,d\varphi, \tag{11}$$

где l_0 и Φ_0—сколь угодно малые положительные числа. Так как $f(\omega)=\dfrac{f_1(\omega)}{C(\omega)}$, где $f_1(\omega)=f(\omega)\,C(\omega)$, а $C(\omega)$—гауссовая кривизна, то по теореме о среднем имеем

$$P(\Phi, l) = S(\Phi, l)\cdot f_1(\omega_{\Phi l}).$$

Здесь $\omega_{\Phi l}$—некоторая точка из сферического образа $\partial K_1(\Phi, l)$. Подставляя выражение для $P(\Phi, l)$ в (11) и перейдя к $\alpha = l\sqrt{n}$, $\beta = \Phi\sqrt{n}$, получим

$$H(\xi) = (2\pi)^{-1}\lim_{n\to\infty} C_n^2 \int\limits_{S^2\times S^1}\Bigg[\int\limits_0^{\sqrt{n}\,\bar{l}_0}\int\limits_{-\sqrt{n}\,\Phi_0}^{\sqrt{n}\,\Phi_0} \sin^2\alpha\left(\xi,\ \Omega_{\frac{\alpha}{\sqrt{n}}},\ \frac{\beta}{\sqrt{n}}\right)\times$$

$$\times\left[1 - f_1\left(\omega_{\frac{\beta}{\sqrt{n}},\frac{\alpha}{\sqrt{n}}}\right)\times\left(\frac{\alpha^2}{2n}S''_{ll}(O, O) + \frac{\alpha\beta}{n}S''_{l\Phi}(O, O) + \right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\beta^2}{2n}S''_{\Phi\Phi}(O, O) + R\left(\frac{\beta}{\sqrt{n}}, \frac{\alpha}{\sqrt{n}}\right)\right)\right]^{n-2}\frac{\alpha\left(\alpha b + o\left(\frac{\alpha}{\sqrt{n}}\right)\sqrt{n}\right)}{n^2 C\left(\varphi, \frac{\alpha}{\sqrt{n}}\right)}\times$$

$$\times f_1\left(\varphi, \frac{\alpha}{\sqrt{n}}\right)d\alpha\, d\beta\Bigg]\frac{f_1(\omega)}{C(\omega)}\,d\omega\, d\varphi. \tag{12}$$

Из непрерывности и положительности f_1 следует, что $f_1(\omega) > M > 0$. Следовательно

$$[1 - P(\Phi, l)]^{n-2} \leqslant [1 - M\,S(\Phi, l)]^{n-2}.$$

Отсюда, из (8) и (7) следует, что и в этом случае существует мажоранта с конечным интегралом, которая имеет вид (см. теорему 1)

$$A_1 e^{-\frac{M\alpha^2}{2}\left(S''_{ll}(O, O) - a\right) - M\alpha\beta S''_{l\Phi}(O, O) - \frac{M\beta^2}{2}\left(S''_{\Phi\Phi}(O, O) - a\right)}\cdot\alpha^2.$$

Меняя местами предел и интеграл в (12), получим

$$H(\xi) = (2\pi)^{-1}\int\limits_{S^2\times S^1}\sin^2\alpha(\xi, \omega, \varphi_1)\left[\frac{f_1^2(\omega)\, b(\omega, \varphi)}{2C^2(\omega)}\times\right.$$

$$\left.\times\int\limits_0^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{f_1(\omega)\alpha^2}{2}S''_{ll}(0, 0) - f_1(\omega)\alpha\beta S''_{l\Phi}(0, 0) - \frac{f_1(\omega)\beta^2}{2}S''_{\Phi\Phi}(0, 0)}\cdot\alpha^2\, d\alpha\, d\beta\right]d\omega\, d\varphi; \tag{13}$$

так как при $n\to\infty$ сферический образ $\partial K_1\left(\frac{\beta}{\sqrt{n}}, \frac{\alpha}{\sqrt{n}}\right)$ стягивается к ω, то из непрерывности $f_1(\omega)$ следует, что

$$f_1\left(\omega_{\frac{\beta}{\sqrt{n}}\frac{\alpha}{\sqrt{n}}}\right)\to f_1(\omega).$$

После следующей $\sqrt{f_1(\omega)}\,\alpha = \alpha_1$ и $\sqrt{f_1(\omega)}\,\beta = \beta_1$ замены переменных в (13) получим (10), что и надо было доказать.

3. Вычисление плотности, полученной предельной меры в терминах нормальных кривизн поверхности. Из (10) видно, что эта предельная плотность, которую мы обозначим через $g(\omega, \varphi)$, равна

$$g(\omega, \varphi) = \frac{b(\omega, u)}{2c^2(\omega)} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\alpha^2}{2} S^{*}_{ll}(O, O) - \alpha\beta S^{*}_{l\Phi}(O, O) - \frac{\beta^2}{2} S^{*}_{\Phi\Phi}(O, O)} \cdot \alpha^2 \, d\alpha \, d\beta.$$

Следовательно, нужно вычислить $S^{*}_{ll}(O, O)$, $S^{*}_{l\Phi}(O, O)$, $S^{*}_{\Phi\Phi}(O, O)$ в терминах нормальных кривизн ∂K в точке $P^*(\omega)$ (точка с нормалью ω на ∂K).

Лемма 1. $S^{*}_{ll}(O, O)$, $S^{*}_{l\Phi}(O, O)$, $S^{*}_{\Phi\Phi}(O, O)$ *зависят только от значений производных не выше второго порядка поверхности* ∂K *в точке* $P^*(\omega)$.

Доказательство. В некоторой окрестности $P^*(\omega)$, ∂K можно представить в $z=z(x, y)$ параметрической форме, где x и y меняются в касательной плоскости e_0 в $P^*(\omega)$; $z(x, y)$—дважды непрерывно дифференцируемая функция. Для вычисления $S^{*}_{\Phi\Phi}(O, O)$ нужно найти $S(\Phi, O)$, то есть площадь $\partial K_1(\Phi, O)$, отсекаемую плоскостью $e(\varphi, \Phi)$, проходящий через направление φ на e_0 и имеющей поворот Φ. Уравнение $e(\varphi, \Phi)$ будет

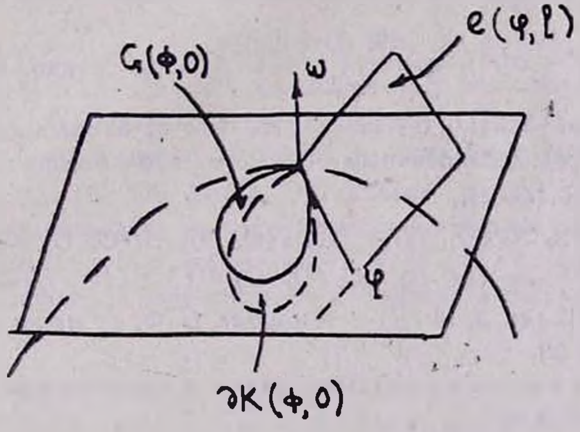

Рис. 2.

$$x \sin \Phi \sin \varphi - y \sin \Phi \cos \varphi = - z \cos \Phi.$$

В следующей лемме докажем, что $S^{*}_{\Phi\Phi}(O, O) = (S_p)^{*}_{\Phi\Phi}(O, O)$, $S^{*}_{\Phi}(O, O) = (S_p)^{*}_{\Phi}(O, O)$, где $S_p(\Phi, l)$ — площадь $G(\Phi, l)$ проекции $\partial K_1(\Phi, l)$ на e_0 (рис. 2). $G(\Phi, 0)$ ограничена кривой

$$(x \sin \varphi - y \cos \varphi) \operatorname{tg} \Phi = - z''_{xx}(O, O) \frac{x^2}{2} z''_{yy}(O, O) \frac{y^2}{2} - R(x, y),$$

где $R(x, y) = o(x^2 + y^2)$ (оси x и y направлены по главным направлениям). Перейдя к $x = r\cos\alpha$, $y = r\sin\alpha$ полярным координатам на e_0, имеем

$$r \operatorname{tg} \Phi \sin(\varphi - \alpha) = -r^2\left(z''_{xx}(O,\ O)\frac{\cos^2\alpha}{2} + z''_{yy}(O,\ O)\frac{\sin^2\alpha}{2}\right) - R(r,\alpha). \tag{14}$$

По известной формуле имеем, что

$$S_p(\Phi,\ O) = \int_{-(\pi-\varphi)}^{\varphi} \frac{r^2(\alpha,\ \Phi)}{2}\, d\alpha,$$

где $r(\alpha,\ \Phi)$—решение (14). Отсюда

$$(S_p)'_\Phi(\Phi,\ O) = \int_{-(\pi-\varphi)}^{\varphi} r(\alpha,\ \Phi)\, r'_\Phi(\alpha,\ \Phi)\, d\alpha.$$

Следовательно $(S_p)'_\Phi(O,\ O) = O$, так как $r(\alpha,\ O) \equiv O$. (15)

Дифференцируя еще раз, получим

$$(S_p)''_{\Phi\Phi}(O,\ O) = \int_{-(\pi-\varphi)}^{\varphi} (r'_\Phi(\alpha,\ O))^2\, d\alpha,$$

$r'_\Phi(\alpha,\ O)$ найдем дифференцированием (14) относительно Φ.

$$\sin^2(\varphi - \alpha) = r'_\Phi(\alpha,\ O)\left(z''_{xx}\frac{\cos^2\alpha}{2} + z''_{yy}\frac{\sin^2\alpha}{2}\right) + \left(\frac{R}{r}\right)'_{r=0} \cdot r'_\Phi(\alpha,\ O).$$

Но так как $R = o(r^2)$, то $\left(\frac{R}{r}\right)'_{r=0} = O$. Отсюда видно, что $r'_\Phi(\alpha, 0)$, а, следовательно, $S''_{\Phi\Phi}(O,\ O)$ зависит только от вторых производных ∂K в точке $P^*(\omega)$. Аналогичным образом это можно доказать для $S''_{l\Phi}(O,\ O)$ и $S''_{ll}(O,\ O)$.

Лемма 2. $S'_\Phi(O,\ O) = (S_p)'_\Phi(O,\ O)$, $S'_l(O,\ O) = (S_p)'_l(O,\ O)$, $S''_{\Phi\Phi}(O,\ O) = (S_p)''_{\Phi\Phi}(O,\ O)$, $S''_{l\Phi}(O,\ O) = (S_p)''_{l\Phi}(O,\ O) = S''_{ll}(O,\ O) = (S_p)''_{ll}(O,\ O)$, *где* $S_p(\Phi,\ l)$ — *площадь* $G(\Phi,\ l)$ *проекции* $\partial K_1(\Phi,\ l)$ *на* e_0 (см. рис. 2).

Доказательство. (Пользуемся обозначениями леммы 1). Докажем сначала, что

$$S'_\Phi(O,\ O) = (S_p)'_\Phi(O,\ O),\quad S''_{\Phi\Phi}(O,\ O) = (S_p)''_{\Phi\Phi}(O,\ O).$$

Из дифференциальной геометрии известно, что

$$S(\Phi,\ l) = \int_{G(\Phi,\ l)} \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\, dx\, dy = \int_{G(\Phi,\ l)} g_1(x,\ y)\, dx\, dy.$$

По теореме о среднем имеем

$$S(\Phi + \Delta\Phi,\ O) - S(\Phi,\ O) = \int_{G(\Phi+\Delta\Phi,\ O)\setminus G(\Phi,\ O)} g_1(x,\ y)\, dx\, dy =$$

$$= \Delta S_p(\Phi,\ O)\, g_1((x,\ y)_{\Delta\Phi}),$$

где $(x,\ y)_{\Delta\Phi} \in G(\Phi + \Delta\Phi,\ O) \setminus G(\Phi,\ O)$ (см. рис. 3).

Следовательно

$$S_{\Phi}^{\cdot}(\Phi,\ O)=(S_p)_{\Phi}^{\cdot}(\Phi,\ O)\cdot \lim_{\Delta\Phi\to 0} g_1((x,\ y)_{\Delta\Phi})=(S_p)_{\Phi}^{\cdot}(\Phi,\ O)\cdot g_1((x,\ y)_{\Phi}),$$

так как можно доказать, что $\lim\limits_{\Delta\Phi\to 0} g_1((x,\ y)_{\Delta\Phi})$ равен значению g_1 в некоторой точке $(x,\ y)_{\Phi}\in\partial G(\Phi,\ O)$.

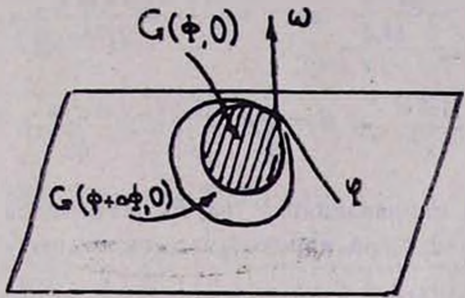

Рис. 3.

Отсюда и из (15) имеем, что $S_{\Phi}^{\cdot}(O,\ O)=(S_p)_{\Phi}^{\cdot}(O,\ O)=O$.
Из этого уже следует, что

$$S_{\Phi\Phi}^{\cdot\cdot}(O,\ O)=\lim_{\Phi\to 0}\frac{S_{\Phi}^{\cdot}(\Phi,\ O)}{\Phi}=\lim_{\Phi\to O}\frac{(S_p)_{\Phi}^{\cdot}(\Phi,\ O)}{\Phi}\cdot\lim_{\Phi\to O} g_1((x'\ y)_{\Phi})=$$

$$=(S_p)_{\Phi\Phi}^{\cdot\cdot}(O,\ O),$$

поскольку при $\Phi\to O$ вся граница $\partial G(\Phi,\ O)$ стягивается к точке $P^*(\omega)$, а $g_1(x,\ y)$—непрерывная функция $(g_1(O,\ O)=1)$.
Аналогичным образом можно доказать и остальные равенства. Так как $S_{\Phi\Phi}^{\cdot\cdot}(O,\ O)$, $S_{l\Phi}^{\cdot\cdot}(O,\ O)$, $S_{ll}^{\cdot\cdot}(O,\ O)$ зависят лишь от производных не выше второго порядка, то мы можем их вычислить для соприкасающего параболоида U поверхности ∂K в точке $P^*(\omega)$. Его уравнение при подходящем выборе системы координат имеет вид

$$z(x,\ y)=-\frac{k_1}{2}x^2-\frac{k^2}{2}y^2. \tag{16}$$

Точка $P^*(\omega)$ совпадает при этом с началом координат, а k_1 и k_2—нормальные кривизны ∂K в $P^*(\omega)$ по главным направлениям. (Оси x и y направим через эти главные направления), z имеет направление ω. Всё в дальнейшем будем рассматривать относительно этого репера. Теперь поступаем следующим обрагом. Находим точку $P_2^{\cdot}$ на U, нормаль в которой имеет сферические координаты $(\varphi,\ l)$ относительно оси параболоида U. Проведем через $P^*(\omega)$ $P_2^{\cdot}$ плоскость $e(\Omega_{\varphi l},\ \Phi)$. Находим проекцию пересечения $e(\Omega_{\varphi l},\ \Phi)$ и U на касательную плоскость и вычисляем площадь, ограниченную этой проекцией. В точке $(x,\ y)$ нормаль U есть $(k_1x,\ k_2y,\ 1)$. Из соответсвующего условия находим координаты $P_2^{\cdot}$:

$$P_2^{\cdot}=\left(\frac{\operatorname{tg}\nu\cos\varphi}{k_1},\ \frac{\operatorname{tg}\nu\sin\varphi}{k_2},\ -\frac{\operatorname{tg}^2\nu\, r(\varphi)}{2}\right), \tag{17}$$

где $v(\varphi)=\frac{\cos^2\varphi}{k_1}+\frac{\sin^2\varphi}{k_2}$ —радиус нормальнйй кривизны ∂K или U в направлении φ (φ измеряем от 1-го главного направления). Для сферических координат (ν', φ') вектора $\overrightarrow{P^*(\omega)\,P_2^*}$ получим

$$\cos\varphi'=\frac{\cos\varphi}{k_1A},\ \sin\varphi'=\frac{\sin\varphi}{k^2A},\ \cos\nu'=-\frac{\operatorname{tg}\nu\, r(\varphi)}{2B},\ \sin\nu'=\frac{A}{B},\tag{18}$$

где

$$A=\sqrt{\frac{\cos^2\varphi}{k_1^2}+\frac{\sin^2\varphi}{k_2^2}},\quad B=\sqrt{\frac{\cos^2\varphi}{k_1^2}+\frac{\sin^2\varphi}{k_2^2}+\frac{\operatorname{tg}^2\nu\cdot r^2(\varphi)}{4}}.$$

Единичный вектор в направлении $\overrightarrow{P^*(\omega)\,P_2^*}$ стремится к единичному вектору в направлении φ_1 на плоскости с нормалью ω при $\nu\to 0$ (см. (10)).

Из этого и из (17) получаем, что

$$\operatorname{tg}\varphi_1=\operatorname{tg}\varphi'=\operatorname{tg}\varphi\cdot\frac{k_1}{k_2}\tag{19}$$

(здесь мы имеем право вычислить φ_1 для соприкасающего параболоида). Если имеем направление $\Omega=(\varphi', \nu')$, то плоскость $e(\Omega, \Phi)$ имеет следующее уравнение:

$$x(\sin\Phi\sin\varphi'-\cos\Phi\cos\varphi'\cos\nu')+y(\sin\Phi\cos\varphi'-\cos\Phi\sin\varphi'\cos\nu')=$$
$$=-z\sin\nu'\cos\Phi.$$

Следовательно, проекция пересечения $e(\Omega, \Phi)$ и U имеет уравнение

$$x\left(\operatorname{tg}\Phi\frac{\sin\varphi'}{\sin\varphi}-\cos\varphi'\operatorname{ctg}\nu'\right)+y\left(-\operatorname{tg}\Phi\frac{\cos\varphi'}{\cos\varphi}-\sin\varphi'\operatorname{ctg}\nu'\right)=$$
$$=\frac{k_1x^2}{2}+\frac{k_2y^2}{2}.$$

Из этого и из (18) получим, что площадь равна

$$S_p(\Phi, l)=\frac{\pi}{\sqrt{k_1k_2}}\left[\frac{1}{k_1}\left(\frac{\operatorname{tg}\Phi\cdot\sin\varphi\cdot B}{k_2A^2}+\frac{\cos\varphi\operatorname{tg}\nu\, r(\varphi)}{2k_1A^2}\right)^2+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{k_2}\left(\frac{\operatorname{tg}\Phi\cdot\cos\varphi\cdot B}{k_1A^2}-\frac{\sin\varphi\operatorname{tg}\nu\, r(\varphi)}{2k_2A^2}\right)^2\right],$$

где $l=2\sin\nu/2$. Отсюда и из леммы 2 получим

$$\dot{S}_{ll}(O, O)=(S_p)_{ll}^{\cdot}(O, O)=\frac{\pi\cdot r^2(\varphi)}{2\sqrt{k_1k_2}\,A^4}\left(\frac{\cos^2\varphi}{k_1^3}+\frac{\sin^2\varphi}{k_2^3}\right)=2\,a_1,$$

$$\dot{S}_{l\Phi}(O, O)=(S_p)_{l\Phi}^{\cdot}(O, O)=\frac{\pi\sin\varphi\cos\varphi\cdot(k_2-k_1)}{A^3(k_1k_2)^{5/2}}=a_0,\tag{20}$$

$$\dot{S}_{\Phi\Phi}(O, O)=(S_p)_{\Phi\Phi}^{\cdot}(O, O)=\frac{2\pi\, r(\varphi)}{A^2(k_1k_2)^{3/2}}=2\,a_2.$$

Соответствующий интеграл из (10) равен

$$\int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a_1\alpha^2 - a_0\alpha\beta - a_2\beta^2}\alpha^2\, d\alpha\, d\beta = \frac{\pi}{4\sqrt{a_2}\left(a_1 - \frac{a_0^2}{4a_2}\right)^{3/2}}. \tag{21}$$

Из (17) для $b(\omega, \varphi)$ получим (см. 10))

$$b(\omega, \varphi) = \lim_{l\to 0}\frac{l^*}{l} = \lim_{l\to 0}\frac{\sqrt{\operatorname{tg}^2\nu\frac{\cos^2\varphi}{k_1^2} + \operatorname{tg}^2\nu\frac{\sin^2\varphi}{k_2^2} + \operatorname{tg}^4\nu\frac{r^2(\varphi)}{4}}}{2\sin\nu/2} =$$

$$= \sqrt{\frac{\cos^2\varphi}{k_1^2} + \frac{\sin^2\varphi}{k_2^2}} = A. \tag{22}$$

Из (10), (18), (20), (21), (22) получаем

$$g(\omega, \varphi) = \frac{k_2^2(\omega)\cos^2\varphi + k_1^2(\omega)\sin^2\varphi}{\pi\sqrt{k_1(\omega)\, k_2(\omega)}\,(k_2(\omega)\cos^2\varphi + k_1(\omega)\sin^2\varphi)^2},$$

здесь φ измеряется от первого главного направления. Подставляя это выражение в (10) и заменяя переменную φ_1 из (19), окончательно получаем

$$H(\xi) = \frac{1}{2\pi^2}\int_{S^2\times S^1}\sin^2\alpha(\xi, \omega, \varphi)\frac{\sqrt{k_1(\omega)\, k_2(\omega)}}{k^2(\omega, \varphi)}\, d\omega\, d\varphi. \tag{23}$$

Таким образом, доказана следующая

Теорема 2. *Функция ширины $H(\xi)$ выпуклого тела K имеет представление*

$$H(\xi) = \frac{1}{2\pi^2}\int_{S^2\times S^1}\sin^2\alpha(\xi, \omega, \varphi)\frac{\sqrt{k_1(\omega)\, k_2(\omega)}}{k^2(\omega, \varphi)}\, d\omega\, d\varphi, \tag{24}$$

где $k_i(\omega)$, $i = 1, 2$—главные нормальные кривизны поверхности ∂K в точке с нормалью ω, $k(\omega, \varphi)$—нормальная кривизна в направлении φ в этой же точке, α—угол между направлением φ на плоскости e_ω и следом на ней плоскости e_ξ, φ—измеряем от первого главного направления.

Формулу (24) можно записать и в дуальных относительно (ω, φ) координатах (Ω, Φ) (см. [1]).

Следствие 1. После интегрирования по $d\varphi$ в (24) получаем формулу, впервые найденную другим методом в [2]:

$$H(\xi) = \frac{1}{2\pi}\int_{S^2}\frac{\sin^2\alpha}{k_1} + \frac{\cos^2\alpha}{k_2}\, d\omega,$$

здесь α угол между первым главным направлением в касательной плоскости ∂K в точке с нормалью ω и пересечением этой касательной плоскости с плоскостью e_ξ.

Следствие 2. После интегрирования обеих частей (24) по $d\xi$ (элемент площади на S^2), получаем формулу Минковского

$$\mu_{\text{инв.}}(\{e \in E : e \cap K \neq \varnothing\}) = \frac{1}{2}\int_{S^2}\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\, d\omega.$$

Здесь E—пространство плоскостей в R^3, $\mu_{\text{инв.}}$—инвариантная мера в E.

Следствие 3. Пусть μ—трансляционно-инвариантная мера на E (пространство плоскостей в R^3), с элементом $d\mu = m(d\xi)\times dp$. После интегрирования обеих частей (24) по $m(d\xi)$ (четная мера на S^2), получаем

$$\mu(\{e\in E: e\cap K\neq\varnothing\}) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{S^2\times S^1}\rho(f(\omega,\varphi))\frac{\sqrt{k_1(\omega)k_2(\omega)}}{k^2(\omega,\varphi)}\,d\omega\,d\varphi.$$

Здесь $f(\omega,\varphi)$—плоскость e_ω с направлением φ на ней (называется флагом (см. [1]), $\rho(f(\omega,\varphi))$—веджевая плотность μ в пространстве флагов (см. [1]):

$$\rho(f(\omega,\varphi)) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{S^2}\sin^2\alpha(\xi,\omega,\varphi)\,m(d\xi).$$

Автор выражает глубокую благодарность Р. В Амбарцумяну за постановку задачи и ценные советы.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 28. VI. 1986

Ռ. Հ. ԱՐԱՄՅԱՆ Ուռուցիկ մարմինների պատահական մոտարկման մասին (*ամփոփում*)

Ռ. Վ. Համբարձումյանի [1] աշխատանքում, ցույց է տրված ուռուցիկ մարմինների լայնքի ֆունկցիաների համար այսպես կոչված $\sin^2$-ներկայացման գոյությունը։ Այս աշխատանքում ապացուցված է, որ ուռուցիկ մարմինների պատահական բազմանիստով մոտարկման դեպքում ստանում ենք նրանց լայնքի ֆունկցիաների $\sin^2$-ներկայացումը։ Այդ ներկայացումը կախված չէ մոտարկման պարամետրերից (նայիր թեորեմ 2)։ Վերջում գտնված է այդ ներկայացման խտության տեսքը մակերևույթի նորմալ կորությունների տերմիններով։

R. G. ARAMIAN *About stochastic approximation of convex bodies* (summary)

In [1] R. V. Ambartzumian [introduced the so called $\sin^2$-representations of with functions of convex bodies. In this paper we .erive a $\sin^2$-representation using a stochastic approximation of convex bodies. This representation does not depend on the parametrs of approximation and is expressed in terms of the surface curvature.

ЛИТЕРАТУРА

1. *R. U. Ambartzumian.* Combinatorial Integral Geometry, Metrics and Zonoids, Acta Applicandae Matematice, 9, 1987.
2. *Г. Ю. Панина.* Выпуклые тела и трансляционно-инвариантные меры, в кн. Зап. научн. семинаров Ленинград. отд. Мат. ин-та АН СССР, т. 157, 1986.