

УДК 517.95

Г. Г. КАЗАРЯН, В. Н. МАРКАРЯН

ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ НЕГИПОЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ДАННЫМ НОСИТЕЛЕМ ГИПОЭЛЛИПТИЧНОСТИ

После введения Л. Хёрмандером понятия гипоеллиптичности дифференциального оператора усилия многих математиков были направлены к изучению поведения решений гипоеллиптических уравнений. Были получены как внутренние оценки для решений того или иного класса гипоеллиптических (и, в частности, эллиптических) уравнений, так и оценки вблизи границы изучаемой области. Часть этих результатов была подытожена в книгах [1]—[3]. В дальнейшем Я. С. Бугровым в [4] был построен пример негипоеллиптического уравнения, решения которого оказались бесконечно дифференцируемыми, как только они суммируемы с квадратом вместе с некоторыми (вполне определенными) их частными производными. Далее В. И. Буренков в [5] нашел необходимые и достаточные условия для того, чтобы решения, вообще говоря, негипоеллиптического уравнения $P(D)u = 0$, удовлетворяющие определенным условиям, были бесконечно дифференцируемыми. Эти условия носят алгебраический характер и, если оператор $P(D)$ является гипоеллиптическим, совпадают с известными алгебраическими условиями гипоеллиптичности, найденными Л. Хёрмандером.

Общая закономерность, наблюдающаяся в алгебраических условиях гипоеллиптичности и условиях на поведение дифференциальных многочленов для того, чтобы соответствующие решения дифференциального уравнения были гладкими, побудили нас в работе [6] ввести понятие носителя гипоеллиптичности и числа гипоеллиптичности для линейных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами. Оказалось, что эта численная характеристика делит дифференциальные операторы на разные классы. При этом разделении гиперболические по Л. Гордингу (и, тем самым, гиперболические по И. Г. Петровскому) и гипоеллиптические по Л. Хёрмандеру операторы занимают крайние позиции. В [6] было доказано, что для гиперболического оператора $P(D) = P(D_1, \dots, D_n)$ носитель гипоеллиптичности есть пустое множество, в то время как для гипоеллиптических операторов $P(D)$ носитель гипоеллиптичности совпадает с множеством $\{1, \dots, n\}$. Там же изучены носители (и числа) гипоеллиптичности некоторых классов обобщенно-однородных операторов и доказаны некоторые групповые свойства носителя гипоеллиптичности.

Настоящая работа является продолжением заметки [6]. Здесь мы описываем классы общих дифференциальных операторов с одинаковыми носителями гипоеллиптичности, находим алгебраические ограничения на те «младшие члены», добавление которых к данному оператору не меняет

его носители гиповаллиптичности и, опираясь на эти результаты и на результаты работы [6], получаем внутренние оценки для решений уравнения $P(D)u = 0$ с данным носителем гиповаллиптичности оператора $P(D)$. Результаты последнего пункта дополняют соответствующие результаты Л. Хёрмандера, В. И. Буренкова и других авторов.

По поводу определений и обозначений, используемых в настоящей работе, мы отсылаем читателя к [6]. Здесь мы будем в полной мере пользоваться терминологией [6], в отдельных случаях не упоминая об этом.

§ 1. Носители гиповаллиптичности общих дифференциальных операторов

Прежде чем перейти к нахождению носителя (и числа) гиповаллиптичности общих дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами, докажем несколько вспомогательных предложений, являющихся обобщениями лемм 3 и 4 работы [7].

Лемма 1.1. Пусть a, b, c, d, e — неотрицательные числа. Для того, чтобы при произвольном $y \in [0, 1]$

$$\frac{x^a \cdot y^b}{x^c \cdot y^d + x^e} \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow \infty \quad (1.1)$$

необходимо и достаточно, чтобы для любого числа $\delta \geq 0$

$$a - \delta b < \max \{e, c - \delta d\}. \quad (1.2)$$

Доказательство. Докажем необходимость условия (1.2). Пусть, наоборот, при выполнении соотношения (1.1), условие (1.2) нарушается. Это значит, что для некоторого $\delta_0 \geq 0$

$$a - \delta_0 b \geq \max \{e, c - \delta_0 d\}. \quad (1.3)$$

Пусть $y = x^{-\delta_0}$, тогда из условия (1.3) следует, что при всех $x > 1$

$$\frac{x^a \cdot y^b}{x^c \cdot y^d + x^e} = \frac{x^{a - b \cdot \delta_0}}{x^{c - d \cdot \delta_0} + x^e} > \frac{1}{2},$$

что противоречит (1.1) и доказывает необходимость условия (1.2).

Достаточность. Пусть при выполнении условия (1.2) существует последовательность пар $\{x_j, y_j\}$, $x_j \rightarrow \infty$, $y_j \in [0, 1]$ и число $\kappa > 0$ такие, что для всех $j = 1, 2, \dots$

$$x_j^a \cdot y_j^b / (x_j^c \cdot y_j^d + x_j^e) > \kappa. \quad (1.4)$$

Изучим в отдельности следующие два возможных случая:

- 1) $y_j = o(x_j^{-\delta})$ для любого $\delta \geq 0$,
- 2) существуют числа $\delta_1 \geq \delta_0 \geq 0$, $\sigma_1 \geq \sigma_0 > 0$ и подпоследовательность последовательности $\{x_j, y_j\}$ (которую также обозначим через $\{x_j, y_j\}$) такие, что

$$\sigma_0 \cdot x_j^{-\delta_0} \leq y_j \leq \sigma_1 x_j^{-\delta_1}, \quad j = 1, 2, \dots$$

Если в случае 1) $b = 0$, то из (1.2) следует, что

$a < \max \{e, c - d\delta\}$ для всех $\delta > 0$, т. е. $a < \max \{e, c\}$ при $d = 0$ и $a < e$ при $d \neq 0$, поэтому $x_j^a / (x_j^c \cdot y_j^d + x_j^e) \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$, что противоречит (1.4). Если же $b \neq 0$, то при $\delta = a/b$ имеем $y_j = o(x_j^{a/b})$, $j \rightarrow \infty$

$$\frac{x_j^a \cdot y_j^b}{x_j^c \cdot y_j^d + x_j^e} \leq \frac{x_j^a \cdot o(x_j^{-a})}{x_j^e} \rightarrow 0,$$

что противоречит (1.4).

Случай 2). Очевидно, что в этом случае разность $\delta_1 - \delta_0$ можно считать меньше любого наперед заданного числа $2\varepsilon > 0$, т. е. существует число $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon) \geq 0$ такое, что при $j = 1, 2, \dots$

$$\sigma_0 x_j^{-(i_2+1)} \leq y_j \leq \sigma_1 \cdot x_j^{-(i_2-1)}. \quad (1.5)$$

Выберем число $\varepsilon > 0$ так, чтобы вместе с условием (1.2) выполнялось еще условие

$$a - (\delta_2 - \varepsilon) b < \max \{e, c - (\delta_2 + \varepsilon) d\}.$$

Из этого условия и неравенства (1.5) получаем, что при $j \rightarrow \infty$

$$\frac{x_j^a \cdot y_j^b}{x_j^c \cdot y_j^d + x_j^e} \leq \frac{\sigma_1^b \cdot x_j^{a - (i_2+1)d}}{\sigma_0^d \cdot x_j^{c - (i_2+1)d} + x_j^e} \rightarrow 0,$$

что противоречит (1.4) и доказывает лемму 1.1.

Лемма 1.2. Пусть a, b_s, c, d_s, e ($s = 1, 2, \dots$) — произвольные неотрицательные числа, при этом последовательности $\{b_s\}$ и $\{d_s\}$ ограничены. Для того, чтобы при $x \rightarrow \infty$ и произвольном $y \in [0, 1]$

$$x^a \cdot y^{b_s} / (x^c \cdot y^{d_s} + x^e) \rightarrow 0 \quad (1.6)$$

равномерно по s , необходимо и достаточно существование числа $\varepsilon > 0$ такого, что при всех $s = 1, 2, \dots, \delta \geq 0$

$$a - b_s \delta < \max \{e, c - \delta_s d_s\} - \varepsilon. \quad (1.7)$$

Доказательство. Необходимость. Пусть при выполнении соотношения (1.6)

$$\varepsilon_s = a - b_s \delta_s - \max \{e, c - \delta_s d_s\} \rightarrow 0$$

при $s \rightarrow \infty$ для некоторой последовательности чисел $\delta_s \geq 0, s = 1, 2, \dots$. Положим $x_s = \varepsilon_s^{-1}, y_s = \varepsilon_s^{\delta_s}$, тогда имеем при $s = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} \frac{x_s^a \cdot y_s^{b_s}}{x_s^c \cdot y_s^{d_s} + x_s^e} &= \frac{\varepsilon_s^{-a+b_s \delta_s}}{\varepsilon_s^{-c+d_s \delta_s} + \varepsilon_s^{-e}} = \\ &= [\varepsilon_s^{a-e-(\delta_s-d_s) \delta_s} + \varepsilon_s^{a-b_s \delta_s-e}]^{-1} \geq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Это противоречит (1.6) и доказывает необходимость условия (1.7) для выполнения (1.6).

Достаточность доказывается аналогично соответствующей части леммы 1.1 (см. также доказательство леммы 1.3). Лемма 1.2 доказана.

Лемма 1.3. Пусть $a_s, b_s, c_s, d_s, s = 1, 2, \dots$ — ограниченные последовательности неотрицательных чисел. Для того, чтобы при $x \rightarrow \infty$ и произвольном $t \in [0, x]$

$$f_s(t, x) \equiv x^{a_s} t^{b_s} / (x^{c_s} t^{d_s} + x^{e_s}) \rightarrow 0 \quad (1.8)$$

равномерно по s , необходимо и достаточно, чтобы существовало число $\varepsilon > 0$ такое, что для всех $\delta \leq 1$ и $s = 1, 2, \dots$

$$a_s + \delta b_s < \max \{e_s, c_s + \delta d_s\} - \varepsilon. \quad (1.9)$$

Доказательство необходимости получается повторением первой части доказательства леммы 1.2 с подстановкой $x_s = \varepsilon_s^{-1}$, $t_s = \varepsilon_s^{a_s}$, $s = 1, 2, \dots$.

Достаточность. Пусть при выполнении условия (1.9) существует последовательность пар чисел $\{x_s, t_s\}$ и число $x > 0$ такие, что $t_s \in [0, x_s]$, $x_s \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow \infty$ и $f_s(t_s, x_s) \geq x$, $s = 1, 2, \dots$.

Изучим в отдельности следующие два возможных случая:

1) $t_s = o(x_s^{\delta})$ для любого $\delta \leq 1$,

2) существуют числа $0 \leq \delta_0 \leq \delta_1 \leq 1$, $0 < \delta_0 < \delta_1$ и подпоследовательность последовательности $\{x_s, t_s\}$ (которую также обозначим через $\{x_s, t_s\}$) такие, что

$$\sigma_0 \cdot x_s^{\delta_0} \leq t_s \leq \sigma_1 \cdot x_s^{\delta_1}, \quad s = 1, 2, \dots \quad (1.10)$$

Если в случае 1) $b_s = 0$ ($s = 1, 2, \dots$), то из (1.9) следует, что $a_s < \max \{e_s, c_s + \delta d_s\} - \varepsilon$ для всех $\delta \leq 1$ и $s = 1, 2, \dots$, т. е. $a_s < \max \{e_s, c_s\} - \varepsilon$ при $d_s = 0$ и $a_s < e_s$ при $d_s \neq 0$ ($s = 1, 2, \dots$). Поэтому $f(t_s, x_s) \rightarrow 0$ при $s \rightarrow \infty$, что противоречит предположению $f_s(t_s, x_s) \geq x > 0$ ($s = 1, 2, \dots$).

Если же в случае 1) $b_s \neq 0$ для бесконечного числа значений s , то взяв $\delta_s = -\frac{a_s}{b_s}$, получаем при $t_s = o(x_s^{\delta_s})$, $s \rightarrow \infty$

$$f_s(t_s, x_s) \leq x_s^{a_s} \cdot o(x_s^{-a_s}) / x_s^{e_s} \rightarrow 0.$$

В случае 2) можно считать, что $\delta_1 - \delta_0 < \varepsilon_0$ для любого наперед заданного числа $\varepsilon_0 > 0$. Пусть число ε_0 удовлетворяет условию

$$\varepsilon_0 \leq \max \left\{ \frac{\varepsilon}{2b}, \frac{\varepsilon}{2d} \right\},$$

где $b = \max b_s$, $d = \max d_s$. Тогда неравенство (1.10) запишется в виде

$$\sigma_0 \cdot x_s^{\delta_0 - \varepsilon_0} \leq t_s \leq \sigma_1 \cdot x_s^{\delta_1 + \varepsilon_0}, \quad s = 1, 2, \dots \quad (1.11)$$

для некоторого числа $0 \leq \delta_s \leq 1$.

Из неравенства (1.11) и определения чисел ε_0, b, d следует, что при $s \rightarrow \infty$

$$f_s(t_s, x_s) \leq \frac{\sigma_1^{b_s} \cdot x_s^{a_s + b_s(\delta_s + \varepsilon_0)}}{\sigma_0^{d_s} \cdot x_s^{c_s + d_s(\delta_s - \varepsilon_0)} + x_s^{e_s}} \leq \frac{A \cdot x_s^{a_s + b_s \delta_s + \frac{\varepsilon}{2}}}{B \cdot x_s^{c_s + d_s \delta_s + \frac{\varepsilon}{2}} + x_s^{e_s}}, \quad (1.12)$$

где $A = \max [1, \sigma_s^b]$, $B = \min [1, \sigma_0^{d_s}]$.

Соотношения (1.9) и (1.12) вместе показывают, что при $s \rightarrow \infty$ $f_s(t_s, x_s) \rightarrow 0$. Это противоречит нашему предположению и доказывает лемму 1.3.

Лемма 1.4. Пусть $c > a \geq 0$, $c > e \geq 0$, $\{b_s\}$ и $\{d_s\}$ — ограниченные последовательности неотрицательных чисел.

Для того, чтобы при $x \rightarrow \infty$ и произвольном $y \in [0, 1]$ выполнялось соотношение (1.6) равномерно по s , необходимо и достаточно условие

$$\inf_s \frac{b_s}{d_s} > 1 - \frac{c-a}{c-e}. \quad (1.13)$$

Доказательство. Положим $y = t \cdot x^{-1}$, тогда соотношение (1.6) эквивалентно тому, что при $x \rightarrow \infty$ и произвольном $t \in [0, x]$

$$x^{a-b_s} \cdot t^{b_s} / (x^{c-d_s} \cdot t^{d_s} + x^e) \rightarrow 0 \quad (1.14)$$

равномерно по s .

В силу леммы 1.3 для выполнения (1.14) необходимо и достаточно условие

$$a - b_s + \delta b_s < \max [e, c - d_s + \delta d_s] - e \quad (1.15)$$

для всех $s = 1, 2, \dots$, $\delta \leq 1$ и для некоторого числа $\varepsilon > 0$.

С другой стороны, простыми выкладками легко показать, что для справедливости неравенства (1.15) при всех $0 \leq \delta \leq 1$ необходимо и достаточно, чтобы (1.15) выполнялось лишь для тех δ_s ($s = 1, 2, \dots$), для которых $c - d_s + \delta_s d_s = e$. Для указанных значений δ_s неравенство (1.15) эквивалентно неравенству

$$a - e + (e - c) \frac{b_s}{d_s} < -e, \quad s = 1, 2, \dots,$$

или, что то же самое, неравенству

$$(c - e) \left(1 - \frac{b_s}{d_s}\right) < c - a - e, \quad s = 1, 2, \dots$$

Так как $c > e$, то отсюда получаем для всех $s = 1, 2, \dots$

$$\frac{b_s}{d_s} > 1 - \frac{c-a}{c-e} + \frac{e}{c-e}$$

и тогда

$$\inf_s \frac{b_s}{d_s} > 1 - \frac{c-a}{c-e} + \frac{e}{c-e} > 1 - \frac{c-a}{c-e}.$$

Лемма 1.4 доказана.

Пусть $R(t)$ — μ -однородный многочлен ($\mu > 0$, $j = 1, \dots, n$), A — множество n -мерных векторов $a = (a_1, \dots, a_n)$ с компонентами из множества $\{-1, 0, 1\}$, Λ^+ — множество единичных векторов $\lambda \in R_n$ с неотрицательными компонентами, $\Sigma(R) = \{\eta; \eta \in R_n^{(0)}, \|\eta, \mu\| = 1, R(\eta) = 0\}$, где

$$|\eta, H| = \left[\sum_{j=1}^n |\eta_j|^{2/p_j} \right]^{1/2}.$$

Пусть $a \in A$, $\lambda \in \Lambda^+$, $\eta \in \Sigma(R)$, положим

$$\Delta(\eta, a, \lambda, R) = \min \{d : d \geq 0,$$

$$\sum_{(j, a) = d} \frac{D_a^* R(\eta)}{a!} = \sum_{(j, a) = d} D^* R(\eta) \cdot \frac{a^*}{a!} \neq 0\},$$

$$\Delta_j(\eta, a, \lambda) = \Delta(\eta, a, \lambda, D_j R), \quad j = 1, \dots, n.$$

Обозначим через $\bar{\Lambda}_l^k$ замыкание множества единичных нормалей грани N_l^k х. м. N многочлена $P(\xi)$. Для вектора $\mu \in \bar{\Lambda}_l^k$ представим многочлен $P(\xi)$ в виде

$$P(\xi) = \sum_{j=0}^{M(\mu)} P_{d_j}(\xi) = \sum_{j=0}^{M(\mu)} \sum_{(\lambda, \sigma) = d_j} \gamma_\lambda \xi^\sigma, \quad (1.16)$$

где $d_j = d_j(\mu)$ ($j = 0, \dots, M(\mu)$), $d_0 > d_1 > \dots > d_M \geq 0$,

$$P_{d, (\mu)}(\xi) \equiv P^{l, k}(\xi) \text{ для любого } \mu \in \bar{\Lambda}_l^k.$$

Основным результатом настоящего параграфа является

Теорема 1.1. Пусть х. м. N оператора $P(D)$ с постоянными вещественными коэффициентами вполне правилен. Пусть регулярны все в. п. грани N за исключением единственной в. п. нерегулярной грани N_l^m . Пусть еще $\sum (P_{d_i}) \cap \sum (P_{d_i}) = \emptyset$ для всех $\mu \in \bar{\Lambda}_l^m$.

Для того, чтобы $H(P) \supset \{1, \dots, k\}$ ($h(P) \geq k$) необходимо и достаточно одновременное выполнение следующих условий:

1) для каждой точки $\eta \in \Sigma(P_{d_i})$ существует окрестность $U(\eta)$ такая, что

$$P_{d_i}(\xi) \cdot P_{d_i}(\xi) \geq 0 \quad \forall \xi \in U(\eta), \quad (1.17)$$

2) при всех $\eta \in \Sigma(P_{d_i})$, $a \in A$, $\mu \in \bar{\Lambda}_l^m$

$$\min_{\lambda \in \Lambda^+} \frac{\Delta_l(\eta, a, \lambda)}{\Delta(\eta, a, \lambda)} > 1 - \frac{\mu_l}{d_0 - d_1}, \quad i = 1, \dots, k, \quad (1.18)$$

где $\Delta(\eta, a, \lambda) = \Delta(\eta, a, \lambda, P_{d_i})$, $\Delta_j(\eta, a, \lambda) = \Delta(\eta, d, \lambda, D_j P_{d_i})$, $j = 1, \dots, k$.

Замечание. Эта теорема является k -мерным аналогом ряда известных результатов для гипоеллиптических операторов. При $k = n$ она дает критерий гипоеллиптичности, обобщающий известные критерии гипоеллиптичности для нерегулярных операторов (см., например, [8]—[10]). При доказательстве мы будем пользоваться методами работ [11], [7], [8].

Доказательство. Необходимость условия 1). Пусть для оператора $P(D)$ с числом гипоеллиптичности $h(P) \geq k$ ($H(P) \supset \{1, \dots, k\}$), существуют точка $\eta \in \Sigma(P_{d_i})$, вектор $\mu \in \bar{\Lambda}_l^m$ и последовательность точек $\{\eta^s\}$, $\eta^s \rightarrow \eta$ такие, что

$$P_{d_i}(\eta_s) \cdot P_{d_i}(\eta^s) < 0, \quad s = 1, 2, \dots \quad (1.19)$$

Легко показать, что существование последовательности $\{\eta^s\}$, удовлетворяющей условию (1.19), влечет существование последовательности $\{\xi^s\}$ такой, что $\xi^s \rightarrow \infty$ и $P(\xi^s) = 0$, $s = 1, 2, \dots$.

Пусть $e^j = (0, \dots, e_j, \dots, 0)$ ($j = 1, \dots, n$) — вершина вполне правильного многогранника N , тогда $D^{e^j} P(\xi) = \gamma_{e^j} \cdot e_j! \neq 0$ и на последовательности $\{\xi^s\}$ при $s \rightarrow \infty$ и $j = 1, \dots, n$

$$|D^{e^j} P(\xi^s)| / (1 + |P(\xi^s)|) = |D^{e^j} P(\xi^s)| \rightarrow 0.$$

Это показывает, что $j \notin H(P)$ ($j = 1, \dots, n$), т. е. мы доказали больше, что $H(P) = \emptyset$.

Докажем необходимость условия 2). Сначала предположим, что для некоторых векторов $\eta \in \Sigma(P_a)$, $\mu \in \bar{\Lambda}_I^m$, $\lambda \in \Lambda^+$, $a \in A$ и некоторого индекса $i: 1 \leq i \leq n$ (пусть для определенности $i = 1$)

$$\frac{\Delta_1(\eta, a, \lambda)}{\Delta(\eta, a, \lambda)} \leq 1 - \frac{\mu_1}{d_0 - d_1}. \quad (1.20)$$

Пусть $t > 0$, положим

$$\rho = t^{\frac{d_0 - d_1}{\Delta(\mu, a, \lambda)}}, \quad \xi = t^\mu (\eta + \rho^{-\lambda} a).$$

Тогда, применяя формулу Тейлора, получим для достаточно больших t и для некоторых постоянных $\chi_0 > 0$, $\chi_1 > 0$

$$\begin{aligned} P_{d_0}(\xi) &= t^{d_0} \cdot P_{d_0}(\eta + \rho^{-\lambda} a) = \\ &= t^{d_0} \cdot \sum_{(\lambda, a) \in \Delta(\mu, a, \lambda)} \frac{D_a^* P_{d_0}(\eta)}{a!} \rho^{-\Delta(\eta, a, \lambda)} + o(t^{d_1}) \leq \chi_0 \cdot t^{d_1}, \\ D_1 P_{d_0}(\xi) &\geq \chi_1 \cdot t \end{aligned}$$

где мы положили $D_a^* R = a^* D^a R \equiv a_1^{*1} \dots a_n^{*n} D^a R$.

Отсюда и из простых геометрических соображений следует, что при некоторых постоянных $\chi_2 > 0$, $\chi_3 > 0$ и достаточно больших t

$$\begin{aligned} |P(\xi)| &\leq \chi_2 \cdot t^{d_1}, \\ |D_1 P(\xi)| &\geq \chi_3 \cdot t \end{aligned}$$

Из предположения (1.20) и последних двух неравенств следует, что при $t \rightarrow \infty$, т. е. при $\xi \rightarrow \infty$

$$|D_1 P(\xi)| / (1 + |P(\xi)|) \rightarrow 0,$$

что противоречит тому, что $1 \in H(P)$.

Итак, остается рассмотреть случай, когда для всех точек $\eta \in \Sigma(P_a)$ и всех векторов $\mu \in \bar{\Lambda}_I^m$, $\lambda \in \Lambda^+$, $a \in A$

$$\frac{\Delta_i(\eta, a, \lambda)}{\Delta(\eta, a, \lambda)} > 1 - \frac{\mu_i}{d_0 - d_1}, \quad i = 1, \dots, k.$$

Докажем, наконец, необходимость условия (1.18) для $P \in \Gamma(k, n)$.

Пусть при выполнении этого условия и $P \in \Gamma(k, n)$ существуют точка $\eta \in \Sigma(P_d)$, векторы $\alpha \in A$, $\mu \in \bar{\Lambda}_1^m$, индекс $i_0: 1 \leq i_0 \leq k$ (будем для определенности считать, что $i_0 = 1$) и последовательность $\{\lambda^s\}$, $\lambda^s \in \Lambda^+$, $s = 1, 2, \dots$ такие, что при $s \rightarrow \infty$

$$\frac{\Delta_1(s)}{\Delta(s)} \equiv \frac{\Delta_1(\eta, \alpha, \lambda^s)}{\Delta(\eta, \alpha, \lambda^s)} \rightarrow 1 - \frac{\mu_1}{d_0 - d_1}. \quad (1.21)$$

Положим для $s = 1, 2, \dots$

$$t_s = \left[\mu_1 - (d_0 - d_1) \left(1 - \frac{\Delta_1(s)}{\Delta(s)} \right) \right]^{-1},$$

$$\rho_s = t_s^{\frac{d_0 - d_1}{\Delta(s)}}, \quad \xi^s = t_s^{\mu_1} (\eta + \rho_s^{-\lambda^s} \alpha).$$

Из условия (1.21) и из того, что $\eta \in R_n^{(0)}$ следует, что $t_s \rightarrow \infty$, $\xi^s \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow \infty$.

Так как $P_d(\xi)$ — μ -однородный многочлен порядка $d_0 > 0$, то на последовательности $\{\xi^s\}$ имеем

$$P_d(\xi^s) = t_s^{d_0} \cdot P_d(\eta + \alpha \cdot \rho_s^{-\lambda^s}).$$

Применив формулу Тейлора, отсюда получим

$$\begin{aligned} P_d(\xi^s) &= t_s^{d_0} \cdot \sum_{(\lambda^s, \alpha) = \Delta(s)} \frac{D_\alpha^s P_d(\eta)}{\alpha!} \cdot \rho_s^{-\lambda^s} + o(t^{d_1}) = \\ &= t_s^{d_1} \cdot \sum_{(\lambda^s, \alpha) = \Delta(s)} \frac{D_\alpha^s P_d(\eta)}{\alpha!} + o(t^{d_1}). \end{aligned} \quad (1.22)$$

Поскольку множество $A(\eta) = \{\alpha; \alpha \in Z_n^+, D_\alpha^s P_d(\eta) \neq 0\}$ конечно, то не умаляя общности, можно считать, что сумма в правой части (1.22) распространяется по некоторому фиксированному множеству $A_0 \subset A$. Тогда из (1.22) получаем

$$P_d(\xi) = t_s^{d_1} \cdot \sum_{\alpha \in A_0} \frac{D_\alpha^s P_d(\eta)}{\alpha!} + o(t^{d_1}). \quad (1.23)$$

Но по определению множества A_0 и чисел $\Delta(s)$

$$\sum_{\alpha \in A_0} \frac{D_\alpha^s P_d(\eta)}{\alpha!} = \sigma_0 \neq 0.$$

Отсюда и из представления (1.23) получаем, что для достаточно больших s

$$\frac{\sigma_0}{2} \cdot t_s^{d_1} \leq |P_d(\xi^s)| \leq \sigma_0 \cdot t_s^{d_1}. \quad (1.24)$$

Поступая аналогично с многочленом $D_1 P_d(\xi)$, получим для некоторой подпоследовательности $\{\xi^s\}$ (которую также обозначим через $\{\xi^s\}$) и некоторой постоянной $\tau_1 > 0$

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_1}{2} \cdot t_s^{d_0 - \mu_1 - (d_0 - d_1) \frac{\Delta_1(s)}{\Delta(s)}} &\leq |D_1 P_{d_0}(\xi^s)| \leq \\ &\leq \sigma_1 \cdot t_s^{d_0 - \mu_1 - (d_0 - d_1) \frac{\Delta_1(s)}{\Delta(s)}}. \end{aligned} \quad (1.25)$$

С другой стороны, из простых геометрических соображений легко следует существование постоянных $\sigma_2 \geq 0$, $\sigma_3 \geq 0$ таких, что при $s \rightarrow \infty$

$$|P(\xi^s) - P_{d_0}(\xi^s)| \leq \sigma_2 \cdot t_s^{d_1}, \quad (1.26)$$

$$|D_1 P(\xi^s) - D_1 P_{d_0}(\xi^s)| \leq \sigma_3 \cdot t_s^{d_1 - \mu_1}. \quad (1.27)$$

Из предположения (1.21) и из неравенств (1.25), (1.27) получаем, что для достаточно больших s

$$|D_1 P(\xi^s)| > \frac{\sigma_1}{4} \cdot t_s^{d_0 - \mu_1 - (d_0 - d_1) \frac{\Delta_1(s)}{\Delta(s)}}.$$

Для многочлена $P(\xi)$ аналогично из (1.24), (1.26) получим

$$|P(\xi^s)| \leq \sigma_4 \cdot t_s^{d_1},$$

где $\sigma_4 \geq 2\sigma_0 + \sigma_2$. Из последних двух соотношений и того, что $t_s \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow \infty$, получаем

$$\frac{|D_1 P(\xi^s)|}{1 + |P(\xi^s)|} \geq \sigma \cdot t_s^{(d_0 - d_1) \left[1 - \frac{\Delta_1(s)}{\Delta(s)}\right] - \mu_1} = \sigma \cdot t_s^{-\frac{1}{t_s}} \rightarrow \sigma \neq 0.$$

Это означает, что $1 \in \overline{H(P)}$. Необходимость условия 2) доказана.

Достаточность. Доказательство ведем от противного. Пусть при выполнении условий 1), 2) теоремы существуют индекс $i_0: 1 \leq i_0 \leq k$ (предположим для определенности, что $i_0 = 1$), последовательность $\{\xi^s\}$, $\xi^s \rightarrow \infty$ и постоянная $x_0 > 0$ такие, что

$$|D_1 P(\xi^s)| / (1 + |P(\xi^s)|) \geq x_0, \quad s = 1, 2, \dots \quad (1.28)$$

Если при $s \rightarrow \infty$ $\xi^s / \|\xi^s\|, \mu_j^{\mu} \rightarrow \eta \in \Sigma(P_{d_0})$, то противоречие с (1.28) получается аналогичными рассуждениями, проводимыми при доказательстве случая 1) леммы 1.1 работы [8]. Поэтому будем считать, что $\xi^s / \|\xi^s\|, \mu_j^{\mu} \rightarrow \eta$, при этом $\eta \in \Sigma(P_{d_0})$.

Представим последовательность $\{\xi^s\}$ в виде

$$\begin{aligned} \xi^s &= \|\xi^s\| \cdot \mu_j^{\mu} \cdot \eta + (\xi^s - \|\xi^s\| \cdot \mu_j^{\mu} \cdot \eta) = \\ &= \|\xi^s\| \cdot \mu_j^{\mu} \left(\eta + \frac{\xi^s - \|\xi^s\| \cdot \mu_j^{\mu} \cdot \eta}{\|\xi^s\| \cdot \mu_j^{\mu}} \right) \end{aligned}$$

и положим для $s = 1, 2, \dots; i = 1, \dots, n$

$$\tau_i^s = \|\xi_i^s - \|\xi^s\| \cdot \mu_j^{\mu} \cdot \eta_i\| \cdot \|\xi^s\| \cdot \mu_j^{\mu} \cdot \eta_i,$$

$$\rho_s = \exp \left[\sum_{i=1}^n (\ln \tau_i^s)^2 \right]^{1/2},$$

$$\lambda_i^s = \frac{\ln \tau_i^s}{\ln \rho_s}, \quad a_i^s = \operatorname{sign} (\xi_i^s - \|\xi^s, \mu^{d_1} \cdot \eta_i^s).$$

Из введенных обозначений следует, что $a^s \in A$, $\lambda^s \in \Lambda^+$, при этом

$$\tau_i^s = \rho_s^{-\lambda_i^s}, \quad \xi^s = \|\xi^s, \mu^{d_1} (\eta_i + \rho_s^{-\lambda^s} \cdot a^s).$$

Из условия 1) теоремы и того, что $\sum (P_{d_i}) \cap \sum (P_{d_i}) = \emptyset$ следует, что для последовательности $\{\xi^s\}$ существует постоянная $x_1 > 0$ такая, что

$$\frac{|D_1 P(\xi^s)|}{1 + |P(\xi^s)|} \leq x_1 \frac{\|\xi^s, \mu^{d_0 - d_1} \cdot \rho_s^{-\Delta_1(s)} + o(\|\xi^s, \mu^{d_1}\|)}{\|\xi^s, \mu^{d_0} \cdot \rho_s^{-\Delta(s)} + \|\xi^s, \mu^{d_1}\|} \quad (1.29)$$

Применив здесь лемму 1.4 при $x = \|\xi^s, \mu\|$, $t = \rho_s^{-1}$, с учетом условия 2) теоремы, получим, что при $s \rightarrow \infty$ правая часть (1.29) стремится к нулю. Тогда неравенство (1.29) противоречит (1.28) и доказывает часть теоремы, относящейся к достаточности.

Теорема 1.1. доказана.

§ 2. Добавление младших членов, сохраняющих число гиповаллиптичности

В этом пункте мы устанавливаем алгебраические условия сравнения (неполной) силы дифференциальных операторов с оператором, имеющим данный носитель гиповаллиптичности и условия на «младшие члены», добавление которых не меняет числа гиповаллиптичности данного оператора.

Для гиповаллиптических операторов аналогичные вопросы исследованы многими авторами. Отметим, в частности, работы [3], [8]—[10], непосредственно примыкающие к данной работе. В частности Л. Хёрмандером доказано, что если $Q \prec P$, то для любого комплексного числа a $P \prec P + aQ \prec P$, при этом из гиповаллиптичности оператора $P(D)$ следует гиповаллиптичность операторов $R_a(D) = P(D) + aQ(D)$. В заметках [9], [10] получены некоторые уточнения этих результатов на языке сравнения мощности операторов.

Сначала введем одно понятие, являющееся аналогом понятия сравнения силы операторов по Л. Хёрмандеру для пространства $Z_{n,k}^+$.

Определение 2.1. Мы скажем, что многочлен $P(\xi) = P(\xi', \xi'')$ сильнее многочлена $Q(\xi) = Q(\xi', \xi'')$ относительно $Z_{n,k}^+$ и запишем $Q \prec^{(k)} P$, если для некоторой постоянной $c > 0$

$$\bar{Q}(\xi, k) \leq c \cdot \bar{P}(\xi, k) \quad \forall \xi \in R_n,$$

(определение $\bar{R}(\xi, k)$ см. в § 3 работы [6]).

Если $Q \prec^{(k)} P \prec^{(k)} Q$, то скажем, что операторы $P(D)$ и $Q(D)$ имеют одинаковую силу относительно $Z_{n,k}^+$ или одинаковую k -силу.

Пусть $R(D)$ — дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, введем другой аналог функции Л. Хёрмандера

$$\bar{R}(\xi, t, k) = \left[\sum_{\alpha \in Z_{n,k}^+} |D^\alpha R(\xi)|^2 \cdot t^{2|\alpha|} \right]^{1/2}.$$

Заметим, что если за множество A в лемме 3.1 работы [6] брать единичный шар в R_k , то неравенство (3.1) из [6] можно переписать в виде

$$c^{-1} \tilde{P}(\xi, t, k) \leq \sup_{|\theta| < t} |P(\xi' + \theta, \xi'')| \leq c \cdot \tilde{P}(\xi, t, k). \quad (2.1)$$

Лемма 2.1. Для выполнения соотношения $Q \rightarrow (k)P$ необходимо и достаточно выполнения одного из следующих эквивалентных условий (при $k = n$, см. [3], теорема 3.3.2).

а) Существует постоянная $c > 0$ такая, что

$$|Q(\xi)| \leq c \cdot \tilde{P}(\xi, k) \quad \forall \xi \in R_n. \quad (2.2)$$

б) Существует постоянная $c > 0$ такая, что

$$\tilde{Q}(\xi, t, k) \leq c \cdot \tilde{P}(\xi, t, k) \quad \forall \xi \in R_n, t \geq 1. \quad (2.3)$$

Доказательство. Очевидно, достаточно доказать, что из а) следует б). Из (2.1)—(2.2) имеем

$$\begin{aligned} \tilde{Q}(\xi, t, k) &\leq c_1 \sup_{|\theta| < t} |Q(\xi' + \theta, \xi'')| \leq c_2 \sup_{|\theta| < t+1} |P(\xi' + \theta, \xi'')| \leq \\ &\leq c_3 \sup_{|\theta| < t} \sup_{|\eta'| < 1} |P(\xi' + \eta' + \theta, \xi'')| \leq c_3 \sup_{|\theta| < t+1} |p(\xi' + \theta, \xi'')| \leq \\ &\leq c_3 \cdot \tilde{P}(\xi, t+1, k) \leq c_4 \tilde{P}(\xi, t, k). \end{aligned}$$

Неравенство (2.3) и, тем самым, лемма 2.1 доказаны.

Теорема 2.1. Если $P \in \Gamma(k, n)$, а оператор $Q(D)$ имеет одинаковую с $P(D)$ k -силу, то $Q \in \Gamma(k, n)$.

Доказательству этой теоремы предположим некоторые вспомогательные предложения. Дадим, прежде всего, аналог понятия доминирования дифференциальных операторов по Л. Хёрмандеру.

Определение 2.2. Мы скажем, что оператор $P(D)$ доминирует над оператором $Q(D)$ относительно $Z_{n,k}^+$ и запишем $Q \rightarrow (k)P$, если

$$\sup_{\xi} \frac{\tilde{Q}(\xi, t, k)}{\tilde{P}(\xi, t, k)} \rightarrow 0, \text{ при } t \rightarrow \infty.$$

Лемма 2.2. Для $Q \rightarrow (k)P$ достаточно условие (при $k = n$ см. [3], теорема 3.3.3)

$$\inf_t \sup_{\xi} \frac{Q(\xi)}{\tilde{P}(\xi, t, k)} = 0. \quad (2.4)$$

Доказательство. Для $s \geq 0$ положим

$$\sigma(s) = \sup_{\xi} \frac{Q(\xi)}{\tilde{P}(\xi, s, k)}.$$

В силу неравенства (2.1) существуют постоянные $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ такие, что для всех $\xi \in R_n$, $\theta' = (\theta_1, \dots, \theta_k, 0, \dots, 0)$, $t > 0$

$$\begin{aligned} \bar{Q}(\xi, t, k) &\leq c_1 \sup_{|\theta'| < t} |P(\xi + \theta')| \leq c_1 \cdot \sigma(s) \cdot \sup_{|\theta'| < k} \bar{P}(\xi + \theta', s, k) \leq \\ &\leq c_2 \cdot \sigma(s) \cdot \sup_{|\theta'| < t+s} |P(\xi + \theta')| \leq c_2 \cdot \sigma(s) \cdot \bar{P}(\xi, t+s, k) \leq \\ &\leq c_2 \cdot \sigma(s) \left(1 + \frac{s}{t}\right)^M \cdot \bar{P}(\xi, t, k), \end{aligned} \quad (2.5)$$

где $M = \deg_{\xi} P(\xi)$.

Из неравенства (2.5) получаем для всех $s \geq 0$

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \left(\sup_{\xi} \frac{\bar{Q}(\xi, t, k)}{\bar{P}(\xi, t, k)} \right) \leq c_2 \cdot \sigma(s). \quad (2.6)$$

Так как по условию $\inf \sigma(s) = 0$, то из неравенства (2.6) следует, что $Q \rightarrow \rightarrow^{(k)} P$. Этим лемма 2.2. доказана.

Пусть $P(D)$ и $Q(D)$ — дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами и $\varepsilon > 0$, обозначим

$$\bar{P}'(\xi, k) = \left[\sum_{D \in E_{n,k}^+} |D^{\alpha} P(\xi)|^2 \right]^{1/2},$$

$$A_{\varepsilon} = \{\xi; \xi \in R_n, |Q(\xi)|/|P(\xi)| \geq \varepsilon\}.$$

Лемма 2.3. Для $Q \rightarrow \rightarrow^{(k)} P$ необходимо и достаточно, чтобы для любого числа $\varepsilon > 0$ отношение $|Q(\xi)|/\bar{P}'(\xi, k)$ было ограниченным на A_{ε} .

Доказательство проводится аналогично доказательству леммы 5 работы [9] с надлежащей модификацией.

Лемма 2.4. а) Если $|Q(\xi)|/(1 + |P(\xi)|) \rightarrow 0$ при $\xi \rightarrow \infty$, то $Q \rightarrow \rightarrow^{(k)} P$ для любого $k: 1 \leq k \leq n$.

б) Оператор $P(D)$ принадлежит классу $\Gamma(k, n)$ тогда и только тогда, когда из условия $Q \rightarrow \rightarrow^{(k)} P$ следует, что $|Q(\xi)|/(1 + |P(\xi)|) \rightarrow 0$ при $\xi \rightarrow \infty$.

Доказательство. Пункт а) очевиден. Докажем пункт б). Пусть $Q \rightarrow \rightarrow^{(k)} P$ и $P \in \Gamma(k, n)$. Докажем, что $\sigma(\xi) = |Q(\xi)|/(1 + |P(\xi)|) \rightarrow 0$ при $\xi \rightarrow \infty$. Допустим обратное, что для некоторой последовательности $\xi^s \rightarrow \infty$, $\sigma(\xi^s) \geq \delta > 0$. Тогда, с одной стороны, для любой последовательности $t \rightarrow \infty$

$$\frac{|Q(\xi)|}{\bar{P}(\xi, t, k)} \geq \frac{|Q(\xi)|}{|P(\xi)| + t^M \cdot \bar{P}'(\xi, k)} = \frac{|Q(\xi)|}{|P(\xi)|} \cdot \frac{1}{1 + t^M \cdot \kappa(\xi)},$$

где $M = \deg_{\xi} P$, $\kappa(\xi) = \bar{P}'(\xi, k)/|P(\xi)| \rightarrow 0$, $t > 0$;

с другой стороны, для последовательности $\xi = \xi^s$, $t = [\kappa(\xi^s)]^{-1} \rightarrow \infty$ имеем

$$\frac{|Q(\xi^s)|}{|P(\xi^s)|} \cdot \frac{1}{1 + t_s^M \cdot \kappa(\xi^s)} \geq \frac{\delta}{2} > 0.$$

Полученные соотношения вместе противоречат предположению $Q \rightarrow \rightarrow^{(k)} P$ и доказывают необходимость условия б).

Достаточность условия б) для многочлена $P \in \Gamma(k, n)$ следует из очевидного замечания, что для любого многочлена $P(\xi)$ и любого мультииндекса $0 \neq \alpha \in \mathbb{Z}_{n, k}^+$ $D^\alpha P \rightarrow \rightarrow^{(k)} P$.

Лемма 2.4 доказана.

Доказательство теоремы 2.1. Заметим сначала, что если $Q \rightarrow \rightarrow^{(k)} P$, то для любого $\alpha \in \mathbb{Z}_{n, k}^+$, $\alpha \neq 0$ $D^\alpha Q \rightarrow \rightarrow^{(k)} P$. Отсюда, из того, что по условию теоремы $P \in \Gamma(k, n)$ и из леммы 2.4 следует существование постоянной $c_1 > 0$ такой, что $\forall \xi \in R_n$

$$c_1^{-1} (|P(\xi)| + 1) \leq \tilde{P}(\xi, k) \leq c_1 (|P(\xi)| + 1).$$

Еще раз применяя приведенное замечание и лемму 2.4 получаем, что при $1 \leq j \leq k$, $\xi \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \frac{|D_j Q(\xi)|}{1 + |Q(\xi)|} &= \frac{|D_j Q(\xi)|}{1 + |P(\xi)|} \cdot \frac{1 + |P(\xi)|}{1 + |Q(\xi)|} \leq \\ &\leq c_2 \frac{|D_j Q(\xi)|}{1 + |P(\xi)|} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Это доказывает, что $Q \in \Gamma(k, n)$. Теорема 2.1 доказана.

Теорема 2.2. Если $P \in \Gamma(k, n)$ и $Q \rightarrow \rightarrow^{(k)} P$, то для любого комплексного числа α $P + \alpha Q \in \Gamma(k, n)$.

Доказательство. Из условия теоремы и леммы 2.4 имеем для любого $i = 1, \dots, k$

$$\frac{|D_i [P(\xi) + \alpha Q(\xi)]|}{1 + |P(\xi) + \alpha Q(\xi)|} \leq \frac{\frac{|D_i P(\xi)|}{1 + |P(\xi)|} + |\alpha| \cdot \frac{|D_i Q(\xi)|}{1 + |P(\xi)|}}{1 - |\alpha| \cdot \frac{|Q(\xi)|}{1 + |P(\xi)|}} \rightarrow 0.$$

Теорема 2.2. доказана.

Для операторов с вещественными коэффициентами справедлива и обратная

Теорема 2.3. Если для операторов $P(D)$ и $Q(D)$ с вещественными коэффициентами $\deg_{\xi_i} Q \leq \deg_{\xi_i} P$ и для любого вещественного α $P + \alpha Q \in \Gamma(k, n)$, то $Q \rightarrow \rightarrow^{(k)} P$.

Доказательство ведется аналогично доказательству теоремы 3 работе [9] с надлежащей модификацией.

Теорема 2.4. Если операторы $P(D)$ и $Q(D)$ с вещественными коэффициентами таковы, что $\deg_{\xi_i} Q < \deg_{\xi_i} P$, $P \in \Gamma(k, n)$, $P + Q \in \Gamma(k, n)$, $1 \leq k \leq n$, то для каждого $\alpha \in (0, 1)$

а) существует постоянная $c = c(\alpha) > 0$ такая, что $\forall \xi \in R_n$

$$1 + |P(\xi) + \alpha Q(\xi)| \geq c [|P(\xi)| + |Q(\xi)|]. \quad (2.7)$$

6) $\downarrow P + aQ \in \Gamma(k, n)$.

Доказательство пункта (а). Заметим сначала, что если $h(P) > 0$ (т. е. $k \geq 1$), то $P(\xi) \neq 0$ для достаточно больших $|\xi|$. Таким образом, не умаляя общности можно считать, что $P(\xi) \neq 0$ при $\xi \in R_n$.

Разобьем множество R_n на следующие два подмножества:

$$D_1 = \{\xi \in R_n; |Q(\xi)/P(\xi)| \geq 1\}, D_2 = R_n \setminus D_1.$$

Пусть $M \geq 0$, обозначим через $S(M)$ шар в R_n с центром в начале координат и радиуса M . Если при некотором $M > 0$ $D_1 \subset S(M)$, то неравенство (2.7) доказывается просто. Если же множество D_1 не ограничено, то докажем, что для некоторого числа $M_0 > 0$

$$Q(\xi)/P(\xi) \geq 1 \quad \forall \xi \in D_1 \setminus S(M_0). \quad (2.8)$$

Предполагая обратное, получим, что для некоторой последовательности $\{\xi^s\}, \xi^s \in D_1, \xi^s \rightarrow \infty$

$$Q(\xi^s)/P(\xi^s) \leq -1. \quad (2.9)$$

Так как по условию теоремы $\deg_{\xi} Q < \deg_{\xi} P$, то существует стремящаяся к бесконечности последовательность $\{\eta^s\}$ такая, что $Q(\eta^s)/P(\eta^s) \rightarrow 0$. Отсюда и из (2.9) следует существование последовательности $\{\tau^s\}, \tau^s \rightarrow \infty$ такой, что $Q(\tau^s)/P(\tau^s) = -1$, т. е. $Q(\tau^s) + P(\tau^s) = 0, s = 1, 2, \dots$. Это противоречит тому, что $P + Q \in \Gamma(k, n)$ и $k \geq 1$.

Итак, мы доказали, что если множество D_1 не ограничено, то справедливо (2.8) для некоторого $M_0 > 0$. В частности, из (2.8) следует, что при $\xi \in D_1 \setminus S(M_0)$ многочлены $P(\xi)$ и $Q(\xi)$ имеют одинаковый знак. Поэтому при $0 < a < 1$ и $\xi \in D_1 \setminus S(M_0)$

$$|P(\xi) + aQ(\xi)| = |P(\xi)| + a|Q(\xi)| \geq a(|P(\xi)| + |Q(\xi)|). \quad (2.10)$$

Для множества D_2 имеем

$$\begin{aligned} |P(\xi) + aQ(\xi)| &= |P(\xi)| \left| 1 + a \frac{Q(\xi)}{P(\xi)} \right| \geq \\ &> (1-a) \cdot |P(\xi)| > \frac{1}{2} (1-a) (|P(\xi)| + |Q(\xi)|). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Так как при $\xi \in S(M_0)$ выражение $|P(\xi)| + |Q(\xi)|$ ограничено, то неравенства (2.10) и (2.11) вместе доказывают неравенство (2.7).

Доказательство пункта б). По уже доказанной части теоремы имеем при $j = 1, \dots, k, 0 < 1$ и $\xi \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \frac{|D_j[P(\xi) + aQ(\xi)]|}{1 + |P(\xi) + aQ(\xi)|} &\leq c^{-1}(a) \frac{a \cdot D_j[P(\xi) + Q(\xi)] + (1-a) \cdot |D_j P(\xi)|}{1 + |P(\xi)| + |Q(\xi)|} \\ &\leq c^{-1}(a) \left[\frac{a |D_j[P(\xi) + Q(\xi)]|}{1 + |P(\xi) + Q(\xi)|} + \frac{(1-a) \cdot |D_j P(\xi)|}{1 + |P(\xi)|} \right] \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Это доказывает пункт б). Теорема 2.4. доказана.

§ 3. Оценки решений дифференциальных уравнений в классах Жевре

Пусть $1 \leq k \leq n$, Ω_k — область из E_k , $\Omega = \Omega_k \times E_{n-k}$. Обозначим через $L_2(\Omega, k)$ множество функций $u \in L_2(\Omega)$, для которых $\text{supp } u \subset K \times E_{n-k}$, где $K \subset \Omega_k$ компакт. Как и в § 3 работы [6] для многочлена $P(\xi) = P(\xi', \xi'')$ положим

$$\Sigma(P, k) = \{(\tau', \xi''), \tau' \in C_k, \xi'' \in R_{n-k}, P(\tau', \xi'') = 0\}$$

и пусть $\rho(\xi) = \rho(P, k, \xi)$ — расстояние точки $\xi \in R_n$ от множества $\Sigma(P, k)$.

Лемма 3.1. Существует постоянная $c > 0$ такая, что неравенство

$$\begin{aligned} & \sum_{0 \neq a \in Z_{n,k}^+} \varepsilon^{-2|a|} \cdot \|[1 + \varepsilon \cdot \rho(\xi)]^s \cdot P^{(a)}(\xi) \cdot \widehat{\varphi}(\xi)\|_{L_2}^2 \leq \\ & \leq c \sum_{a \in Z_{n,k}^+} \varepsilon^{-2|a|} \cdot \|[1 + \varepsilon \cdot \rho(\xi)]^{s-1} \cdot P^{(a)}(\xi) \cdot \widehat{\varphi}(\xi)\|_{L_2}^2, \end{aligned} \quad (3.1)$$

имеет место для любого $\varepsilon > 0$, натурального числа s и всех функций $\varphi \in L_2(\Omega, k)$. Здесь $\widehat{\varphi} = F[\varphi]$ — преобразование Фурье функции φ (в смысле главного значения).

Доказательство. Сначала докажем существование постоянной $c > 0$ такой, что для любого $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} & \sum_{0 \neq a \in Z_{n,k}^+} \varepsilon^{-2|a|} [1 + \varepsilon \cdot \rho(\xi)]^2 \cdot |P^{(a)}(\xi)|^2 \leq \\ & \leq c \sum_{a \in Z_{n,k}^+} \varepsilon^{-2|a|} \cdot |P^{(a)}(\xi)|^2 \quad \forall \xi \in R_n. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Для фиксированного числа $\varepsilon > 0$ разобьем множество точек R_n на следующие два подмножества $D_1(\varepsilon) = \{\xi, \xi \in R_n, \varepsilon \cdot \rho(\xi) \leq 1\}$, $D_2(\varepsilon) = R_n \setminus D_1(\varepsilon)$. Для точек $\xi \in D_1(\varepsilon)$ имеем

$$\begin{aligned} & \sum_{0 \neq a \in Z_{n,k}^+} \varepsilon^{-2|a|} \cdot [1 + \varepsilon \cdot \rho(\xi)]^2 \cdot |P^{(a)}(\xi)|^2 \leq \\ & \leq 4 \cdot \sum_{a \in Z_{n,k}^+} \varepsilon^{-2|a|} \cdot |P^{(a)}(\xi)|^2. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Пусть теперь $\xi \in D_2(\varepsilon)$, тогда

$$\begin{aligned} & \sum_{0 \neq a \in Z_{n,k}^+} \varepsilon^{-2|a|} [1 + \varepsilon \cdot \rho(\xi)]^2 \cdot |P^{(a)}(\xi)|^2 \leq \\ & \leq 4 \cdot \sum_{0 \neq a \in Z_{n,k}^+} \varepsilon^{-2(|a|-1)} \cdot \rho^2(\xi) \cdot |P^{(a)}(\xi)|^2 \leq \\ & \leq 4 \cdot \sum_{0 \neq a \in Z_{n,k}^+} [\rho(\xi)]^{2|a|} \cdot |F^{(a)}(\xi)|^2 = \\ & = 4 \cdot |P(\xi)|^2 \cdot \sum_{0 \neq a \in Z_{n,k}^+} [\rho(\xi)]^{2|a|} \cdot \left| \frac{P^{(a)}(\xi)}{P(\xi)} \right|^2. \end{aligned}$$

Из леммы 3.2 работы [6] следует, что для любого $0 \neq \alpha \in \mathbb{Z}_{n,k}^+$

$$\rho(\xi) \cdot \left| \frac{P^{(\alpha)}(\xi)}{P(\xi)} \right|^{1/|\alpha|} \leq C.$$

Из последних двух соотношений получаем для всех $\xi \in D_\varepsilon(\varepsilon)$

$$\begin{aligned} \sum_{0 \neq \alpha \in \mathbb{Z}_{n,k}^+} \varepsilon^{-2 \cdot |\alpha|} \cdot [1 + \varepsilon \rho(\xi)]^s \cdot |P^{(\alpha)}(\xi)|^2 &< \\ &\leq c_1 |P(\xi)|^2 \leq c_1 \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_{n,k}^+} \varepsilon^{-2 \cdot |\alpha|} \cdot |P^{(\alpha)}(\xi)|^2, \end{aligned} \quad (3.4)$$

где постоянная c_1 зависит лишь от n, k и порядка многочлена $P(\xi)$. Неравенства (3.3)–(3.4) вместе доказывают (3.2) при $C = \max \{c_1, 4\}$.

Умножая обе части неравенства (3.2) на $[1 + \varepsilon \rho(\xi)]^{2(s-1)} \cdot \widehat{\varphi}(\xi)^2$ и интегрируя по R_n получим неравенство (3.1). Лемма 3.1 доказана.

Лемма 3.2. Пусть $Q(D)$ — линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, $\Omega = \Omega_k \times E_{n-k}$, $\Omega_k \subset E_k$, $u \in C^\infty(\Omega)$, $f(x') \cdot u(x) \in L_2(\Omega)$ для произвольной функции $f(x') \in C_0^\infty(\Omega_k)$. Тогда, если $Q(\xi) \cdot F[u \cdot \psi](\xi) \in L_2(R_n)$ для функции $\psi(x') \in C_0^\infty(\Omega_k)$, то $Q(D) \times (u \cdot \psi) \in L_2(\Omega)$, притом $F[Q(D)(u \cdot \psi)] = Q(\xi) \cdot F[u \cdot \psi]$ в среднем.

Доказательство. Положим $V(x) = F^{-1}[Q(\xi) \cdot F[u \cdot \psi](\xi)]$. Так как по условию теоремы $Q(\xi) \cdot F[u \cdot \psi](\xi) \in L_2$, то $Q \cdot F[u \cdot \psi] \in S'$, значит $V \in S'$, где S' — пространство медленно растущих распределений. Пусть $\varphi \in S$, где S — пространство быстро убывающих гладких функций. Имеем

$$\begin{aligned} \langle F[Q(D)(u \cdot \psi)] - Q(\xi) \cdot F[u \cdot \psi], \varphi \rangle &= \langle Q(D)(u \cdot \psi), F[\varphi] \rangle - \\ - \langle Q(\xi) \cdot F[u \cdot \psi], \varphi \rangle &= \langle u \cdot \psi, Q(-D)F[\varphi] \rangle - \langle Q(\xi) \cdot F[u \cdot \psi], \varphi \rangle = \\ = \langle u \cdot \psi, F[Q(\xi) \cdot \varphi] \rangle - \langle Q(\xi) \cdot F[u \cdot \psi], \varphi \rangle &= \langle F[u \cdot \psi], \\ Q(\xi) \varphi \rangle - \langle Q(\xi) \cdot F[u \cdot \psi], \varphi \rangle &= 0. \end{aligned}$$

Так как S плотно в L_2 и $Q \cdot F[u \cdot \psi] \in L_2$, то это доказывает лемму 3.2.

Пусть $P \in \Gamma(k, n)$, $\Omega = \Omega_k \times E_{n-k}$, $\Omega_k \subset E_k$. Обозначим через $\mathcal{W}(P, \Omega, k)$ множество функций $\{u\}$, для которых $\varphi(x') \cdot P^{(\alpha)}(D) u \in L_2(\Omega)$ для всех функций $\varphi(x') \in C_0^\infty(\Omega_k)$ и всех мультииндексов $\alpha \in \mathbb{Z}_{n,k}^+$.

Лемма 3.3. Пусть $S_\varepsilon = \{x = (x', x'') \in E_k \times E_{n-k}, |x'| < \varepsilon\}$, $P \in \Gamma(k, n)$, $u \in \mathcal{W}$, $P(D)u = 0$, $\varphi(x') \in C_0^\infty(|x'| < 1)$. Существует число $C > 0$, не зависящее от ε и такое, что для любого $s = 0, 1, \dots$

$$\begin{aligned} \sum_{0 \neq \alpha \in \mathbb{Z}_{n,k}^+} \varepsilon^{-2 \cdot |\alpha|} \cdot \|[1 + \varepsilon \rho(\xi)]^s \cdot P^{(\alpha)}(\xi) \cdot F[\varphi \cdot u]\|_{L_2(R_n)}^2 &\leq \\ \leq C \cdot \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_{n,k}^+} \varepsilon^{-2 \cdot |\alpha|} \int_{S_\varepsilon} |P^{(\alpha)}(D) u(x)|^2 dx, \end{aligned} \quad (3.5)$$

где $\varphi'(x') = \varphi\left(\frac{x'}{z}\right)$.

Доказательство будем вести индукцией по s . Пусть $s = 0$. Из равенства Парсевалю и леммы 4.4.2 работы [3] имеем

$$\begin{aligned} & \sum_{0 \neq \alpha \in \mathbb{Z}_{n,k}^+} \varepsilon^{-2|\alpha|} \cdot \|P^{(\alpha)}(\xi) \cdot F[\varphi^* u]\|_{L_2(R_n)}^2 = \\ &= \sum_{0 \neq \alpha \in \mathbb{Z}_{n,k}^+} \varepsilon^{-2|\alpha|} \cdot \|F[P^{(\alpha)} D(\varphi^* u)]\|_{L_2(R_n)}^2 = \\ &= \sum_{0 \neq \alpha \in \mathbb{Z}_{n,k}^+} \varepsilon^{-2|\alpha|} \cdot \|P^{(\alpha)}(D)(\varphi^* u)\|_{L_2(S_k)}^2 = \\ &= \sum_{0 \neq \alpha \in \mathbb{Z}_{n,k}^+} \varepsilon^{-2|\alpha|} \cdot \left\| \sum_{\beta \in \mathbb{Z}_{n,k}^+} \frac{D^\beta \varphi^*}{\beta!} \cdot P^{(\alpha+\beta)}(D) u \right\|_{L_2(S_k)}^2 = \\ &= \sum_{0 \neq \alpha \in \mathbb{Z}_{n,k}^+} \left\| \sum_{\beta \in \mathbb{Z}_{n,k}^+} \frac{\varepsilon^{|\beta|} \cdot D^\beta \varphi^*}{\beta!} \varepsilon^{-|\alpha+\beta|} \cdot P^{(\alpha+\beta)}(D) u \right\|_{L_2(S_k)}^2 \leq \\ &\leq c_1 \sum_{0 \neq \alpha \in \mathbb{Z}_{n,k}^+} \sum_{\beta \in \mathbb{Z}_{n,k}^+} \sup_{|x'| < 1} \frac{\varepsilon^{|\beta|} \cdot D^\beta \varphi^*(x')}{\beta!} \cdot \varepsilon^{-|\alpha+\beta|} \cdot \|P^{(\alpha+\beta)}(D) u\|_{L_2(S_k)}^2 \leq \\ &< c_2 \sum_{0 \neq \gamma \in \mathbb{Z}_{n,k}^+} \varepsilon^{-2|\gamma|} \cdot \|P^{(\gamma)}(D) u\|_{L_2(S_k)}^2. \end{aligned}$$

Таким образом, неравенство (3.5) при $s = 0$ доказано. Пусть неравенство (3.5) доказано при $s \leq s_0 - 1$, докажем его для $s = s_0$.

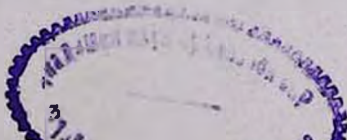
Применяя лемму 3.1, получим

$$\begin{aligned} & \sum_{0 \neq \alpha \in \mathbb{Z}_{n,k}^+} \varepsilon^{-2|\alpha|} \cdot \| [1 + \varepsilon \cdot \rho(\xi)]^{s_0} \cdot P^{(\alpha)}(\xi) \cdot F[\varphi^* u] \|_{L_2(R_n)}^2 \leq \\ &\leq c_3 \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_{n,k}^+} \varepsilon^{-2|\alpha|} \cdot \| [1 + \varepsilon \cdot \rho(\xi)]^{s_0-1} P^{(\alpha)}(\xi) \cdot F[\varphi^* u] \|_{L_2(R_n)}^2 \leq \\ &\leq c_4 \left\{ \sum_{0 \neq \alpha \in \mathbb{Z}_{n,k}^+} \varepsilon^{-2|\alpha|} \cdot \int_{S_k} |P^{(\alpha)}(D) u(x)|^2 dx + \right. \\ &\quad \left. + \| [1 + \varepsilon \cdot \rho(\xi)]^{s_0-1} \cdot P(\xi) \cdot F[\varphi^* u] \|_{L_2(R_n)}^2 \right\}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Для завершения доказательства оценим последнее слагаемое правой части неравенства (3.6). В силу того, что функция u удовлетворяет уравнению $P(D)u = 0$ в полосе S_k , имеем

$$P(D)(\varphi^* u) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_{n,k}^+} \frac{D^\alpha \varphi^*}{\alpha!} P^{(\alpha)}(D) u.$$

Пусть $\psi(x') \in C^\infty$ ($|x'| < 1$), $\psi(x') = 1$ при $x' \in \text{supp } \varphi$. Еще раз, применяя лемму 4.4.2 работы [3] и лемму 3.2 настоящей работы, отсюда получаем



$$\begin{aligned}
& \| [1 + \varepsilon \cdot \rho(\xi)]^{s_0-1} \cdot P(\xi) \cdot F[\varphi^* u] \|_{L_s(R_n)} = \\
& = [1 + \varepsilon \cdot \rho(\xi)]^{s_0-1} \cdot \sum_{0 \neq a \in \mathbb{Z}_{n,k}^+} \frac{1}{a!} F[D^a \varphi^* \cdot P^{(a)}(D) u] \|_{L_s(R_n)} = \\
& = \| [1 + \varepsilon \cdot \rho(\xi)]^{s_0-1} \cdot \sum_{0 \neq a \in \mathbb{Z}_{n,k}^+} \frac{1}{a!} F[D^a \varphi^* \cdot P^{(a)}(D) (u \cdot \psi^*)] \|_{L_s(R_n)} \leq \\
& \leq c_5 \sum_{0 \neq a \in \mathbb{Z}_{n,k}^+} \| [1 + \varepsilon \cdot \rho(\xi)]^{s_0-1} \cdot F[D^a \varphi^* \cdot P^{(a)}(D) (u \cdot \psi^*)] \|_{L_s(R_n)} \leq \\
& \leq c_5 \sum_{0 \neq a \in \mathbb{Z}_{n,k}^+} \| [1 + \varepsilon \cdot |\eta'| + \varepsilon \cdot \rho(\xi - \eta')]^{s_0-1} \times \\
& \times \int \eta^a \cdot F[\varphi^*](\eta') \cdot P^{(a)}(\xi - \eta') \cdot F[u \cdot \psi^*](\xi - \eta') d\eta' \|_{L_s(R_n)} \leq \\
& \leq c_6 \sum_{0 \neq a \in \mathbb{Z}_{n,k}^+} c_{a, s_0-1} \cdot \varepsilon^{-|a|} \cdot \| [1 + \varepsilon \cdot \rho(\xi)]^{s_0-1} \cdot P^{(a)}(\xi) \cdot F[u \cdot \psi^*] \|_{L_s(R_n)}.
\end{aligned}$$

Так как по предположению индукции неравенство (3.5) верно при $s = s_0 - 1$, то из полученного соотношения и неравенства (3.6) следует неравенство (3.5) при $s = s_0$. Лемма 3.3 доказана.

Лемма 3.4. Пусть $u \in \mathcal{W}(P, S_\varepsilon, k)$ ($0 < \varepsilon < 1$) — решение уравнения $P(D)u = 0$, при этом для вектора $y \in E_n$ существуют положительные числа A и a такие, что

$$\|(y, \xi)\| \leq A [\rho(\xi) + 1]^a \quad \forall \xi \in R_n. \quad (3.7)$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}
& \varepsilon^{2a} \cdot \sum_{0 \neq a \in \mathbb{Z}_{n,k}^+} \varepsilon^{-2 \cdot |a|} \int_{S_{\varepsilon/2}} |P^{(a)}(D) \langle y, D \rangle u(x)|^2 dx \leq \\
& \leq A \cdot \sum_{0 \neq a \in \mathbb{Z}_{n,k}^+} \varepsilon^{-2 \cdot |a|} \int_{S_\varepsilon} |P^{(a)}(D) u(x)|^2 dx. \quad (3.8)
\end{aligned}$$

Доказательство проводится аналогично доказательству леммы 4.4.4 работы [3] с применением доказанной нами леммы 3.3.

Теорема 3.1. Пусть $P \in \Gamma(k, n)$, $\Omega = \Omega_k \times E_{n-k}$, где $\Omega_k \subset E_k$ — ограниченная область. Пусть для оператора $P(D)$ удовлетворяется условие (3.7) и $u \in \mathcal{W}(P, \Omega, k)$ — решение уравнения $P(D)u = 0$.

Существует постоянная $c > 0$, не зависящая от функции u и такая, что для произвольных положительных чисел δ и δ_1

$$\begin{aligned}
& \sum_{0 \neq a \in \mathbb{Z}_{n,k}^+} \delta^{-2 \cdot |a|} \int_{\Omega(\delta + \delta_1)} |P^{(a)}(D) \langle y, D \rangle u(x)|^2 dx \leq \\
& \leq c \cdot \delta^{-2a} \sum_{0 \neq a \in \mathbb{Z}_{n,k}^+} \int_{\Omega(\delta_1)} |P^{(a)}(D) u(x)|^2 dx, \quad (3.9)
\end{aligned}$$

где $\Omega^{(2)} = \{x; x \in \Omega, \text{dist}(x', \partial\Omega_k) > \delta\}$.

Доказательство. Пусть $z' \in \Omega_k \cap \Omega^{(1+\varepsilon)}$, $0 < \varepsilon < 1$.

Применив лемму 3.4 к функции $u(x + (z', 0))$, получим

$$\begin{aligned} & \varepsilon^{2\alpha} \sum_{0 \neq \alpha \in \mathbb{Z}_{n,k}^+} \varepsilon^{-2|\alpha|} \int_{|x'-z'| < \frac{\varepsilon}{2}} \int_{R_{n-k}} |P^{(\alpha)}(D) \langle y, D \rangle u(x)|^2 \leq \\ & \leq A \cdot \sum_{0 \neq \alpha \in \mathbb{Z}_{n,k}^+} \varepsilon^{-2|\alpha|} \int_{|x'-z'| < \varepsilon R_{n-k}} |P^{(\alpha)}(D) u(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

Проинтегрировав обе части полученного соотношения по z' по области $\Omega_k \cap \Omega^{(1+\varepsilon)}$ и проводя рассуждения, аналогичные рассуждениям теоремы 4.4.2 работы [3], мы получим доказательство теоремы при $\varepsilon = \min\{1, \delta/2\}$.

Лемма 3.5. Пусть $P \in \Gamma(k, n)$, существуют числа $M > 0$ и $\sigma > 0$ такие, что $|P(\xi)| \geq \sigma$ при $|\xi| > M$, функция $u \in W(P, \Omega, k)$ является решением уравнения $P(D)u = 0$, $y \in E_n$, $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_k)$. Тогда для любого $j = 0, 1, \dots$ $(\xi, y)^j F[u \cdot \varphi] \in L_2(R_n)$.

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} & \int_{R_n} |(\xi, y)^j F[u \cdot \varphi]|^2 d\xi = \int_{|\xi| < M} |(\xi, y)^j F[u \cdot \varphi]|^2 d\xi + \\ & + \int_{|\xi| > M} |(\xi, y)^j F[u \cdot \varphi]|^2 d\xi \leq c_1 \int_{|\xi| < M} |F[u \cdot \varphi]|^2 d\xi + \\ & + \frac{1}{\sigma^2} \int_{|\xi| > M} |(\xi, y)^j P(\xi) \cdot F[u \cdot \varphi]|^2 d\xi \leq c_1 \cdot \|F[u \cdot \varphi]\|_{L_2}^2 + \\ & + \frac{1}{\sigma^2} \int_{R_n} |(\xi, y)^j \cdot P(\xi) \cdot F[u \cdot \varphi]|^2 d\xi. \end{aligned}$$

Пусть $\psi \in C_0^\infty(\Omega_k)$, $\psi(x) = 1$ при $x \in \text{supp } \varphi$. Так как $\varphi \cdot P(D) \times (u \cdot \psi) = 0$, то

$$\begin{aligned} P(\xi) \cdot F[u \cdot \varphi] &= P(\xi) \cdot F[u \cdot \varphi \cdot \psi] = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_{n,k}^+} \frac{P^{(\alpha)}(\xi)}{\alpha!} F[u \cdot \varphi] * (\xi^\alpha \cdot F[\psi]) = \\ &= \sum_{0 \neq \alpha \in \mathbb{Z}_{n,k}^+} \frac{P^{(\alpha)}(\xi)}{\alpha!} F[u \cdot \varphi] * (\xi^\alpha \cdot F[\varphi]). \end{aligned}$$

Отсюда имеем

$$\begin{aligned} & \int_{R_n} |(\xi, y)^j F[u \cdot \varphi]|^2 d\xi \leq c_1 \cdot \|F[u \cdot \varphi]\|_{L_2}^2 + \\ & + \frac{1}{\sigma^2} \cdot \sum_{0 \neq \alpha \in \mathbb{Z}_{n,k}^+} \frac{1}{\alpha!} \int_{R_n} |(y, \xi)^j \cdot P^{(\alpha)}(\xi) \cdot F[u \cdot \varphi] * (\xi^\alpha \cdot F[\varphi])|^2 d\xi. \end{aligned}$$

Применяя здесь неравенство Юнга и замечая (см. [3], лемма 4.4.2), что для любого $\beta \in Z_{n,k}^+$ и произвольной $f \in C_0^\infty(\Omega_k)$

$$\int_{R_n} |(\xi')^\beta \cdot f(\xi')| d\xi' \leq c_\beta,$$

получаем неравенство

$$\begin{aligned} & \int_{R_n} |(\xi, y)' F[u \cdot \varphi]|^2 d\xi \leq c_1 \|F[u \cdot \varphi]\|_{L^2}^2 + \\ & + c_2 \sum_{l=0}^j \sum_{0 \neq \alpha \in Z_{n,k}^+} \int_{R_n} |(\xi, y)' P^{(\alpha)}(\xi) \cdot F[u \cdot \varphi]|^2 d\xi \end{aligned}$$

с некоторой постоянной $c_2 = c_2(j, \varphi) > 0$.

Для оценки второго слагаемого левой части полученного неравенства применим лемму 3.3 работы [6], из которой следует, что для натурального числа j существуют положительные постоянные $A_j = A_j(y)$, $a_j = a_j(y)$ такие, что

$$\sum_{l=0}^j |(\xi, y)^l| \leq A_j (1 + \rho(\xi))^{a_j} \quad \forall \xi \in R_n.$$

Имеем

$$\begin{aligned} & \int_{R_n} |(\xi, y)' F[u \cdot \varphi]|^2 d\xi \leq c_1 \|u \cdot \varphi\|_{L^2}^2 + \\ & + c_3(j, y) \sum_{0 \neq \alpha \in Z_{n,k}^+} \int_{R_n} |(1 + \rho(\xi))^{A_j} P^{(\alpha)}(\xi) \cdot F[u \cdot \varphi]|^2 d\xi. \end{aligned}$$

Так как $u \in W(P, \Omega, k)$, то применяя лемму 3.3 отсюда получаем доказательство леммы 3.5.

Теорема 3.2. Пусть $P \in \Gamma(k, n)$, $x = (x', x'')$, $x' \in E_k$, $x'' \in E_{n-k}$, существуют числа $M > 0$ и $c > 0$ такие, что $|P(\xi)| > c$ при $|\xi| > M$. Если для некоторого ненулевого вектора $y \in E_n$ и некоторых положительных чисел A и a выполняется соотношение

$$|(y, \xi)| \leq A(1 + \rho(\xi))^a \quad \forall \xi \in R_n,$$

то существует число $\kappa > 0$ такое, что для всех решений $u \in W(P, \Omega, k)$ уравнения $P(D)u = 0$, для произвольных чисел r_1 и r_2 и для всех точек $x \in \Omega$, $|x'| \leq r_1$, $|x''| \leq r_2$

$$|< y, D >^j u(x)| \leq \kappa^j \cdot j^{a_j}, \quad j = 1, 2, \dots$$

Доказательство. Из теоремы пункта 7 работы [5] и леммы 3.5 настоящей работы следует, что при условиях теоремы 3.2 функции $v_j(x) = < y, D >^j u(x)$ ($j = 1, 2, \dots$) также принадлежат классу $W(P, \Omega, k)$ и удовлетворяют уравнению $P(D)v_j = 0$ ($j = 1, 2, \dots$). Тогда применив неравенство (3.9) (см. теорему 3.1) к функциям $v_j(x)$ ($j = 1, 2, \dots$), получим

$$\sum_{0 \leq |\alpha| \leq j} \delta^{-2|\alpha|} \int_{\Omega(|j+1|-\delta)} |P^{(\alpha)}(D) \langle y, D \rangle^j u(x)|^2 dx \leq \\ \leq c_j \delta^{-2aj}. \sum_{0 \leq |\alpha| \leq j} \delta^{-2|\alpha|} \int_{\Omega(\delta)} |P^{(\alpha)}(D) u(x)|^2 dx. \quad (3.10)$$

Выберем число δ_1 так, чтобы для множества $\tilde{K} = \{x: x \in E_n, |x'| \leq r_1\} \cap \tilde{K} \subset \Omega^{(\delta_1)}$. Пусть $\delta = \delta_1 / (j+1)$. Применив лемму 3.5, из (3.10) и того, что $u \in W(P, \Omega, k)$, получим с некоторой постоянной $C_j > 0$

$$\int_{\Omega(\delta_1)} |\langle y, D \rangle^j u(x)|^2 dx \leq C_j^2 \cdot j^{2aj}, \quad j = 1, 2, \dots \quad (3.11)$$

Пусть теперь $\varphi \in C_0^\infty$, $G = \text{supp } \varphi \subset \Omega^{(\delta_1)}$, $\varphi(x) = 1$ при $x \in K = \{y, y \in E_n, |y'| \leq r_1, |y''| \leq r_2\}$. Тогда следующая легко проверяемая цепочка неравенств для $u \in C^\infty(E_n)$ вместе с неравенством (3.11) доказывает теорему:

$$\sup_{x \in K} |u(x)|^2 \leq \sup_{x \in G} |u(x) \cdot \varphi(x)|^2 \leq \\ \leq c_3 \sum_{|\beta| \leq n} \int_G |D^\beta u(x)|^2 dx \leq c_3 \sum_{|\beta| \leq n} \int_{\Omega(\delta_1)} |D^\beta u(x)|^2 dx.$$

Теорема 3.2 доказана.

Ереванский государственный
университет, ЕРНИИММ

Поступила 25. IX. 1984

Հ. Գ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ, Վ. Ն. ՄԱՐԳԱՐՅԱՆ Տված հիպոէլլիպտիկութեամբ կրող ունեցող ոչ-հիպոէլլիպտիկ նախադրումների լուծումների գնահատականներ (ամփոփում)

Ուսումնասիրվում են $P(D)u = 0$ հավասարումները, որտեղ $P(D)$ -ն ընդհանրապես ասած ոչ հիպոէլլիպտիկ օպերատոր է, տված հիպոէլլիպտիկության կրողով, Այդ հավասարման լուծումների համար ստացվում են իրենց բնույթով վերջնական ինտեգրալ անհավասարություններ, ինչպես նաև ստացված ինտեգրալ անհավասարություններից, նկարագրվում են ժեմլրեի այն անհավասար դասերը, որոնց պատկանում են $P(D)u = 0$ հավասարման լուծումները, նկարագրվում են այն կրողներ անդամները, որոնց ավելացնելը չի փոխում տված օպերատորի հիպոէլլիպտիկության կրողը:

G. G. KAZARIAN, V. N. MARKARIAN. Estimates for solutions of nonhypoelliptical equations with given hypoellipticity carrier (summary)

The paper considers equations $P(D)u = 0$, where $P(D) = P(D_1, \dots, D_n)$ is a linear differential operator with constant coefficients and given hypoellipticity carrier. We prove that the solutions belong to nonisotrope Jevre class, as well as find some integral estimates for the solutions. Also we describe the class of terms whose addition to the operator does not change its carrier.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Аимон, А. Дузис, Л. Ниренберг. Оценки решений эллиптических уравнений вблизи границы, М., ИЛ, 1962.
2. Л. Хёрмандер. К теории общих дифференциальных операторов в частных производных, М., ИЛ, 1959.
3. Л. Хёрмандер. Линейные дифференциальные операторы с частными производными, М., «Мир», 1965, 379 с.
4. Я. С. Бузров. Теоремы вложения для некоторых функциональных классов, Труды МИАН СССР, 1965, т. 77, 45—64.
5. В. Н. Буренков. Аналог теоремы Хёрмандера о гипоеллиптичности для функций, стремящихся к нулю на бесконечности, Сб. докладов VII Советско-Чехословацкого семинара, Ереван, 1982, 63—67.
6. Г. Г. Казарян, В. Н. Маркарян. Носитель гипоеллиптичности линейных дифференциальных операторов, Изв. АН АрмССР, серия «Математика», XXI, № 5, 1986, 453—470.
7. Г. Г. Казарян. О добавлении младших членов к дифференциальным полиномам, Изв. АН АрмССР, IX, № 6, 1974, 473—485.
8. Г. Г. Казарян. Оценки дифференциальных операторов и гипоеллиптические операторы, Труды МИАН СССР, 140, 1976, 130—161.
9. Г. Г. Казарян, В. Н. Маркарян. Критерии гипоеллиптичности в терминах мощности и силы операторов, Труды МИАН СССР, 150, 1979, 128—142.
10. В. Н. Маркарян. Добавление младших членов, сохраняющих гипоеллиптичность оператора, Изв. АН АрмССР, сер. матем., т. XV, № 6, 1980, 443—460.
11. В. П. Михайлов. О поведении на бесконечности одного класса многочленов, Труды МИАН СССР, т. 91, 1967, 58—81.