ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XXII, № 4, 1987 Математика

УДК 517.597

А. Э. ДЖРБАШЯН

КЛАССЫ A_α^p ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ПОЛУПРОСТРАНСТВАХ И АНАЛОГ ТЕОРЕМЫ М. РИССА

Введение

Рассмотрим в единичном круге D класс всех аналити.еских функций f, для которых кончен нитеграл

$$\iint_D |f(z)|^p (1-|z|)^\alpha \, dx\, dy, \quad 0<p<\infty, \ -1<\alpha<\infty.$$

Эти классы, которые мы обозначим через A_α^p, были введены впервые и обстоятельно изучены в работах [1, 2] в середине 40-х годов. Изучению свойств этих пространств посвящена к настоящему времени обширная литература. Довольно полную библиографию можно найти в обзорной статье [3].

В последние годы интенсивно развивается и теория пространств A_α^p в многомерных комплексных областях. Здесь следует отметить работу [4], где впервые детально изучался вопрос об интегральном представлении пространств A_α^p (при $\alpha=0$) в широком классе многомерных областей. Отметим в этой связи также работу [5]. См. также обзорную статью [6] и библиографию в [3] и [7].

Существенные трудности возникают при изучении пространств A_α^p гармонических функций в многомерных вещественных областях. Дело в том, что здесь не имеется аналога понятия представляющего ядра, которое играет важную роль в случае голоморфных функций.

По-видимому первой работой, где вводились классы A_α^p гармонических функций, была статья Р. Койфмана и Р. Рохберга [5]. Они рассматривали эти пространства в единичном шаре евклидова пространства R^n. Однако получить интегральные представления и доказать некоторые другие факты удалось только для целых значений параметра α. Общий случай был рассмотрен в [8]. Следует также отметить работу [9], где рассматривались классы гармонических функций несколько более общие, чем A_α^p в верхней полуплоскости.

В настоящей работе мы занимаемся изучением пространств и гармонических векторных полей класса A_α^p в полупространствах. При этом интегральное представление связано с целым параметром $m \geqslant 0$, который определенным образом зависит от параметров p и α. Конечно, было бы желательно иметь представление, зависящее от непрерывного параметра, как это удалось сделать в [8]. Однако это связано со значительными техническими трудностями, в частности с необходимостью привлечения понятий дробного дифференцирования и интегрирования, мало изученных в случае полупространства. Кроме того, дальнейшие основные результаты ничего не теряют от этого.

В первом параграфе вводятся необходимые понятия и устанавливаются некоторые простейшие свойства классов A^p_α. Доказываются также основная теорема об интегральном представлении и теорема об ограниченности интегрального проектора, связанного с интегральным представлением.

Второй параграф посвящен изучению систем М. Рисса класса A^p_α, то есть векторных функций из этого класса, компоненты которых удовлетворяют многомерным уравнениям Коши—Римана. Здесь и возникают сопряженные гармонические функции и мы доказываем аналог теоремы М. Рисса, который справедлив при всех p, $0<p<\infty$.

Отметим в заключение, что отправной точкой для нашей работы послужила статья Ф. Риччи и М. Тейблсона [9]. Точнее, наша теорема 1 фактически является приспособленным к нашему случаю вариантом их теоремы 3.1.

§ 1. Классы A^p_α в полупространствах

Обозначим через $\mathbf{R}^{n+1}_+$ верхнее полупространство в $\mathbf{R}^{n+1}$: $\mathbf{R}^{n+1}_+=\{x=(x_1,\cdots,x_n,x_{n+1})\in\mathbf{R}^{n+1}: x_{n+1}>0\}$, $x'=(x_1,\cdots,x_n)$ — проекция точки $x\in\mathbf{R}^{n+1}_+$ на $\mathbf{R}^n$. Мера Лебега в $\mathbf{R}^{n+1}_+$ будет обозначаться через $dx=dx'\,dx_{n+1}$, где $dx'=dx_1\cdots dx_n$.

Для $0<p<\infty$, $-1<\alpha<\infty$ обозначим через $A^p_\alpha=A^p_\alpha(\mathbf{R}^{n+1}_+)$ класс всех гармонических в $\mathbf{R}^{n+1}_+$ функций, для которых

$$\|f\|_{p,\alpha}=\left\{\int_0^\infty\int_{R^n}|f(x',x_{n+1})|^p x_{n+1}^\alpha\,dx'\,dx_{n+1}\right\}^{1/p}<\infty.$$

Следующий результат — обобщение известного результата Харди и Литтльвуда, принадлежащее И. Стейну и Ч. Фефферману [10].

Лемма 1. *Пусть функция f гармонична в некоторой области G пространства $\mathbf{R}^N$, $N\geqslant 2$. Тогда, если B—некоторый шар с центром в точке $x\in\mathbf{R}^N$, целиком лежащий в G, то для любого p, $0<p<\infty$, существует константа $C=C_p$ такая, что*

$$|f(x)|^p\leqslant\frac{C}{|B|}\int_B|f(y)|^p\,dy, \tag{1}$$

где $|B|$— лебегова мера шара B.

В следующей лемме устанавливается порядок роста функции $f\in A^p_\alpha$ при подходе к граничному подпространству или бесконечности.

Лемма 2. *Если $f\in A^p_\alpha$, $0<p<\infty$, $\alpha>-1$, то справедлива оценка*

$$|f(x)|\leqslant C\,\|f\|_{p,\alpha}(x_{n+1})^{-(\alpha+n+1)/p}. \tag{2}$$

Доказательство. Пусть $B_r(x)$—шар с центром в точке $x\in\mathbf{R}_+^{n+1}$ и радиуса $r=\frac{1}{2}x_{n+1}$. Тогда $B_r(x)\subset\mathbf{R}_+^{n+1}$ и по лемме 1 для всех p, $0<p<\infty$

$$|f(x)|^p\leqslant\frac{C}{|B_r(x)|}\int\limits_{B_r(x)}|f(y',\ y_{n+1})|^p\,dy'\,dy_{n+1}.$$

Заметим теперь, что при $y\in B_r(x)$, $y_{n+1}\asymp x^*_{n+1}$, поэтому будем иметь (учтем еще, что $|B_r(x)|=cx_{n+1}^{n+1}$)

$$|f(x)|^p\,x_{n+1}^{\alpha}\leqslant C\,(x_{n+1})^{-n-1}\int\limits_{B_r(x)}|f(y)|^p\,y_{n+1}^{\alpha}\,dy\leqslant C\|f\|^p_{p,\alpha}\,x_{n+1}^{-n-1},$$

откуда сразу получаем наше утверждение.

Следствие 1. *При $1\leqslant p<\infty$ классы A^p_α являются банаховыми пространствами, а при $0<p<1$ — полными метрическими пространствами.*

Следствие 2. *Если $f\in A^p_\alpha$ при тех же p и α и если $k\geqslant1$— целое число, то*

$$\left|\frac{\partial^k f(x)}{\partial x^k_{n+1}}\right|\leqslant C\,(x_{n+1})^{-(\alpha+n+1)/p-k}.$$

Функции класса A^p_α не имеют граничных значений в обычном смысле (см., напр., [9] для случая полуплоскости). Следовательно, никакого представления типа Пуассона не может существовать. Тем не менее функции этого класса обладают интегральным представлением, достаточно удовлетворительным для изучения многих их свойств.

Напомним, что ядром Пуассона в $\mathbf{R}_+^{n+1}$ называется функция

$$P(x)=P(x',\ x_{n+1})=c_n\frac{x_{n+1}}{(|x'|^2+x^2_{n+1})^{\frac{n+1}{2}}},$$

где $c_n=\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Big/\pi^{\frac{n+1}{2}}$.

Для достаточно «хороших» гармонических функций в $\mathbf{R}_+^{n+1}$ справедливо интегральное представление (о точных условиях см. [11])

$$f(x)=\int\limits_{R^n}f(y',\ 0)\,P(x'-y',\ x_{n+1})\,dy'.$$

Определим теперь ядро $Q^{(m)}$, заданное в $\mathbf{R}_+^{n+1}\times\mathbf{R}_+^{n+1}$, следующим образом ($m\geqslant0$—целое)

---

* Символ $A\asymp B$ означает, что существуют константы C_1 и C_2 такие, что выполняются неравенства $C_1A\leqslant B\leqslant C_2A$.

$$Q^{(m)}(x, y) = \frac{(-2)^{m+1}}{m!} \cdot \frac{\partial^{m+1}}{\partial x_{n+1}^{m+1}} P(x' - y', x_{n+1} + y_{n+1}). \qquad (3)$$

Полагаем для простоты $Q^{(0)} \equiv Q$.

Простое дифференцирование ядра Пуассона дает

$$Q(x, y) = c_n \frac{|x' - y'|^2 - n(x_{n+1} + y_{n+1})^2}{(|x' - y'|^2 + (x_{n+1} + y_{n+1})^2)^{\frac{n+3}{2}}},$$

и поэтому

$$|Q(x, y)| < \frac{C}{(|x' - y'|^2 + (x_{n+1} + y_{n+1})^2)^{\frac{n+1}{2}}}.$$

Дальнейшее дифференцирование показывает, что справедлива следующая

Лемма 3. *Пусть m — неотрицательное целое число. Тогда справедлива оценка*

$$|Q^{(m)}(x, y) \leqslant \frac{C}{(|x' - y'|^2 + (x_{n+1} + y_{n+1})^2)^{\frac{n+1+m}{2}}}. \qquad (4)$$

Теперь мы можем доказать теорему об интегральном представлении классов A^p_α.

Теорема 1. *Пусть $f \in A^p_\alpha$, $0 < p < \infty$, $\alpha > -1$ и m — натуральное число, удовлетворяющее условию*

$$m \geqslant \frac{\alpha + n + 1}{p} - n - 1;\ 0 < p \leqslant 1;\ m > \frac{\alpha + 1}{p} - 1,\ 1 < p < \infty. \qquad (5)$$

Тогда имеет место интегральное представление

$$f(x) = \int_{R^{n+1}_+} f(y)\, Q^{(m)}(x, y)\, y^m_{n+1}\, dy. \qquad (6)$$

Доказательство. Убедимся, во-первых, что интеграл (6) конечен. Пусть сначала $f \in A^1_\alpha$ и $m \geqslant \alpha$ — целое. Тогда воспользовавшись оценками леммы 3, получим

$$\int_{R^{n+1}_+} |f(y', y_{n+1})|\, |Q^{(m)}(x, y)|\, y^m_{n+1}\, dy'\, dy_{n+1} \leqslant$$

$$\leqslant C \int_{R^{n+1}_+} |f(y)| \frac{y^m_{n+1}}{(x_{n+1} + y_{n+1})^{n+1+m}}\, dy'\, dy_{n+1} < \infty,$$

так как $y^m_{n+1}/(x_{n+1} + y_{n+1})^{n+1+m} \leqslant C\, y^\alpha_{n+1}$, если $m \geqslant \alpha$, для любого фиксированного $x_{n+1} > 0$.

Если $1<p<\infty$, то воспользовавшись неравенством Гёльдера получим, что при $m>\frac{1+\alpha}{p}-1$ интеграл (6) конечен.

Наконец, если $0<p<1$, то применим вложение $A^p_\alpha \subset A^1_\beta$ с $\beta=\frac{\alpha+n+1}{p}-n-1$. Это вложение можно получить буквальным повторением рассуждений предложения 2.2 из работы [9]. Следовательно, в этом случае интеграл (6) конечен при $m\geqslant\frac{\alpha+n+1}{p}-(n+1)$.

Перейдем теперь к доказательству формулы (6).

Из оценок леммы 2 следует, что в любом подполупространстве $x_{n+1}\geqslant c>0$ в $\mathbf{R}^{n+1}_+$ функция $f\in A^p_\alpha$ ограничена. Следовательно имеет место представление Пуассона

$$f(x', x_{n+1})=\int_{\mathbf{R}^n} P\left(x'-y', \frac{x_{n+1}}{2}\right) f\left(y', \frac{x_{n+1}}{2}\right) dy'.$$

Для произвольного $N>0$ интегрирование по частям дает

$$\int_{\mathbf{R}^n} P\left(x'-y', \frac{x_{n+1}}{2}\right) f\left(y', \frac{x_{n+1}}{2}\right) dy' =$$

$$=\frac{(-1)^{m+1}}{m!}\int_{\mathbf{R}^n} f\left(y', \frac{x_{n+1}}{2}\right)\int_0^N y^m_{n+1}\frac{\partial^{m+1}}{\partial x^{m+1}_{n+1}} P\left(x'-y', y_{n+1}+\frac{x_{n+1}}{2}\right)\times$$

$$\times\, dy_{n+1}\, dy' + f(x', N+x_{n+1})+\cdots+\frac{N^m}{m!}\frac{\partial^m}{\partial x^m_{n+1}} f(x', N+x_{n+1}). \tag{7}$$

Теперь воспользовавшись следствием 2 из леммы 2 мы видим, что все остаточные члены в правой части (7) стремятся к нулю при $N\to\infty$. Переходя к пределу окончательно получим

$$f(x', x_{n+1})=\frac{(-1)^{m+1}}{m!}\int_{\mathbf{R}^n}\int_0^\infty f\left(y', \frac{x_{n+1}}{2}\right) y^m_{n+1}\frac{\partial^{m+1}}{\partial x^{m+1}_{n+1}} P\Big(x'-y', y_{n+1}+$$

$$+\frac{x_{n+1}}{2}\Big) dy_{n+1}\, dy' = \frac{(-1)^{m+1}}{m!}\int_0^\infty\int_{\mathbf{R}^n} f\left(y', \frac{x_{n+1}}{2}\right) y^m_{n+1}\frac{\partial^{m+1}}{\partial x^{m+1}_{n+1}} P\Big(x'-y',$$

$$y_{n+1}+\frac{x_{n+1}}{2}\Big) dy'\, dy_{n+1} = \frac{(-1)^{m+1}}{m!}\int_0^\infty\int_{\mathbf{R}^n} f\left(y', \frac{y_{n+1}}{2}\right) y^m_{n+1}\frac{\partial^{m+1}}{\partial x^{m+1}_{n+1}}\times$$

$$\times P\left(x'-y', \frac{y_{n+1}}{2}+x_{n+1}\right) dy'\, dy_{n+1} = \frac{(-2)^{m+1}}{m!}\int\int_{\mathbf{R}^{n+1}_+} f(y', y_{n+1})\, y^m_{n+1}\times$$

$$\times\frac{\partial^{m+1}}{\partial x^{m+1}_{n+1}} P(x'-y', y_{n+1}+x_{n+1})\, dy'\, dy_{n+1}.$$

Теорема доказана.

Обозначим через $L^p_\alpha = L^p_\alpha(\mathbf{R}^{n+1}_+)$, $0 < p < \infty$, $\alpha > -1$, класс всех вещественных измеримых функций в $\mathbf{R}^{n+1}_+$, для которых конечна величина

$$\|g\|^p_{p,\alpha} = \int\limits_{\mathbf{R}^{n+1}_+} |g(x', x_{n+1})|^p x^\alpha_{n+1}\, dx'\, dx_{n+1}.$$

Ясно, что $A^p_\alpha \subset L^p_\alpha$.

Из рассуждений, приведенных в начале доказательства теоремы 1 следует, что интеграл в правой части (6) имеет смысл и для функций класса L^p_α, если $p \geqslant 1$ и выполнено условие (5). Если же $0 < p < 1$, то этот интеграл может вообще не иметь смысла.

Далее ясно, что функция

$$T_m g(x) = \int\limits_{\mathbf{R}^{n+1}_+} g(y)\, Q^{(m)}(x, y)\, y^m_{n+1}\, dy \tag{8}$$

гармонична в $\mathbf{R}^{n+1}_+$. В следующей теореме описывается точный класс функций, куда действует оператор T_m.

Теорема 2. *Пусть* $1 \leqslant p < \infty$, $\alpha > -1$ *и* m *—целое неотрицательное число, удовлетворяющее условию* $m > \dfrac{1+\alpha}{p} - 1$. *Тогда оператор* T_m *является непрерывным проектором из* L^p_α *в* A^p_α.

Доказательство. Заметим, что если α—целое, то при $p = 1$ необходимо взять $m \geqslant \alpha + 1$, а при $p > 1$ можно взять и $m = \alpha$.

Пусть сначала $p = 1$ и $g \in L^1_\alpha$, $m > \alpha$. Обозначим $f = T_m g$. Тогда имеем

$$\int\limits_{\mathbf{R}^{n+1}_+} |f(x', x_{n+1})|\, x^\alpha_{n+1}\, dx'\, dx_{n+1} \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\mathbf{R}^{n+1}_+} x^\alpha_{n+1}\, dx'\, dx_{n+1} \int\limits_{\mathbf{R}^{n+1}_+} |g(y)|\, |Q^{(m)}(x, y)|\, y^m_{n+1}\, dy'\, dy_{n+1} =$$

$$= \int\limits_{\mathbf{R}^{n+1}_+} |g(y)|\, y^m_{n+1}\, dy'\, dy_{n+1} \int\limits_{\mathbf{R}^{n+1}_+} |Q^{(m)}(x, y)|\, x^\alpha_{n+1}\, dx'\, dx_{n+1}. \tag{9}$$

Но из оценок леммы 3 получаем

$$\int\limits_{\mathbf{R}^n} |Q^{(m)}(x, y)|\, dx' \leqslant C(x_{n+1} + y_{n+1})^{-m-1}$$

и

$$\iint\limits_{\mathbf{R}^{n+1}_+} |Q^{(m)}(x, y)|\, x^\alpha_{n+1}\, dx'\, dx_{n+1} \leqslant$$

$$\leqslant C \int_0^\infty \frac{x_{n+1}^\alpha}{(x_{n+1}+y_{n+1})^{m+1}}\, dx_{n+1} = C\, y_{n+1}^{\alpha-m}. \tag{10}$$

Подставив (10) в (9) получим требуемое неравенство.

Случай $1 < p < \infty$ основан на одной лемме Ф. Форелли и У. Рудина (см. [7]).

Лемма 4. *Пусть μ — некоторая положительная мера, заданная на некоторой σ-алгебре подмножеств множества X. Предположим, что функция $K: X \times X \to [0, \infty)$ измерима, $1 < p < \infty$, $p' = p/(p-1)$, и пусть существует измеримая функция $g: X \to [0, \infty)$ и постоянные a и b такие, что*

$$\int_X K(x, y)\, g(y)^{p'}\, d\mu(y) \leqslant (a\, g(x))^{p'} \qquad (x \in X)$$

$$\int_X K(x, y)\, g(x)^{p}\, d\mu(x) \leqslant (b\, g(y))^{p}. \qquad (y \in X).$$

Тогда равенство $Tf(x) = \int_X K(x, y)\, f(y)\, d\mu(y)$ определяет непрерывный оператор в $L^p(d\mu)$ с $\|T\| \leqslant a\, b$.

Воспользуемся этой леммой с $X = \mathbf{R}_+^{n+1}$, $d\mu(x) = x_{n+1}^\alpha\, dx$, $K(x, y) = |Q^{(m)}(x, y)|\, y_{n+1}^{m-\alpha}$ и $g(x) = x_{n+1}^\delta$, где δ—достаточно малое положительное число. Тогда доказательство второй части теоремы сведется к установлению неравенства типа

$$\int_{\mathbf{R}_+^{n+1}} |Q^{(m)}(x, y)|\, y_{n+1}^{m+p\delta}\, dy \leqslant C\, x_{n+1}^{p\delta}.$$

Это же неравенство мы уже доказали при выводе выше неравенства (10). Доказательство теоремы завершено.

§ 2. Гармонические векторные поля класса A_α^p

Пусть вектор-функция $F(x) = (f_1(x), \cdots, f_n(x), f_{n+1}(x))$ задана в $\mathbf{R}_+^{n+1}$ и все ее компоненты принадлежат классу C^1. Мы называем F гармоническим векторным полем (или системой М. Рисса), если удовлетворяется система уравнений Коши-Римана

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n+1} \dfrac{\partial f_j}{\partial x_j} = 0, \\ \dfrac{\partial f_j}{\partial x_k} = \dfrac{\partial f_k}{\partial x_j}, \quad 1 \leqslant j,\ k \leqslant n+1. \end{cases} \tag{11}$$

Это название оправдывается тем, что из условия (11) следует существование некоторой гармонической функции H в $\mathbf{R}_+^{n+1}$ такой, что $F = \nabla H$ (см., напр., [12]). Отсюда в частности следует, что все компоненты f_j—гармонические функции.

Система функций

$$P_j(x) = c_n \frac{x_j}{(|x'|^2 + x_{n+1}^2)^{\frac{n+1}{2}}}, \quad 1 \leqslant j \leqslant n+1,$$

где $P_{n+1} \equiv P$, образует гармоническое векторное поле (см. [11], § 4 главы 3. Это очень легко проверить и непосредственным вычислением). Кроме того функции P_j, $1 \leqslant j \leqslant n$ связаны с ядром Пуассона преобразованиями М. Рисса [11]). Это обстоятельство дало возможность И. Стейну и Г. Вейсу распространить теорию пространств Харди H^p на гармонические векторные поля в $\mathbf{R}_+^{n+1}$ ([11, 12]).

По аналогии с этим мы введем систему ядер $Q_j^{(m)}$, которые в совокупности с введенным ранее ядром $Q^{(m)}$ составляют систему Рисса. При помощи этих ядер окажется возможным построить теорию пространств A_α^p гармонических векторых полей в полупространстве.

Мы говорим, что гармоническое векторное поле $F = (f_1, \cdots, f_{n+1})$ принадлежит классу A_α^p, если

$$\|F\|_{p,\alpha}^p = \int_{\mathbf{R}_+^{n+1}} |F(x)|^p x_{n+1}^\alpha \, dx = \int_{\mathbf{R}_+^{n+1}} \left(\sum_{j=1}^{n+1} |f_j(x)|^2\right)^{p/2} x_{n+1}^\alpha \, dx < \infty. \tag{12}$$

Обозначим (m-целое, $m \geqslant 0$)

$$Q_j^{(m)}(x, y) = \frac{(-2)^{m+1}}{m!} \frac{\partial^{m+1}}{\partial x_{n+1}^{m+1}} P_j(x' - y', x_{n+1} + y_{n+1}), \ 1 \leqslant j \leqslant n. \tag{13}$$

Ясно, что вектор-функция $Q_m(x, y) = (Q_1^{(m)}, \cdots, Q_n^{(m)}, Q^{(m)})$ является системой Рисса по переменной x.

Так как производные ядер P_j, $1 \leqslant j \leqslant n$, имеют существенно тот же вид, что и производные ядра Пуассона P и удовлетворяют одинаковым с ним оценкам, то по аналогии с леммой 3 мы немедленно получим следующий результат.

Лемма 5. *Для ядер $Q_j^{(m)}$ справедливы оценки* ($1 \leqslant j \leqslant n$)

$$|Q_j^{(m)}(x, y)| \leqslant C(|x' - y'|^2 + (x_{n+1} + y_{n+1})^2)^{-\frac{n+1+m}{2}}. \tag{14}$$

Пусть теперь задана некоторая функция $f \in A_\alpha^p$, $0 < p < \infty$, $\alpha > -1$. Определим еще n функций по формулам

$$f_j(x', x_{n+1}) = \int_{\mathbf{R}^n} f\left(y', \frac{x_{n+1}}{2}\right) P_j\left(x' - y', \frac{x_{n+1}}{2}\right) dy', \ 1 \leqslant j \leqslant n. \tag{15}$$

Замечая, что функции f_j со всеми своими производными стремятся к нулю достаточно быстро при $x_{n+1} \to \infty$, мы, поступая так же, как при доказательстве теоремы 1, получим следующие формулы для выражения этих функций через ядра

$$f_j(x)=\int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}} f(y',\ y_{n+1})\, y_{n+1}^m\, Q_j^{(m)}(x,\ y)\, dy'\, dy_{n+1},\quad 1\leqslant j\leqslant n, \tag{16}$$

где m удовлетворяет условиям (5) из теоремы 1.

Полученная таким образом вектор-функция $F=(f_1,\cdots,f_n,f)$ является, очевидно, системой Рисса.

Верно и обратное: если $F=(f_1,\cdots,f_n,f)$ есть гармоническое векторное поле, то все f_j, $1\leqslant j\leqslant n$, связаны с f преобразованиями М. Рисса в любом подполупространстве $x_{n+1}>c>0$ и, следовательно, выражаются формулами (15) (см. [11], гл. 3, теорема 3).

Нашей основной целью является доказательство того, что «оператор гармонического сопряжения», задаваемый формулами (16), непрерывен в A_α^p.

Для этого нам потребуются некоторые дополнительные факты. Первый из них — известное разложение Уитни. Мы сформулируем его применительно к нашему случаю.

Лемма 6. *В $\mathbb{R}_+^{n+1}$ существует набор замкнутых кубов $\{\Delta_k\}_1^\infty$, со сторонами, параллельными координатным осям, такой, что*

1) $\bigcup\limits_k \Delta_k=\mathbb{R}_+^{n+1}$;

2) *Внутренности всех Δ_k попарно не пересекаются;*

3) $\operatorname{diam}\Delta_k\leqslant\operatorname{dist}(\Delta_k,\ C\,\mathbb{R}_+^{n+1})\leqslant 4\operatorname{diam}\Delta_k$;

4) *Если Δ_k^*—куб с тем же центром, что и Δ_k, растянутый в 5/4 раза, то система $\{\Delta_k^*\}_1^\infty$ образует конечное покрытие $\mathbb{R}_+^{n+1}$. Точнее, любой куб Δ_k^* пересекается с не более чем 12^{n+1} кубами Δ_k.*

Для доказательства см. [11], теорема 1 и предложения 1—3 главы 6. Заметим только, что в нашем случае это разбиение можно построить явно.

Лемма 7. *Пусть Δ_k—некоторый куб из предыдущей леммы. Тогда, если f гармонична в $\mathbb{R}_+^{n+1}$ и $x^{(k)}$—центр куба Δ_k, то для всех p и α, $0<p<\infty$, $\alpha>-1$,*

$$\max_{x\in\Delta_k}|f(x)|^p\,(x_{n+1}^{(k)})^\alpha<\frac{C}{|\Delta_k^*|}\int\limits_{\Delta_k^*}|f(y)|^p\, y_{n+1}^\alpha\, dy, \tag{17}$$

где $x_{n+1}^{(k)}$—$(n+1)$-я координата точки $x^{(k)}$.

Доказательство. Пусть максимум достигается в некоторой точке $x\in\Delta_k$, и пусть $B(x)$—наибольший шар с центром в точке x, содержащийся в Δ_k^*. Тогда по лемме 1

$$|f(x)|^p\leqslant\frac{C}{|B(x)|}\int\limits_{B(x)}|f(y)|^p\, dy.$$

Но в силу условия 3) леммы 6, если $y \in B(x)$, то $y_{n+1} \asymp x_{n+1}^{(k)}$. Следовательно, учитывая, что $|B(x)| \asymp |\Delta_k| \asymp |\Delta_k^*|$, получаем утверждение леммы.

Теперь мы в состоянии доказать нашу основную теорему.

Теорема 3. *Пусть* $f \in A_\alpha^p$, $0 < p < \infty$, $\alpha > -1$. *Тогда, если* f_j, $1 \leqslant j \leqslant n$, *ее гармонически сопряженные функции в смысле уравнений* (11) *Коши-Римана, то все они принадлежат тому же классу* A_α^p *и*

$$\|f_j\|_{p,\alpha} \leqslant C\|f\|_{p,\alpha}. \tag{18}$$

Доказательство. Случай $1 \leqslant p < \infty$ фактически следует из теоремы 2. Действительно, достаточно только вместо леммы 3 применить лемму 5 и мы точно так же, как и при доказательстве теоремы 2, получим неравенство (18).

Обратимся поэтому к случаю $0 < p < 1$. Здесь мы применяем тот же метод, который позволил Ф. А. Шамояну доказать аналогичный результат для гармонических в круге функций ([13]).

Пусть j фиксировано, $1 \leqslant j \leqslant n$ и

$$f_j(x) = \int\limits_{R_+^{n+1}} f(y)\, Q_j^{(m)}(x, y)\, y_{n+1}^m\, dy. \tag{16}$$

Теперь применим разбиение R_+^{n+1} на кубы, описанное в лемме 6. Тогда, если учесть, что $0 < p < 1$, получим

$$\int\limits_{R_+^{n+1}} |f_j(x)|^p x_{n+1}^\alpha\, dx \leqslant \int\limits_{R_+^{n+1}} x_{n+1}^\alpha \left| \int\limits_{R_+^{n+1}} f(y)\, Q_j^{(m)}(x, y)\, y_{n+1}^m\, dy \right|^p dx =$$

$$= \int\limits_{R_+^{n+1}} x_{n+1}^\alpha \left| \sum_k \int\limits_{\Delta_k} f(y)\, Q_j^{(m)}(x, y)\, y_{n+1}^m\, dy \right|^p dx \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{R_+^{n+1}} x_{n+1}^\alpha \sum_k \left(\int\limits_{\Delta_k} |f(y)|\, |Q_j^{(m)}(x, y)|\, y_{n+1}^m\, dy \right)^p dx \leqslant$$

$$\leqslant C \int\limits_{R_+^{n+1}} x_{n+1}^\alpha \left\{ \sum_k (y_{n+1}^k)^{mp}\, |Q_j^{(m)}(x, y^{(k)})|^p \max_{\Delta_k} |f(y)|^p |\Delta_k|^p \right\} dx =$$

$$= C \sum_k \max_{\Delta_k} |f(y)|^p |\Delta_k|^p (y_{n+1}^{(k)})^{mp} \int\limits_{R_+^{n+1}} |Q_j^{(m)}(x, y^{(k)})|^p x_{n+1}^\alpha\, dx. \tag{19}$$

Здесь, как и ранее, $y^{(k)}$—центр куба Δ_k и $y_{n+1}^{(k)}$—его $(n+1)$-я координата. Далее, если выбрать m настолько большим, чтобы $(n+1+m)\, p > n+1$, получим, воспользовавшись оценками леммы 5,

$$\int_0^\infty \int_{\mathrm{R}^n} |Q_j^{(m)}(x,\ y^{(k)})|^p\, x_{n+1}^\alpha\, dx'\, dx_{n+1} \leqslant$$

$$\leqslant C \int_0^\infty x_{n+1}^\alpha\, dx_{n+1} \int_{\mathrm{R}^n} \frac{dx'}{\left(|x'-y^{(k)}|^2 + (x_{n+1}+y_{n+1}^{(k)})^2\right)^{\frac{n+1+m}{2}p}} \leqslant$$

$$\leqslant C \int_0^\infty \frac{x_{n+1}^\alpha\, dx_{n+1}}{(x_{n+1}+y_{n+1}^{(k)})^{(n+1+m)\,p-n}} = C\,(y_{n+1}^{(k)})^{\alpha-mp+(n+1)(1-p)}.$$

Поэтому можно продолжить неравенство (19) и, учитывая что $|\Delta_k| \asymp (y_{n+1}^{(k)})^{n+1}$, получить в силу леммы 7

$$\|f\|_{p,\alpha}^p \leqslant C \sum_k \max_{\Delta_k} |f(y)|^p\, |\Delta_k|^p\, (y_{n+1}^{(k)})^{\alpha+(n+1)(1-p)} =$$

$$= C \sum_k \max_{\Delta_k} |f(y)|^p (y_{n+1}^{(k)})^\alpha\, |\Delta_k| \leqslant$$

$$\leqslant C \sum \int_{\Delta_k^*} |f(y)|^p\, y_{n+1}^\alpha\, dy \leqslant C \int_{\mathrm{R}_+^{n+1}} |f(y)|^p\, y_{n+1}^\alpha\, dy.$$

Теорема доказана.

Заключительные замечания. Полученные результаты допускают обобщения в различных направлениях.

1) Можно рассматривать более общие пространства гармонических функций в R_+^{n+1} Например, пространства со смешанной нормой или пространства с более общими весами. В любом случае все наши результаты останутся в силе, если только гарантировать, что функции этих классов стремятся к нулю со всеми своими производными достаточно быстро при $x_{n+1} \to \infty$.

2) Можно вместо гармонических векторных полей рассматривать вектор-функции, удовлетворяющие так называемым обобщенным уравнениям Коши—Римана (см. [12], гл. 6). Если эта система эллиптическая, то она эквивалентна системе Коши—Римана и мы приходим к тем же результатам.

При изложении, однако, мы сознательно избегали этих обобщений, чтобы в излишней общности не потерять существа дела.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 3. III. 1986

Ա. Է. ՋՐԲԱՇՅԱՆ. Կիսատարածություններում հարմոնիկ ֆունկցիաների դասեր և Մ. Ռիսի թեորեմի անալոգը *(ամփոփում)*

Հոդվածում դիտարկվում են կիսատարածություններում հարմոնիկ ֆունկցիաների դասեր, որոնք ինտեգրելի են ըստ Լեբեգի չափի. $f \in A_\alpha^p$, $0<p<\infty$, $-1<\alpha<\infty$, *եթե*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}_{+}} |f(x_1,\cdots, x_n, x_{n+1})|^p x^{\alpha}_{n+1}\, dm_{n+1}(x) < \infty.$$

Այդպիսի ֆունկցիաների համար, որոնք ընդհանրապես ասած չունեն եզրային արժեքներ, գտնվում է ինտեգրալ ներկայացում։ Ապացուցվում է, որ այդ ներկայացման հետ կապված ինտեգրալ պրոյեկտորը սահմանափակ է կշռային L^p-ից A^p_α, երբ $1\leqslant p<\infty$։

Հարմոնիկ ֆունկցիաների համակարգերի համար ապացուցվում է հարմոնիկ համալուծ ֆունկցիաների վերաբերյալ Մ. Ռիսսի թեորեմի անալոգը. երբ $f\in A^p_\alpha$ ապա նրա հարմոնիկ համալուծ $f_1, \ldots, f_n$ ֆունկցիաները նույնպես պատկանում են այդ դասին և

$$\|f_j\|_{A^p_\alpha} \leqslant C\|f\|_{A^p_\alpha},\ 1\leqslant j\leqslant n.$$

Ի տարբերություն կլասիկ դեպքի, այս անհավասարությունը ճիշտ է p-ի բոլոր արժեքների համար, $0<p<\infty$։

A. E. DJRBASHIAN. *A^p_α classes of harmonic functions in half-spaces and an analog of M. Riesz theorem* (summary)

We consider classes of harmonic functions in half-spaces which are integrable with respect to the Lebesgue measure; $f\in A^p_\alpha$, $0<p<\infty$, $-1<\alpha<\infty$ if

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}_{+}} |f(x_1,\cdots, x_n, x_{n+1})|^p x^{\alpha}_{n+1}\, dm_{n+1}(x) < \infty.$$

For these functions, which in general have no boundary values, we find an integral repesentation formula. We prove also that the integral operator connected with this representation is a bounded projection from weghted L^p to A^p_α for $1<p<\infty$.

For systems of functions in A^p_α we prove an analog of M. Riesz theorem on conjugate harmonic functions; if $f\in A^p_\alpha$, then all its conjugate harmonic functions $f_1, \ldots, f_n$ belong to the same class and

$$\|f_j\|_{A^p_\alpha} \leqslant C\|f\|_{A^p_\alpha}\ \ 1\leqslant j\leqslant n.$$

In contrast with the classical case this inequality holds for all values of p, $0<p<\infty$, $\alpha>-1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. М. Джрбашян.* О представимости некоторых классов мероморфных функций в единичном круге, ДАН АрмССР, 1945, 3, № 1, 3—9.
2. *М. М. Джрбашян.* К проблеме представимости аналитических функций, Сообщ. Ин-та матем. и мех. АН АрмССР, 1948, вып. 2, 3—40.
3. *С. В. Шведенко.* Классы Харди и связанные с ними пространства аналитических функций в единичном круге, поликруге и шаре, Итоги науки и техники, Мат. анализ, 1985, т. 23, 3—124.
4. *С. Г. Гиндикин.* Анализ в однородных областях, УМН, 1964, 19, № 4, 3—92.
5. *R. R. Coifman R. Rochberg* Representation theorems for holomorphic functions in L^p, Asterisque, 1980, v. 77, 11—66.
6. *Г. М. Хенкин.* Метод интегральных представлений в комплексном анализе, Итоги науки и техники, Современные проблемы математики, фундаментальные направления, 1985, т. 7, 23—124.
7. *У. Рудин.* Теория функций в единичном шаре из C^n, М., «Мир», 1984.

8. *А. Э. Джрбашян.* Интегральные представления и непрерывные проекторы в некоторых пространствах гармонических функций, Мат. сб., 1983, 121 (163), № 2 (6), 259—271.

9. *F. Ricci, M. Taibleson.* Boundary values of harmonic functions in mixed norm spaces and their atomic structure, Annali Scuola Nor. Superiore—Pisa, 1983, Serie 6, v. 10, № 1, 1—54.

10. *C. Fefferman., E. M. Stein.* H^p spaces of several variables, Acta Math., 1972, v. 129, 137—193.

11. *И. Стейн.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций, М., «Мир», 1973.

12. *И. Стейн, Г. Вейс.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах, М., «Мир», 1974.

13. *Ф. А. Шамоян.* Приложения интегральных представлений Джрбашяна к некоторым задачам анализа, ДАН СССР, 1981, 261, № 3, 557—562.