ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XXII, № 4, 1987 Математика

УДК 517.51

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

В. М. МАНУКЯН

О НОСИТЕЛЯХ ФУНКЦИЙ, ОБРАЗУЮЩИХ ПОЛНУЮ ОРТОНОРМАЛЬНУЮ СИСТЕМУ

Как было показано Орличем в работе [1] (см., например, [2], стр. 174), для полной ортонормальной системы $\{\varphi_n(x)\}$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varphi_n^2(x)$ почти всюду расходится. Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ — полная ортонормальная система функций в пространстве $L^2[0, 1]$. Положим

$$E_n = \{x \mid x \in [0, 1],\ \varphi_n(x) \neq 0\}.$$

Из теоремы Орлича следует, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu E_n = \infty. \tag{1}$$

Как известно существуют полные ортонормированные системы, для которых $\mu E_n \to 0$. Например, для системы Хаара $\mu E_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$. Возникает вопрос, что можно сказать о скорости убывания μE_n для полных ортонормированных систем, оставаясь конечно в рамках соотношения (1). Оказывается верно следующее утверждение.

Теорема. *Для любой последовательности положительных чисел* $\varepsilon_n\ (n=1, 2, \cdots)$, *удовлетворяющих условию* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n = \infty$, *существует в пространстве* $L^2[0, 1]$ *такая полная ортонормированная система функций* $\{\varphi_n(x)\}$, *что* $\mu E_n \leqslant \varepsilon_n$, $n=1, 2, \cdots$.

Для доказательства этой теоремы нам понадобится следующая

Лемма. *Если даны:*

I. *целое число* $M > 0$,

II. *ортонормированная система ступенчатых функций* $\{\varphi_l(x)\}_{l=1}^{N}$ *на отрезке* $[0, 1]$, *причем все эти функции постоянны на интервалах* $\left(\frac{j-1}{M}, \frac{j}{M}\right)$, $(1 \leqslant j \leqslant M)$,

III. *такая последовательность рациональных чисел* $\sigma_l > 0$, *что*

$$\sum_{l=n_k+1}^{n_{k+1}} \sigma_l = 1,\ 0 = n_1 < n_2 < n_3 < \cdots,$$

то систему $\{\varphi_l(x)\}_{l=1}^{N}$ *можно дополнить ступенчатыми функциями* $\varphi_{N+1}(x), \varphi_{N+2}(x), \cdots, \varphi_{N'}(x)$ *таким образом, чтобы полученная* *в результате этого система функций* $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^{N'}$ *удовлетворяла следующим условиям:*

1° *система* $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^{N'}$ *ортонормирована на отрезке* [0,1],

2° *концы всех интервалов постоянств функций* $\varphi_i(x)$, $i = 1, 2, \cdots, N'$*—рациональные точки,*

3°. $\mu E_i = \sigma_i$, $i = N+1, N+2, \cdots, N'$,

4° *характеристическую функцию любого интервала* $\left(\frac{j-1}{M}, \frac{j}{M}\right)$, $(1 \leqslant j \leqslant M)$ *можно получить при помощи линейных комбинаций функций* $\varphi_i(x)$ $(i = 1, 2, \cdots, N')$.

Доказательство леммы. Составим матрицу $A = \{a_{ij}\}$, $(1 \leqslant i \leqslant N, 1 \leqslant j \leqslant M)$, где a_{ij}—это значение функции $\varphi_i(x)$ на интервале $\left(\frac{j-1}{M}, \frac{j}{M}\right)$. Из условия II леммы следует, что произвольные две строки этой матрицы ортогональны, то есть

$$(a^{(i)}, a^{(i')}) = \sum_{j=1}^{M} a_{ij}\, a_{i'j} = 0. \tag{2}$$

Из этого, в свою очередь, следует, что

$$M \geqslant N. \tag{3}$$

Если $M = N$, то система $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^{N}$ является искомой.

Рассмотрим случай, когда $M > N$. Дополним матрицу A новыми строчками

$$b^{(i)} = (b_{i1}, b_{i2}, \cdots, b_{iM}),\ i = 1, 2, \cdots, M - N \tag{4}$$

до полной ортонормированной матрицы $\bar{A}$.

Функции $\varphi_{N+1}(x)$, $\varphi_{N+2}(x), \cdots, \varphi_{N'}(x)$ будем строить пачками. Опишем как строится первая пачка функций.

Возьмем числа $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n$, (см. условие III леммы), $N+1$-ую строчку матрицы $\bar{A}$ $b^{(1)} = (b_{11}, b_{12}, \cdots, b_{1M})$ и построим функции $\bar{\varphi}_{N+l}(x)$, $= 1, 2, \cdots, n_2$ следукщим образом:

$$\bar{\varphi}_{N+l}(x) = \begin{cases} b_{11}, \text{ если } x \in \left(\dfrac{\sum_{j=1}^{l-1} \sigma_j}{M}, \dfrac{\sum_{j=1}^{l} \sigma_j}{M}\right), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_{1i}, \text{ если } x \in \left(\dfrac{i-1+\sum_{j=1}^{l-1} \sigma_j}{M}, \dfrac{i-1+\sum_{j=1}^{l} \sigma_j}{M}\right), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_{1M}, \text{ если } x \in \left(\dfrac{M-1+\sum_{j=1}^{l-1} \sigma_j}{M}, \dfrac{M-1+\sum_{j=1}^{l} \sigma_j}{M}\right), \\ 0 \text{—в остальных точках.} \end{cases} \tag{5}$$

Функции, полученные в результате нормирования функций $\overline{\varphi}_{N+l}(x)$ ($l=1, 2, \cdots, n_2$), в пространстве $L^2[0, 1]$ обозначим через $\varphi_{N+l}(x)$. Предположив, что уже построены первые $k-1$ пачек системы $\{\varphi_l(x)\}_{l=N+1}^{N'}$, т. е. функции $\varphi_{N+1}(x), \cdots, \varphi_{N+n_2}(x), \cdots, \varphi_{N+n_k}(x)$, для построения которых использованы строчки $b^{(1)}, b^{(2)}, \cdots, b^{(k-1)}$ матрицы $\overline{A}$ и числа $\{\sigma_l\}_{l=1}^{n_k}$, опишем как строится k-ая пачка. Она получается в результате нормирования в пространстве $L^2[0, 1]$ функций $\overline{\varphi}_{N+n_k+l}(x)$ $l=1, 2, \cdots, (n_{k+1}-n_k)$, которые строятся следующим образом:

$$\overline{\varphi}_{N+n_k+l}(x)=\begin{cases} b_{k1}, \text{ если } x\in\left(\dfrac{\sum\limits_{j=1}^{l-1}\sigma_{n_k+j}}{M}, \dfrac{\sum\limits_{j=1}^{l}\sigma_{n_k+j}}{M}\right), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_{ki}, \text{ если } x\in\left(\dfrac{i-1+\sum\limits_{j=1}^{l-1}\sigma_{n_k+j}}{M}, \dfrac{i-1+\sum\limits_{j=1}^{l}\sigma_{n_k+j}}{M}\right), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_{kM}, \text{ если } x\in\left(\dfrac{M-1+\sum\limits_{j=1}^{l-1}\sigma_{n_k+j}}{M}, \dfrac{M-1+\sum\limits_{j=1}^{l}\sigma_{n_k+j}}{M}\right), \\ 0 - \text{в остальных точках.}\end{cases} \tag{6}$$

Проверим, что построенная таким образом система $\{\varphi_l(x)\}_{j=1}^{N''}$ является искомой, то есть удовлетворяет условиям леммы.

Из построения функций $\overline{\varphi}_{N+j}(x)$ и из того, что $\sum\limits_{l=n_k+1}^{n_{k+1}}\sigma_l=1$ следует, что на интервале $\left(\dfrac{i-1}{M}, \dfrac{i}{M}\right)$, $i=1, 2, \cdots, M$

$$\sum_{l=1}^{n_{k+1}-n_k}\overline{\varphi}_{N+n_k+l}(x)=b_{ki}. \tag{7}$$

А так как матрица $\overline{A}$ по построению является полной ортонормированной, то из (7) следует, что при помощи линейных комбинаций функций $\varphi_i(x)$, $i=1, 2, \cdots, N'$ можно получить характеристическую функцию произвольного интервала $\left(\dfrac{i-1}{M}, \dfrac{i}{M}\right)$, $i=1, 2, \cdots, M$, т. е. построенная система удовлетворяет условию 4° леммы. Из остальных свойств нуждается в проверке только пункт 1°.

Если $1\leqslant i\leqslant N$, $1\leqslant i'<M-N$, то

$$(\varphi_i, \varphi_{N+i'})=\int_0^1\varphi_i(x)\,\varphi_{N+i'}(x)\,dx=\sum_{j=1}^{M}\int_{\frac{j-1}{M}}^{\frac{j}{M}}\varphi_i(x)\,\varphi_{N+i'}(x)\,dx=$$

$$=\sum_{j=1}^{M}a_{ij}\,b_{i'j}\,\frac{\sigma_j}{M}=0.$$

Если $1 \leqslant i \leqslant n_{k+1} - n_k$, $1 \leqslant i' < n_{k+1} - n_k$, $i \neq i'$, $k=1, 2, \cdots, M-N$ (т. е. берутся две разные функции из одной и той же пачки), то

$$(\varphi_{N+n_k+i}, \varphi_{N+n_k+i'}) = 0,$$

так как носители функций, принадлежащих одной и той же пачке не пересекаются.

Теперь рассмотрим случай, когда берутся функции из разных пачек. Нам нужно доказать, что

$$(\varphi_{N+n_k+nl}(x), \varphi_{N+n_{k'}+l'}(x)) = 0. \tag{8}$$

Рассмотрим интервалы Δi, $i = 1, 2, \dots M$, где

$$\Delta_i = \left(\frac{i-1+\sum_{j=1}^{l-1} \sigma_{n_k+j}}{M}, \frac{i-1+\sum_{j=1}^{l} \sigma_{n_k+j}}{M}\right) \cap$$
$$\cap \left(\frac{i-1+\sum_{j=1}^{l'-1} \sigma_{n_{k'}+j}}{M}, \frac{i-1+\sum_{j=1}^{l'} \sigma_{n_{k'}+j}}{M}\right). \tag{9}$$

Легко заметить, что интервал Δ_i получается при помощи сдвига интервала Δ_1 вправо на величину $\frac{i-1}{M}$, значит

$$\mu \Delta_i = \mu \Delta_1, \quad i=1, 2, \cdots, M. \tag{10}$$

Кроме того

$$\Delta_i \subset \left(\frac{i-1}{M}, \frac{i}{M}\right), \quad i=1, 2, \cdots, M. \tag{11}$$

Из соотношений (6), (9), (10), (11) и ортогональности строчек матрицы $\overline{A}$ следует справедливость соотношения (8). В самом деле

$$(\varphi_{N+n_k+l}, \varphi_{N+n_{k'}+l'}) = \sum_{i=1}^{M} \int_{\frac{i-1}{M}}^{\frac{i}{M}} \varphi_{N+n_k+l}(x)\, \varphi_{N+n_{k'}+l'}(x)\, dx =$$
$$= \sum_{i=1}^{M} \int_{\Delta_i} \varphi_{N+n_k+l}(x)\, \varphi_{N+n_{k'}+l'}(x)\, dx = \sum_{i=1}^{M} b_{kl}\, b_{k'l}\, \mu \Delta_i =$$
$$= \mu\, \Delta_1 \sum_{l=1}^{M} b_{kl}\, b_{k'l} = 0.$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Возьмем последовательность рациональных чисел σ_i, удовлетворяющих следующим условиям:

$$0 < \sigma_i \leqslant \varepsilon_i, \; i = 1, 2, \cdots, \sigma_0 = 0, \; \sum_{i=n_k+1}^{n_{k+1}} \sigma_i = 1, \; 0 = n_1 < n_2 < n_3 < \cdots. \tag{12}$$

Это всегда возможно, так как по условию теоремы $\varepsilon_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots$ и $\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i = +\infty$. Первые n_2 функции построим следующим образом:

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\sigma_i}}, \text{ если } x \in \left(\sum_{l=0}^{i-1} \sigma_l, \sum_{l=0}^{i} \sigma_l\right), \; i = 1, 2, \cdots, n_2 \\ 0 - \text{в остальных точках.} \end{cases}$$

Выберем натуральное число $M_1 > n_2$ таким образом, чтобы числа $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_{n_2}$ нацело делились на M_1. (Это всегда возможно, т. к. числа σ_i рациональны). Для числа M_1 ортонормированной системы $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^{n_2}$ и чисел $\sigma_{n_2+1}, \sigma_{n_2+2}, \cdots$, применив предыдущую лемму, получим ортонормированную систему функций $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^{N_1}$. Так как по условию 2° леммы концы интервалов постоянства функций $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x), \cdots, \varphi_{N_1}(x)$ рациональны, то можно выбрать натуральное число $M_2 > N_1$ так, что все функции $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^{N_1}$ будут постоянны на интервалах $\left(\frac{i-1}{M_2}, \frac{i}{M_2}\right)$. Для чисел M_2 ортонормированной системы $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^{N_1}$ и чисел $\sigma_{N_1+1}, \sigma_{N_1+2}, \cdots$ опять применим лемму и т. д.

Получим искомую систему ортонормированных функций, полнота которой следует из условия 4° леммы.

Теорема доказана.

Ереванский государственный университет

Поступила 1. VII. 1986

ЛИТЕРАТУРА

1. *W. Orlicz.* Zur Theorie der Orthogonalreihen, Bull. Acad. Polonaise, 1927, 81—115.
2. *С. Качмаж, Г. Штейнгауз.* Теория ортогональных рядов, М., Физматгиз, 1958.
3. *В. Я. Козлов.* О распределении положительных и отрицательных значений ортогональных и нормированных функций, образующих полную систему, Мат. сб., 23, 1948, 475—480.