ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XXII, № 5, 1987 Математика

УДК 517.98

В. В. ВОСКАНЯН

ОБ ОДНОЙ КОНСТАНТЕ, СВЯЗАННОЙ С ПАРОЙ КОНЕЧНОМЕРНЫХ БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

1. Введение

Пусть X и Y—банаховы пространства. Для каждой такой пары пространств определим число $v(X, Y)$ следующим образом.

Рассмотрим векторное пространство K линейных конечномерных операторов из дуального к X пространства X' в Y, действующих по формуле

$$u: x' \to \sum_i x'(x_i)\, y_i,\quad x' \in X' \ (x_i \in X,\ y_i \in Y), \tag{*}$$

и на нем—конечно-ядерную $\|u\|_\wedge$ и обычную операторную $\|u\|_\vee$ нормы.

Напомним, что конечно-ядерная норма оператора $u \in K$ определяется следующим образом:

$$\|u\|_\wedge = \inf \sum_i \|x_i\| \|y_i\|, \tag{1}$$

где нижняя грань берется по всевозможным конечным представлениям вида (*) оператора u.

Положим по определению

$$v(X, Y) = \inf_{u \in K \setminus \{0\}} \frac{\|u\|_\vee}{\|u\|_\wedge}. \tag{2}$$

Сравнительно недавно была решена следующая известная проблема Гротендика [1, § 4, *n*. 5]: Для всяких ли двух бесконечномерных пространств X и Y справедливо равенство $v(X, Y) = ?$ Ж. Пизье в [2] привел пример такого бесконечномерного пространства X, для которого $v(X, X) \neq 0$. В связи с этим представляется интересной характеризация константы $v(X, Y)$ для пары конечномерных пространств X и Y. В этом случае K есть пространство $L(X', Y)$ всех линейных операторов $X' \to Y$.

В настоящей работе обсуждается задача нахождения константы $v(X, Y)$ и экстремального в (2) элемента u для пары полиэдральных конечномерных пространств X и Y. Техника крайних точек позволяет в теоремах 1—5 свести вычисления норм к конечномерным задачам, связанным с матрицами.

2. Основные определения

Всюду в дальнейшем X и Y будут обозначать вещественные нормированные конечномерные пространства. В этом случае векторное пространство $K=L(X', Y)$ может быть отождествлено с алгебраическим тензорным произведением: $K=X\otimes Y$. Напомним, что $X\otimes Y$ есть векторное пространство всевозможных конечных формальных сумм вида $\sum_i x_i\otimes y_i$, $x_i\in X$, $y_i\in Y$, с соответствующей факторизацией, а оператор, соотносящийся элементу $u=\sum_i x_i\otimes y_i$, действует по формуле $u: x'\to\sum_i x'(x_i)\, y_i$, $x'\in X'$.

Таким образом, на языке тензорных произведений конечно-ядерная норма, называемая проективной нормой, элемента $u\in K$ определится по формуле (1), где нижняя грань берется по всевозможным представлениям $u=\sum_i x_i\otimes y_i$ элемента u.

Имеется и другое равносильное определение (см. [3]) проективной нормы элемента $u=\sum_i x_i\otimes y_i\in K$:

$$\|u\|_\wedge=\sup|\sum_i Tx_i(y_i)|, \tag{1*}$$

где верхняя грань берется по всевозможным линейным операторам $T: X\to Y'$ с нормой $\|T\|\leqslant 1$.

Обычная операторная, или инъективная норма элемента $u\in K$ запишется в виде

$$\|u\|_\vee=\sup|\sum_i x'(x_i)\, y'(y_i)|, \tag{3}$$

где верхняя грань берется по всевозможным функционалам $x'\in S(X')$ и $y'\in S(Y')$ ($S(X')$ и $S(Y')$—соответственно единичные шары в дуальных к X и Y пространствах X' и Y').

Напомним, что конечномерное нормированное пространство называется полиэдральным, если его единичный шар $S(X)=\{x:\|x\|\leqslant 1\}$ есть многогранник, т. е. является выпуклой оболочкой конечного числа точек.

3. Некоторые свойства тензорных произведений конечномерных полиэдральных пространств, связанные с вычислением норм

Пусть X и Y—полиэдральные пространства, $\dim X=n$, $\dim Y=m$. Обозначим множества крайних точек (вершин) единичных шаров этих пространств через $\operatorname{ext} S(X)=\{\pm e_1,\cdots,\pm e_r\}$ и $\operatorname{ext} S(Y)=\{\pm k_1,\cdots,\cdots,\pm k_s\}$, соответственно.

Теорема 1 (*о наилучшем представлении*). *Пусть u — некоторый элемент тензорного произведения $X\otimes Y$. Тогда существует его представление вида*

$$u=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} c_{ij}\, e_i\otimes k_j, \tag{4}$$

причем наилучшее в смысле (1), *т. е. такое, что*

$$\|u\|_\wedge=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}|c_{ij}|\,\|e_i\|\,\|k_j\|=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}|c_{ij}|. \tag{5}$$

Действительно, согласно определению (1), существует некоторая последовательность представлений

$$u = u^p = \sum_{\tau=1}^{n_p} x_\tau^p \otimes y_\tau^p \tag{6}$$

такая, что

$$\|u\|_\Lambda = \lim_{p\to\infty} \sum_{\tau=1}^{n_p} \|x_\tau^p\| \, \|y_\tau^p\|. \tag{7}$$

Имеем

$$\frac{x_\tau^p}{\|x_\tau^p\|} = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i^+(p, \tau)\, e_i + \sum_{i=1}^{r} \alpha_i^-(p, \tau)(-e_i) \tag{8}$$

и

$$\frac{y_\tau^p}{\|y_\tau^p\|} = \sum_{j=1}^{s} \beta_j^+(p, \tau)\, k_j + \sum_{j=1}^{s} \beta_j^-(p, \tau)(-k_j), \tag{9}$$

где все коэффициенты $\alpha_i^+(p, \tau)$, $\alpha_i^-(p, \tau)$, $\beta_j^+(p, \tau)$, $\beta_j^-(p, \tau)$ неотрицательны и

$$\sum_{i=1}^{r} (\alpha_i^+(p, \tau) + \alpha_i^-(p, \tau)) = 1 = \sum_{j=1}^{s} (\beta_j^+(p, \tau) + \beta_j^-(p, \tau)). \tag{10}$$

Из соотношений (6), (8), (9) и (10) следует, что

$$u = u^p = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} c_{ij}^p\, e_i \otimes k_j, \tag{11}$$

где

$$c_{ij}^p = \sum_{\tau=1}^{n_p} [\alpha_i^+(p, \tau) - \alpha_i^-(p, \tau)][\beta_j^+(p, \tau) - \beta_j^-(p, \tau)]\, \|x_\tau^p\| \, \|y_\tau^p\|. \tag{12}$$

Отсюда, учитывая (10), получаем

$$\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} |c_{ij}^p| \leqslant \sum_{\tau=1}^{n_p} \|x_\tau^p\| \, \|y_\tau^p\|. \tag{13}$$

Следовательно, для любых i и j, ввиду (7), последовательность $(c_{ij}^p)_{p=1}^\infty$ ограничена и содержит сходящуюся подпоследовательность. Не меняя обозначений можно считать, что $c_{ij}^p \to c_{ij}$ при $p \to \infty$. Обозначим $u_0 = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} c_{ij}\, e_i \otimes k_j$. Из (11) следует, что $\forall x' \in X'$ $u_0(x') = \lim u^p(x') = u(x')$, и значит, $u = u_0 = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} c_{ij}\, e_i \otimes k_j$. Но тогда по определению (1) $\|u\|_\Lambda \leqslant \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} |c_{ij}|$. Противоположное неравенство вытекает из соотношений (13) и (7), ч. т. д.

Изучим линейную зависимость между крайними точками шара $S(X)$. Так как их число есть $2r$, где $r \geqslant n = \dim X$, то существуют числа $\alpha_{ij} \in \mathrm{R}$, $i = 1, \cdots, r-n$; $j = 1, \cdots, r$, такие, что

$$\begin{array}{c} \alpha_{11} e_1 + \cdots + \alpha_{1r} e_r = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_{r-n,1} e_1 + \cdots + \alpha_{r-n,r} e_r = 0 \end{array} \tag{14}$$

и ранг матрицы зависимости $A=\{\alpha_{ij}\}$ максимален.

Утверждение 1. *Система зависимости* (14) *полностью, т. е. с точностью до* (*линейной*) *изометрии, описывает пространство* X (*предполагается всегда, что* $\operatorname{rg} A = r-n$).

Действительно, если $Z=JX$, где J есть изометрия некоторого нормированного пространства Z и пространства X, то крайними точками единичного шара $S(Z)$ пространства Z будут точки $\pm z_i=\pm Je_i$, т. к. каждая изометрия переводит крайние точки единичного шара в крайние точки единичного шара образа. Применив оператор J к обеим частям равенств (14), получим, что и векторы z_i удовлетворяют уравнениям (14).

Обратно, пусть Z—нормированное пространство размерности n такое, что крайние точки $\pm z_i$,[1] $i=1,\cdots,r$, его единичного шара $S(Z)$ удовлетворяют уравнениям (14). Пусть максимальный не равный нулю минор матрицы A есть $|\alpha_{ki}|_{k=1}^{r-n}{}_{i=1}^{r-n}$. Определим линейный оператор $J: X\to Z$ равенствами $Je_i=z_i$, $i=r-n+1,\cdots,r$. Применив оператор J к обеим частям равенств (14), получим

$$\begin{gathered}\alpha_{11}\, Je_1+\cdots+\alpha_{1,r-n}\, Je_{r-n}+\alpha_{1,r-n+1}\, z_{r-n+1}+\cdots+\alpha_{1r}\, z_r=0\\ \cdots\\ \alpha_{r-n,1}\, Je_1+\cdots+\alpha_{r-n,r-n}\, Je_{r-n}+\alpha_{r-n,r-n+1}\, z_{r-n+1}+\cdots+\alpha_{r-n,r}\, z_r=0.\end{gathered}$$

Так как векторы z_i, $i=1,\cdots,r$ удовлетворяют соотношеням (14) и указанный минор не равен нулю, то $Je_i=z_i$ и для $i=1,\cdots,r-n$. Поэтому J—изометрия, ч. т. д.

4. Вычисление проективной и инъективной норм элемента, использующее его матричное представление

Пусть X—пространство, описанное в предыдущем пункте, с системой зависимости (14), $A=\{\alpha_{ij}\}$. И пусть Y—некоторое m-мерное полиэдральное пространство такое, что вершины $\{\pm k_j\}_{j=1}^{s}$ шара $S(Y)$ удовлетворяют уравнениям зависимости

$$\begin{gathered}\beta_{11}\, k_1+\cdots+\beta_{1s}\, k_s=0\\ \cdots\\ \beta_{s-m,1}\, k_1+\cdots+\beta_{s-m,s}\, k_s=0\end{gathered}\tag{14'}$$

с матрицей зависимости $B=\{\beta_{ij}\}$.

Выясним, как с помощью соотношений (14) и (14') можно вычислять Λ-и V-нормы произвольного элемента.

По теореме 1 для всякого $u\in X\otimes Y$ существует его наилучшее представление

$$u=\sum_{i,j} c_{ij}\, e_i\otimes k_j,\tag{15}$$

где

$$\|u\|_\Lambda=\sum_{i,j}|c_{ij}|.\tag{16}$$

Разумеется, не всякое представление через крайние точки вида (15) является наилучшим. Выясним, при каких же коэффициентах c_{ij}

для элемента (15) верно равенство (16). Для этого используем эквивалентное определение (1*) нормы $\|u\|_\Lambda$:

$$\|u\|_\Lambda = \sup_{\|T\|=1} \left|\sum_{i,j} c_{ij}\, T e_i(k_j)\right|. \tag{17}$$

Из соображений конечномерности следует, что существует такой линейный оператор $T_0 : X \to Y'$, что

$$\|T_0\| = 1 \text{ и } \|u\|_\Lambda = \sum_{i,j} c_{ij}\, T_0 e_i(k_j). \tag{18}$$

Таким образом, если представление (15) наилучшее, то из (15), (16), (18) следует, что

$$T_0 e_i(k_j) = \operatorname{sgn} c_{ij}, \text{ если } c_{ij} \neq 0, \tag{19}$$

$$\text{и } |T_0 e_i(k_j)| \leqslant 1 \text{ для всех } i, j : 1 \leqslant i \leqslant r,\ 1 \leqslant j \leqslant s. \tag{20}$$

С другой стороны, если T_0—произвольный оператор из X в Y', удовлетворяющий (20), а числа c_{ij} таковы, что выполнено (19), то во-первых, легко понять, что $\|T_0\| = 1$, и во-вторых,

$$\|u\|_\Lambda = \sup_{\|T\|\leqslant 1} \left|\sum_{i,j} c_{ij}\, T e_i(k_j)\right| \leqslant \sum_{i,j} |c_{ij}| = \sum_{i,j} c_{ij}\, T_0 e_i(k_j) \leqslant \|u\|_\Lambda.$$

Поэтому коэффициенты c_{ij} дают наилучшее представление элемента u и T_0—оператор, дающий верхнюю грань в (17).

Итак, всевозможные наборы $\{c_{ij}\}$, задающие наилучшие представления соответствующих элементов, можно описать следующим образом.

Рассматриваются всевозможные операторы $T : X \to Y'$, $\|T\| = 1$, и по каждому из них строятся матрицы $\|c_{ij}\|$ следующим образом: $c_{ij} = 0$, если $|T e_i(k_j)| < 1$, если же $|T e_i(k_j)| = 1$, то $\operatorname{sgn} c_{ij} = T e_i(k_j)$, а модули $|c_{ij}|$ произвольны.

Пусть теперь $T : X \to Y'$, $\|T\| = 1$ —некоторый оператор. Обозначим

$$\varphi_{ij} = T e_i(k_j). \tag{21}$$

Применив оператор T к обеим частям равенств (14), а затем применив полученные функционалы к каждому вектору k_j, получим

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_{ki}\, \varphi_{ij} = 0,\ j = 1, \cdots, s;\ k = 1, \cdots, r-n, \tag{22}$$

или в матричной форме: $A\Phi = 0$, где $\Phi = \|\varphi_{ij}\|$.

Аналогично, применив функционалы Te_i к обеим частям равенств (14′), будем иметь в силу (21)

$$\sum_{j=1}^{s} \beta_{pj}\, \varphi_{ij} = 0,\ i = 1, \cdots, r;\ p = 1, \cdots, s-m, \tag{23}$$

или в матричной форме $\Phi B^* = 0$, где B^*—матрица, транспонированная к B.

Заметим еще, что условие $\|T\| = 1$ влечет в силу (21) соотношения

$$\forall i,\ \forall j\ |\varphi_{ij}| \leqslant 1 \text{ и } \exists\, i_0, j_0 : |\varphi_{i_0 j_0}| = 1, \tag{24}$$

или $\|\Phi\|_\infty = 1$, рассматривая Φ как элемент rs-мерного пространства.

Пусть теперь $\{\varphi_{ij}\}_{i=1,\ j=1}^{r,\ s}$—произвольная матрица, удовлетворяющая соотношениям (22)—(24). Покажем, что существует такой оператор $T: X \to Y'$, $\|T\| = 1$, что выполнены равенства (21). Действительно, допустим, для определенности, что у матриц $\{\alpha_{ki}\}$ и $\{\beta_{pj}\}$ не равны нулю, соответственно, миноры $|\alpha_{ki}|_{k=1,\ i=1}^{r-n,\ r-n}$ и $|\beta_{pj}|_{p=1,\ j=1}^{s-m,\ s-m}$. Тогда соотношения (21), выписанные для индексов $i = r-n+1, \cdots, r$ и $j = s-m+1, \cdots, s$, уже однозначно определят некоторый оператор $T: X \to Y'$. Применим этот оператор к обеим частям равенств (14) и далее, полученное—к элементам $k_{s-m+1}, \cdots, k_s$. Из полученных систем числа $Te_i(k_j)$, $i = 1, \cdots, r-n$; $j = s-m+1, \cdots, s$, однозначно выразятся через $Te_i(k_j) = \varphi_{ij}$, $i = r-n+1, \cdots, r$; $j = s-m+1, \cdots, s$. В силу (22) $Te_i(k_j) = \varphi_{ij}$ для индексов $i = 1, \cdots, r$; $j = s-m+1, \cdots, s$. Применив, далее, функционалы Te_i к обеим частям равенств (14′), в силу аналогичных соображений получим равенства (21) для всех оставшихся индексов.

Введем для краткости записи следующие обозначения для матриц.

$$\text{Если } C = \{c_{ij}\}, \text{ то } |C| = \{|c_{ij}|\},\ \|C\|_1 = \sum_{ij} |c_{ij}|.$$

Если матрица $\Phi = \{\varphi_{ij}\}$—тех же размерностей, что и C, то $C \times \Phi = \{c_{ij}\ \varphi_{ij}\}$—матрица поэлементного произведения.

Суммируя все сказанное, мы приходим к следующему утверждению.

Теорема 2. *Пусть A и B—матрицы зависимости пространств X и Y, соответственно. Тогда для каждого элемента $u \in X \otimes Y$ существуют матрицы $\Phi = \{\varphi_{ij}\}$ и $C = \{c_{ij}\}$, $i = 1, \cdots, r$; $j = 1, \cdots, s$, удовлетворяющие условиям*

$$A\Phi = 0,\ \Phi B^* = 0,\ \|\Phi\|_\infty = 1,\ C \times \Phi = |C|, \tag{25}$$

так что $u = \sum_{i,j} c_{ij}\, e_i \otimes k_j$ и $\|u\|_\wedge = \|C\|_1$.

Обратно, если Φ и C—произвольные матрицы, удовлетворяющие условиям (25), *то для элемента $u = \sum_{i,j} c_{ij}\, e_i \otimes k_j$ верно равенство $\|u\|_\wedge = \|C\|_1$.*

Перейдем теперь к рассмотрению V-нормы.

Теорема 3. *Пусть $u = \sum_{i,j} c_{ij}\, e_i \otimes k_j \in X \otimes Y$. Тогда $\|u\|_\vee = \max|\sum_{i,j} c_{ij}\, x'(e_i)\, y'(k_j)|$, где верхняя грань взята по всем функционалам $x' \in \operatorname{ext} S(X')$ и $y' \in \operatorname{ext} S(Y')$.*

Действительно, функция

$$g(x',\ y') = |\sum_{i,j} c_{ij}\, x'(e_i)\, y'(k_j)|,$$

определенная на компакте $S(X') \times S(Y')$ выпукла по каждой переменной x' и y'. Поэтому верхняя грань по каждой из них достигается на множестве крайних точек, откуда

$$\|u\|_{\vee} = \sup_{x' \in S(X'),\ y' \in S(Y')} g(x', y') = \max_{x' \in S(X')} \max_{y' \in S(Y')} g(x', y') =$$

$$= \max_{x' \in \operatorname{ext} S(X')} \max_{y' \in \operatorname{ext} S(Y')} g(x', y') = \max_{x' \in \operatorname{ext} S(X'),\ y' \in \operatorname{ext} S(Y')} g(x', y'), \text{ ч. т. д.}$$

Из геометрических соображений очевидно следующее

Утверждение 2. *Пространство X', сопряженное к X, также полиэдрально. Вершинами единичного шара $S(X')$ являются функционалы, определяемые $n-1$-мерными гранями многогранника $S(X)$, т. е. такие функционалы e', чьи гиперплоскости уровня 1, т. е. множества $\{x \in X : e'(x) = 1\}$ проходят через $n-1$-мерные грани шара $S(X)$.*

Так как всякая $n-1$-мерная грань содержит, как минимум, n вершин шара $S(X)$, то каждая крайняя точка $e' \in \operatorname{ext} S(X')$ характеризуется условием:

$$e' \in X',\ |e'(e_i)| \leqslant 1,\ i = 1, \cdots, r$$

и (26)

$$|e'(e_{i_1})| = |e'(e_{i_2})| = \cdots = |e'(e_{i_n})| = 1$$

для некоторых отличных друг от друга индексов $i_1, \cdots, i_n$.

Возьмем теперь некоторый функционал $e' \in \operatorname{ext} S(X')$ и применим его к обеим частям равенств (14). Обозначив вектор

$$(e'(e_1), \cdots, e'(e_r)) = (d_1, \cdots, d_r) = d,$$

получим условие $Ad = 0$. Легко понять, используя (26), что имеет место следующее

Утверждение 3. *Для того, чтобы вектор $d = (d_1, \cdots, d_r)$ порождался некоторой крайней точкой $e' \in \operatorname{ext} S(X')$ по формуле $e'(e_i) = d_i$, $i = 1, \cdots, r$, необходимо и достаточно, чтобы $Ad = 0$, $\|d\|_\infty = 1$ и, как минимум, n координат вектора d были равны по модулю 1.*

Аналогичные рассуждения для пространства Y вместе с теоремой 3 приводят нас к следующему факту.

Теорема 4. *Пусть $u = \sum_{i,j} c_{ij} e_i \otimes k_j$ — некоторый элемент из $X \otimes Y$. Тогда $\|u\|_\vee = \max|\sum_{i,j} c_{ij} d_i h_i|$, где верхняя грань берется по всевозможным векторам $d = (d_1, \cdots, d_r)$ и $h = (h_1, \cdots, h_s)$, удовлетворяющим условиям $Ad = 0$, $Bh = 0$, $\|d\|_\infty = \|h\|_\infty = 1$ и самое меньшее n координат у d и m координат у h равны по модулю 1.*

Таким образом, для нахождения константы

$$v(X, Y) = \inf \{\|u\|_\vee / \|u\|_\wedge;\ u \in (X \otimes Y) \setminus \{0\}\}$$

можно использовать теоремы 2 и 4, и ввиду однородности ее формулы по u, получается

Теорема 5. *Справедливо равенство*

$$v(X, Y) = \inf_C \max_{d,h} |\sum_{i,j} c_{ij} d_i h_j|, \tag{27}$$

где верхняя грань берется по векторам, указанным в теореме 4, а нижняя грань—по матрицам C, $\|C\|_1=1$, для которых найдется матрица Φ со свойствами (25).

Отметим, что с помощью теорем 1 и 5, например, для случая, когда $X=l_1^n$(n-мерный аналог вещественного пространства l_1,а) $Y=l_\infty^m$(m -мерный аналог вещественного пространства l_∞). нетрудно получить

Следствие. $v(l_1^n, l_\infty^m)=\dfrac{1}{\min(n, m)}=\dfrac{\|u_0\|_\vee}{\|u_0\|_\wedge}$,

где элемент $u_0\in l_1^n\otimes l_\infty^m$ *имеет вид* $u_0=\sum\limits_{i=1}^{\min(n, m)} b_i\otimes\tilde{b}_i$, *где через* b_i *и* $\tilde{b}_i$ *обозначены i-ые элементы канонического базиса, соответственно, в n-и m-мерном арифметическом пространстве.*

В заключение укажем, что формула (27) может быть использована и для оценки константы $v(X, Y)$ при произвольном выборе вещественных нормированных пространств X и Y заданной конечной размерности, что следует из возможности аппроксимации их единичных шаров выпуклыми многогранниками.

Ереванский государственный
университет

Поступила 21. VIII. 1985

Վ. Վ. ՈՍԿԱՆՅԱՆ. Վերջավոր չափանի բանախյան տարածությունների զույգի հետ կապված մի հաստատունի մասին (ամփոփում)

X և Y բանախյան տարածությունների ամեն մի զույգի հետ բնական կերպով կապված է $v(X, Y)=\inf(\|u\|_\vee/\|u\|_\wedge)$ հաստատունը, որտեղ ստորին եզրը վերցվում է ըստ $X\otimes Y$ տենզորական արտադրյալի բոլոր ոչ զրոյական էլեմենտների, իսկ $\|u\|_\vee$ և $\|u\|_\wedge$ նշանակում են համապատասխանաբար էլեմենտի ինյեկտիվ և պրոյեկտիվ նորմերը։

Հոդվածում հետազոտվում է $v(X, Y)$ հաստատունը X և Y իրական վերջավոր չափանի նորմավորված պոլիեդրալ տարածությունների զույգի համար։ Ծայրային կետերի տեխնիկան թույլ է տալիս նորմերի հաշվումը բերել մատրիցների հետ կապված ակներև էքստրեմալ խնդիրների։

V. V. VOSKANIAN. *On a constant associated with pair of finite dimensional Banach spaces* (summary)

With every pair of Banach spaces X and Y we associated a constant $v(X, Y)=\inf(\|u\|_\vee/\|u\|_\wedge)$ where the infimum is taken over all non-zero elements of the tensor product $X\otimes Y$, $\|u\|_\vee$ and $\|u\|_\wedge$ denote correspondingly the injective and projective norms of the element u.

In the article the constant $v(X, Y)$ is studied for the pair of real finite dimensional normed polyhedral spaces X and Y. Extremal points technique permits to reduce the calculation of the norms to extremal problems associated with matrices.

ЛИТЕРАТУРА

1. *A. Grothendieck.* Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires, Memoirs Amer. Math. Soc., 16, 1955.
2. *G. Pisier.* Counterexamples to a conjecture of Grothendieck. Acta Math., 151, № 3—4, 1983, 181—208.
3. *R. Schatten.* A theory of cross—spaces, Princeton, 1950.