ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XXII, № 4, 1987 Математика

УДК 517.53

И. В. ОСТРОВСКИЙ

ОБ ОДНОМ ВОПРОСЕ М. М. ДЖРБАШЯНА

В работе [1] было получено новое интегральное представление для функций $E_\rho(z, \mu)$, $\rho > 1$, $-\infty < \mu < \infty$. Это представление имеет вид

$$E_\rho(z, \mu) = \int_0^\infty e^{z\tau} \Phi_{\rho, \mu}(\tau)\, d\tau,$$

где $\Phi_{\rho, \mu}$—целая функция, определяемая абсолютно сходящимся при всех $s \in \mathbf{C}$ интегралом

$$\Phi_{\rho, \mu}(s) = \frac{\rho}{2\pi i} \int_{\gamma(\varepsilon, \beta)} \exp\{\zeta^\rho - s\zeta\}\, \zeta^{\rho(1-\mu)}\, d\zeta, \tag{1}$$

взятым по контуру $\gamma(\varepsilon, \beta)$, состоящему из двух лучей $L^\pm(\varepsilon, \beta) = \{\zeta : |\zeta| \geqslant \varepsilon, \arg\zeta = \pm\beta\}$ и дуги окружности $l(\varepsilon, \beta) = \{\zeta : |\zeta| = \varepsilon, |\arg\zeta| < \beta\}$, $0 < \varepsilon < \infty$, $\pi/(2\rho) < \beta \leqslant \pi/\rho$; направление обхода таково, что точка $\zeta = 0$ остается слева.

В [1] был установлен весьма тонкий факт: функция $\Phi_{\rho, \mu}$ неотрицательна на всем положительном луче тогда и только тогда, когда $\mu \geqslant 1/\rho$. Кроме того, в [1] был найден ряд других существенных свойств этой функции. Нас сейчас будут интересовать только свойства, относящиеся к асимптотическому поведению $\Phi_{\rho, \mu}$ при $|s| \to \infty$. Эти свойства могут быть подытожены в виде такой теоремы:

Теорема [1]. *Функция $\Phi_{\rho, \mu}$ является целой функцией порядка λ и типа σ, где*

$$\lambda = \rho/(\rho - 1), \quad \sigma = (1 - \rho^{-1})\,(1/\rho)^{1/(\rho-1)}, \tag{2}$$

а ее индикатор $h(\vartheta)$ удовлетворяет неравенству

$$h(0) \leqslant -\sigma \cos(\pi/(2\rho)). \tag{3}$$

В [1] на с. 494 отмечено: «...остается открытым вопрос о точности установленного нами неравенства (3), а также вопрос о выявлении явного вида функции $h(\vartheta)$ и тех точек отрезка $[-\pi, \pi]$, где достигается равенство в неравенстве $h(\vartheta) \leqslant \sigma$». Настоящая статья посвящена ответам на эти вопросы.

Теорема. *Если выполнено одно из условий* а) $1 < \lambda \leqslant 3/2$, б) $\lambda = 2$, *а* $2(1-\mu)$ *является неотрицательным целым числом, то*

$$h(\vartheta) = -\sigma \cos \lambda\vartheta, \quad |\vartheta| \leqslant \pi.$$

В остальных случаях

$$h(\vartheta)=\begin{cases}-\sigma\cos\lambda\vartheta, & |\vartheta|\leqslant 3\pi/(2\lambda),\\ 0, & 3\pi/(2\lambda)\leqslant|\vartheta|\leqslant\pi.\end{cases}$$

Таким образом, $h(0)=-\sigma$, а равенство в неравенстве $h(\vartheta)\leqslant\sigma$ достигается только в двух точках $\vartheta=\pm\pi/\lambda$.

Доказательство теоремы разобьем на ряд лемм.

Лемма 1. *Справедливо равенство*

$$h(0)=-\sigma. \tag{4}$$

Доказательство. Легко видеть, что при $s>0$ представление (1) сохраняет силу и при $\beta=\pi/(2\rho)$. Положив в (1) $\beta=\pi/(2\rho)$, $\varepsilon=(1/\rho)^{1/(\rho-1)}s^{1/(\rho-1)}$, будем иметь

$$\Phi_{\rho,\mu}(s)=\frac{\rho}{2\pi i}\left\{\int\limits_{L^+(\varepsilon,\beta)}+\int\limits_{L^-(\varepsilon,\beta)}+\int\limits_{l(\varepsilon,\beta)}\right\}=\frac{\rho}{2\pi i}\{I_1+I_2+I_3\}. \tag{5}$$

Очевидно

$$|I_1|+|I_2|\leqslant 2\int\limits_{\varepsilon}^{\infty}\exp\{-st\cos(\pi/(2\rho))\}\,t^{\rho(1-\mu)}\,dt.$$

Отсюда следует, что, каково бы ни было $\delta\in(0,\cos(\pi/(2\rho))$, при достаточно больших s имеем

$$|I_1|+|I_2|\leqslant 2\int\limits_{\varepsilon}^{\infty}\exp\{-st(\cos(\pi/(2\rho))-\delta)\}\,dt=$$

$$=2(\cos(\pi/(2\rho))-\delta)^{-1}\exp\{-s^{\lambda}(1/\rho)^{1/(\rho-1)}(\cos(\pi/(2\rho))-\delta)\}. \tag{6}$$

Далее

$$|I_3|\leqslant\int\limits_{-\pi/(2\rho)}^{\pi/(2\rho)}\exp\{\varepsilon^{\rho}\cos\rho\varphi-s\varepsilon\cos\varphi\}\,\varepsilon^{\rho(1-\mu)}\,d\varphi=$$

$$=\varepsilon^{\rho(1-\mu)}\int\limits_{-\pi/(2\rho)}^{\pi/(2\rho)}\exp\left\{s^{\lambda}(1/\rho)^{1/(\rho-1)}\left(\frac{1}{\rho}\cos\rho\varphi-\cos\varphi\right)\right\}d\varphi.$$

Функция $(1/\rho)\cos\rho\varphi-\cos\varphi$ убывает на $[0,\pi/(2\rho)]$, поэтому ее максимум на $[-\pi/(2\rho),\pi/(2\rho)]$ достигается при $\varphi=0$ и равен $\rho^{-1}-1$. Учитывая (2), получаем

$$|I_3|\leqslant(1/\rho)^{\rho(1-\mu)/(\rho-1)}\,s^{\rho(1-\mu)/(\rho-1)}(\pi/\rho)\exp\{-\sigma s^{\lambda}\}. \tag{7}$$

Заметим, что $\cos(\pi/(2\rho))>1-\rho^{-1}$. Поэтому число δ можно выбрать столь малым, что $(1/\rho)^{1/(\rho-1)}(\cos(\pi/(2\rho))-\delta)>\sigma$. В силу этого из (6), (7) и (5) следует, что $h(0)\leqslant-\sigma$. Если бы было $h(0)<-\sigma$, то из известного свойства индикатора ([2], с. 84, з))

$$h(\vartheta)+h(\vartheta+\pi/\lambda)\geqslant 0 \tag{8}$$

вытекало бы, что $h(\pi/\lambda)>\sigma$, а это невозможно.

Лемма 2. *Справедливо равенство*

$$h(\vartheta) = -\sigma \cos \lambda \vartheta, \ |\vartheta| \leqslant \pi/\lambda. \tag{9}$$

Доказательство. Из (4) и (8) следует, что точка $\vartheta = 0$ является точкой минимума для h. В силу свойства индикатора ([2], с. 78, е)) отсюда следует, что $h(\vartheta) \geqslant -\sigma \cos \lambda \vartheta$, $|\vartheta| \leqslant \pi/\lambda$. Функция $h_1(\vartheta) := h(\vartheta) + \sigma \cos \lambda \vartheta$ неотрицательна на отрезке $[-\pi/\lambda, \pi/\lambda]$ и обращается в нуль в точках $\pm \pi/\lambda$ и 0. Обозначим через $\vartheta_0 \in (0, \pi/\lambda)$ точку, где $h_1(\vartheta_0) = \max\limits_{[0, \pi/\lambda]} h_1(\vartheta)$, и предположим, что $h_1(\vartheta_0) > 0$. Так как функция $h_1(\vartheta)$ является λ-тригонометрически выпуклой, то в силу уже упоминавшегося факта ([2], с. 78, е)) имеем

$$h_1(\vartheta) \geqslant h_1(\vartheta_0) \cos \lambda (\vartheta - \vartheta_0), \ |\vartheta - \vartheta_0| \leqslant \pi/\lambda. \tag{10}$$

Так как $\vartheta_0 \in [0, \pi/\lambda)$, то (10) имеет место при $\vartheta = 0$ и $\vartheta = \pi/\lambda$. Поэтому из (10) следует, что $\cos \lambda \vartheta_0 \leqslant 0$ и $\cos(\pi/\lambda - \vartheta_0) \leqslant 0$, т. е. $\cos \lambda \vartheta_0 = 0$, $\vartheta_0 = \pi/(2\lambda)$. Таким образом, $h_1(\vartheta) \geqslant h_1(\vartheta_0) \sin \lambda \vartheta$ и $h(\vartheta) \geqslant h_1(\vartheta_0) \sin \lambda \vartheta - \sigma \cos \lambda \vartheta$ при $\vartheta \in [0, \pi/\lambda]$. Отсюда вытекает, что $\max\limits_{[0, \pi/\lambda]} h(\vartheta) \geqslant \sqrt{h_1^2(\vartheta_0) + \sigma^2} > \sigma$, что невозможно.

Лемма 3. *Если* $1 < \lambda < 3/2$, *то справедливо равенство*

$$h(\vartheta) = -\sigma \cos \lambda \vartheta, \ |\vartheta| \leqslant \pi. \tag{11}$$

Доказательство. Положим

$$g(z) = \int_1^{\infty} \exp\{-t^{\rho} + zt\} \, t^{\rho(1-\mu)} \, dt.$$

В силу известных фактов (можно, например, воспользоваться теоремой 2.4.4 из [3], с. 54) функция g — целая порядка λ и типа σ, где λ и σ определены (2). Обозначим через $H(\vartheta)$ индикатор функции g. Покажем, что при условии $1 < \lambda \leqslant 3/2$ (которое эквивалентно $\rho \geqslant 3$) справедлива формула

$$H(\vartheta) = \begin{cases} \sigma \cos \lambda \vartheta, & |\vartheta| \leqslant \pi/(2\lambda), \quad (12') \\ 0, & \pi/(2\lambda) \leqslant |\vartheta| \leqslant \pi. \quad (12'') \end{cases}$$

Сначала отметим такие свойства функции H:

$$H(\vartheta) = 0, \ \pi/2 \leqslant |\vartheta| \leqslant \pi, \tag{13}$$

$$H(\vartheta) \geqslant \sigma \cos \lambda \vartheta, \ |\vartheta| \leqslant \pi/\lambda. \tag{14}$$

Первое следует из ограниченности функции g в полуплоскости $\operatorname{Re} z \leqslant 0$ и хорошо известных фактов об ограниченных аналитических функциях (см., напр., [2], с. 315). Второе вытекает из очевидного равенства $H(0) = \max\limits_{[-\pi, \pi]} H(\vartheta) = \sigma$ и уже использовавшегося свойства индикаторов ([2], с. 78, е)). Заметим также, что функция H является четной и 2π-периодической.

Равенство (1) при $\varepsilon=1$, $\beta=\pi/\rho$ можно записать в виде

$$\Phi_{\rho,\mu}(s)=\frac{\rho}{2\pi i}\{e^{i\pi(1-\mu)}g(-se^{i\pi/\rho})-e^{-i\pi(1-\mu)}g(-se^{-i\pi/\rho})+g_1(s)\},$$

где

$$g_1(s)=\int\limits_{l(1,\pi/\rho)}\exp\{\zeta^\rho-s\zeta\}\zeta^{\rho(1-\mu)}d\zeta=O(e^{|s|}),\ |s|\to\infty.$$

Используя связь между индикатором суммы целых функций и индикаторами слагаемых ([2], с. 73), видим, что справедливо неравенство

$$h(\vartheta)\leqslant\max\{H(\vartheta-\pi+\pi/\rho),\ H(\vartheta+\pi-\pi/\rho),\ 0\},\tag{15}$$

которое обращается в равенство всюду, где одна из трех величин, стоящих в фигурных скобках, строго больше двух остальных. Учитывая, что $\pi-\pi/\rho=\pi/\lambda$, перепишем (15) в виде

$$h(\vartheta)\leqslant\max\{H(\vartheta-\pi/\lambda),\ H(\vartheta+\pi/\lambda),\ 0\}.\tag{16}$$

Положим $\vartheta=\pi/(2\lambda)$. В силу (9), (14) и (13) соответственно имеем $h(\pi/(2\lambda))=0$, $H(-\pi/(2\lambda))\geqslant 0$, $H(3\pi/(2\lambda))=0$ (последнее вытекает из (13), так как $3\pi/(2\lambda)\in[\pi,3\pi/2]$). Если бы было $H(-\pi/(2\lambda))>0$, то (16) обращалось бы в равенство, откуда следовало бы, что $h(\pi/(2\lambda))>0$, поэтому заключаем, что $H(-\pi/(2\lambda))=0$. Таким образом, функция H совпадает с тригонометрической функцией $\sigma\cos\lambda\vartheta$ на концах отрезка $[-\pi/(2\lambda),0]$. В силу свойства индикатора ([2], с. 74, лемма 6), тогда на всем отрезке должно выполняться $H(\vartheta)\leqslant\sigma\cos\lambda\vartheta$. Учитывая (14), заключаем, что справедливо (12′).

Остается еще доказать, что $H(\vartheta)=0$ при $\pi/(2\lambda)<|\vartheta|<\pi/2$. Для этого заметим, что так как $\lambda\leqslant 3/2$, то длина отрезка $[\pi/(2\lambda),\pi/2]$ строго меньше π/λ. На концах этого отрезка имеем $H(\vartheta)=0$, поэтому из свойства индикатора ([2], с. 74, лемма 6) следует, что $H(\vartheta)\leqslant 0$ на всем отрезке. Из того же свойства и (13) заключаем, что ни в одной точке отрезка неравенство не может оказаться строгим. Тем самым (12′)—(12″) доказаны.

Из (12′) — (12″) видно, что на интервале $(\pi/(2\lambda),\pi)$ имеем $H(\vartheta-\pi/\lambda)>H(\vartheta+\pi/\lambda)\geqslant 0$. Поэтому на указанном интервале в неравенстве (16) имеет место знак равенства и, следовательно, $h(\vartheta)=-\sigma\cos\lambda\vartheta$. Таким образом, (11) справедливо при $\pi/(2\lambda)\leqslant|\vartheta|\leqslant\pi$. Учитывая (9), убеждаемся в справедливости леммы.

Лемма 4. *Если* $\lambda>3/2$, *то*

$$h(\vartheta)\leqslant 0,\ 3\pi/(2\lambda)\leqslant|\vartheta|\leqslant\pi.\tag{17}$$

Доказательство. А) Рассмотрим сначала случай $3/2<\lambda\leqslant 3$. Фиксируем $\vartheta\in(3\pi/(2\lambda),\pi]$. Легко убедиться, что тогда $\cos(\vartheta\pm 3\pi/(2\rho))>0$ и, следовательно, при $\arg s=\vartheta$ имеем $\mathrm{Re}(s\exp(\pm 3\pi i/(2\rho))>0$. Поэтому представление (1) сохраняет силу и при $\beta=3\pi/(2\rho)$ (заметим, что из $\lambda\leqslant 3$ следует $\beta\leqslant\pi$). Таким образом, при $\arg s=\vartheta$ имеем

$$\Phi_{\rho,\mu}(s)=\frac{\rho}{2\pi i}\left\{\int\limits_{L^+(1,\,3\pi/(2\rho))}+\int\limits_{L^-(1,\,3\pi/(2\rho))}+\int\limits_{l(1,\,3\pi/(2\rho))}\right\}.$$

Очевидно

$$\left|\int\limits_{L^\pm(1,\,3\pi/(2\rho))}\right|=\left|\int\limits_1^\infty \exp\{-it^\rho-st\,e^{\pm 3\pi i/(2\rho)}\}t^{\rho(1-\mu)}\,dt\right|\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_1^\infty \exp\{-|s|\,t\cos(\vartheta\pm 3\pi/(2\rho))\}\,t^{\rho(1-\mu)}\,dt=o(1),\ |s|\to\infty,$$

$$\left|\int\limits_{l(1,\,3\pi/(2\rho)}\right|\leqslant(3\pi/\rho)\,e^{|s|}.$$

Отсюда следует, что $h(\vartheta)\leqslant 0$.

Б) Рассмотрим теперь случай $\lambda>3$. Снова фиксируем $\vartheta\in(3\pi/(2\lambda),\pi]$. Тогда $\cos(\vartheta+3\pi/(2\rho))>0$ (но, вообще говоря, не выполняется $\cos(\vartheta-3\pi/(2\rho))>0$) и, следовательно при $\arg s=\vartheta$ имеем $\operatorname{Re}(s\exp\times\times(3\pi i/(2\rho)))>0$. В рассматриваемом случае будет $\pi<3\pi/(2\rho)$, $-\pi<-2\pi+3\pi/(2\rho)<-\pi/(2\rho)$ и, как легко видеть, контур интегрирования $\gamma(\varepsilon,\beta)$ в (1) можно заменить контуром, состоящим из луча $L^-(1,\,2\pi-3\pi/(2\rho))$, дуги окружности $l=\{\zeta:|\zeta|=1,\ -2\pi+3\pi/(2\rho)\leqslant\leqslant\arg\zeta\leqslant 3\pi/(2\rho)\}$ и луча $L^+(1,\,3\pi/(2\rho))$ (лучи совпадают как множества, но проходятся в разных направлениях). Итак, имеем при $\arg s=\vartheta$

$$\Phi_{\rho,\mu}(s)=\frac{\rho}{2\pi i}\left\{\int\limits_{L^+(1,\,3\pi/(2\rho))}+\int\limits_{L^-(1,\,2\pi-3\pi/(2\rho))}+\int\limits_{l}\right\}=$$

$$=\frac{\rho}{2\pi i}\{I_1+I_2+I_3\}.$$

Справедливы оценки

$$\left|\int\limits_{L^+(1,\,3\pi/(2\rho))}\right|\leqslant\int\limits_1^\infty \exp\{-|s|\,t\cos(\vartheta+3\pi/(2\rho))\}\,t^{\rho(1-\mu)}\,dt=$$

$$=o(1),\ |s|\to\infty;$$

$$\left|\int\limits_{L^-(1,\,2\pi-3\pi/(2\rho))}\right|\leqslant\int\limits_1^\infty \exp\{-t^\rho\sin 2\pi\rho-|s|\,t\times$$

$$\times\cos(\vartheta+3\pi/(2\rho))\}\,t^{\rho(1-\mu)}\,dt=o(1),\ |s|\to\infty,$$

($\sin 2\pi\rho>0$, так как $1<\rho<3/2$);

$$\left|\int\limits_{l}\right|\leqslant 2\pi\,e^{|s|}.$$

Отсюда следует, что $h(\vartheta)\leqslant 0$.

Лемма 5. *Если $\lambda>3/2$, $\lambda\neq 2$, то*

$$h(\vartheta)=0,\ 3\pi/(2\lambda)\leqslant|\vartheta|\leqslant\pi. \tag{18}$$

Утверждение сохраняет силу и при $\lambda=2$, *если* $2(1-\mu)$ *не является целым числом.*

Доказательство. Предположим сначала дополнительно, что $\rho(1-\mu)>-1$. Заметим, что при $\lambda>3/2$ будет $\pi/2<\pi\rho/2<3\pi/2$, и можно записать представление (1) с $\varepsilon=0$, $\beta=\pi/2$. Получим

$$\Phi_{\rho,\mu}(s)=\frac{\rho}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{|t|^{\rho}e^{\frac{\pi i\rho}{2}\operatorname{sign}t}+\frac{\pi i\rho}{2}(1-\mu)\operatorname{sign}t-sti\right\}|t|^{\rho(1-\mu)}\,dt. \tag{19}$$

Отсюда видно, что функция $\Phi_{\rho,\mu}$ является преобразованием Фурье функции, которая может оказаться целой только в случае, когда $\rho=2$ (заметим, что у нас сейчас $1<\rho<3$ и, кроме того, $2(1-\mu)$ является целым числом. Относительно функции $\Phi_{\rho,\mu}$ мы уже знаем, что $h(0)<0$. Если бы, кроме этого, выполнялось также $h(\pi)<0$, то преобразование Фурье функции $\Phi_{\rho,\mu}$ должно было бы быть целой функцией. Поскольку это исключено, то мы приходим к выводу, что $h(\pi)\geqslant 0$. Учитывая (17) и свойства индикаторов, убеждаемся в справедливости (18).

Освободимся от дополнительного ограничения $\rho(1-\mu)>-1$. Из (1) легко следует, что при $n=1,2,3,\cdots$

$$(-d/ds)^n\,\Phi_{\rho,\mu}(s)=\Phi_{\rho,\nu}(s), \tag{20}$$

где ν определяется равенством $n+\rho(1-\mu)=\rho(1-\nu)$. Ясно, что при достаточно большом n будем иметь $\rho(1-\nu)>-1$. Как известно (см., напр., [4]), при дифференцировании целой функции ее индикатор не увеличивается. Так как для $\Phi_{\rho,\nu}$ равенство (18) уже доказано, а для индикатора $\Phi_{\rho,\mu}$, во всяком случае, верно неравенство (17), то лемма доказана.

Лемма 6. *Если* $\lambda>3/2$, $\lambda\neq 2$, *то*

$$h(\vartheta)=\begin{cases}-\sigma\cos\lambda\vartheta, & |\vartheta|\leqslant 3\pi/(2\lambda),\\ 0, & 3\pi/(2\lambda)\leqslant|\vartheta|\leqslant\pi.\end{cases} \tag{21}$$

Утверждение сохраняет силу и при $\lambda=2$, *если* $2(1-\mu)$ *не является целым числом.*

Доказательство. В силу лемм 1 и 5 нуждается в доказательстве только равенство (21) при $\pi/\lambda<|\vartheta|<3\pi/(2\lambda)$. Так как в точке $\vartheta=\pi/\lambda$ индикатор h достигает максимума, то в силу уже упоминавшегося свойства ([2], с. 78, е)) имеем $h(\vartheta)\geqslant-\sigma\cos\lambda\vartheta$ при $|\vartheta-\pi/\lambda|\leqslant\pi/\lambda$. С другой стороны, на концах отрезка $[\pi/\lambda,\ 3\pi/(2\lambda)]$ имеем, в силу лемм 1 и 5, $h(\vartheta)=-\sigma\cos\lambda\vartheta$ и поэтому ([2], с. 74, лемма 6) на всем отрезке $h(\vartheta)\leqslant-\sigma\cos\lambda\vartheta$. Тем самым требуемое равенство доказано.

Лемма 7. *Пусть* $\lambda=2$ *и число* $2(1-\mu)$ — *целое. Если* $2(1-\mu)\geqslant 0$, *то*

$$h(\vartheta)=-\frac{1}{4}\cos 2\vartheta,\ |\vartheta|\leqslant\pi. \tag{22}$$

Если же $2(1-\mu)<0$, *то*

$$h(\vartheta)=\begin{cases}-\frac{1}{4}\cos 2\vartheta, & |\vartheta|\leqslant 3\pi/4,\\ 0, & 3\pi/4\leqslant|\vartheta|\leqslant\pi.\end{cases}\tag{23}$$

Доказательсво. Пусть сначала $2(1-\mu)=0$, $\mu=1$. Тогда из (19) следует, что

$$\Phi_{2,1}(s)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\{-t^2-sti\}\,dt=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\exp(-s^2/4),$$

и справедливость (22) очевидна. Если $2(1-\mu)>0$, то в силу (20) имеем $\Phi_{2,\mu}=(-d/ds)^{2(1-\mu)}\Phi_{2,1}$, и (22) тоже выполняется.

Пусть теперь $2(1-\mu)=-1$, $\mu=3/2$. Тогда в силу (20) будет $\Phi_{2,1}=(-d/ds)\,\Phi_{2,3/2}$. Индикатор функции $\Phi_{2,3/2}$ в силу леммы 1 отрицателен при $\nu=0$. Поэтому при действительных s имеем

$$\Phi_{2,3/2}(s)=\int_s^{\infty}\Phi_{2,1}(\tau)\,d\tau=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_s^{\infty}\exp(-\tau^2/4)\,d\tau.$$

Отсюда видно, что индикатор функции $\Phi_{2,3/2}$ равен 0 при $\vartheta=\pi$, и с помощью свойств индикатора получаем (23). Если $2(1-\mu)=-2$, $\mu=2$, то из равенства $\Phi_{2,3/2}=(-d/ds)\,\Phi_{2,2}$ аналогичным образом заключаем, что $\Phi_{2,2}(s)=\int_s^{\infty}\Phi_{2,3/2}(\tau)\,d\tau$, и далее, что для индиктора функции $\Phi_{2,2}$ выполняется (23). Ясно, что справедливость (23) для любого целого отрицательного $2(1-\mu)$ получается по индукции.

Доказательство сформулированной нами теоремы тем самым закончено.

Физико-технический институт
низких температур АН УССР,
г. Харьков

Поступила 7. IV. 1987

Ի. Վ. ՕՍՏՐՈՎՍԿԻ. Մ. Մ. Ջրբաշյանի մի հարցի վերաբերյալ *(ամփոփում)*

Հետևյալ հարցը դրվել է Մ. Մ. Ջրբաշյանի կողմից՝ գտնել $\lambda=\rho/(\rho-1)$

և $\sigma=(1-\rho^{-1})(1/\rho)^{\frac{1}{\rho-1}}$ $\rho>1$ *տիպ ունեցող*

$$\Phi_{\rho,\mu}(s)=-\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\Gamma\left(1-\mu+\frac{k+1}{\rho}\right)\sin\pi\left(\frac{k+1}{\rho}-\mu\right)s^k,$$

$-\infty<\mu<+\infty$, *ամբողջ ֆունկցիայի* $h(\nu)$ *ինդիկատորը։*

Այդ ֆունկցիան նրա կողմից մտցվել է $E_\rho(z,\mu)$ *ֆունկցիաների ինտեգրալ ներկայացումների կապակցությամբ։*

Հոդվածում տրվում է հետևյալ պատասխանը՝

$$h(\nu)=-\sigma\cos\lambda\nu,\quad |\nu|\leqslant\pi,$$

եթե տեղի ունի հետևյալ պայմաններից որևէ մեկը

ա) $1<\lambda<3/2$ բ) $\lambda=2$, իսկ $2(1-\mu)$ հանդիսանում է ոչ բացասական ամբողջ թիվ։ Մյուս դեպքերում

$$h(\nu)=\begin{cases}-\sigma\cos\lambda\nu, & |\nu|\leqslant\dfrac{3\pi}{2\lambda}\\[2mm] 0, & \dfrac{3\pi}{2\lambda}\leqslant|\nu|\leqslant\pi.\end{cases}$$

I. V. OSTROVSKII. *On a problem of M. M. Dzhrbashyan* (summary)

M. M. Dzhrbashyan posed the problem of finding the indicator $h(\theta)$ of the entire function

$$\Phi_{\rho,\mu}(s)=-\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\Gamma\left(1-\mu+\frac{k+1}{\rho}\right)\sin\pi\left(\frac{k+1}{\rho}-\mu\right)s^k$$

of the order $\lambda=\rho/(\rho-1)$ and of the type $\sigma=(1-\rho^{-1})(1/\rho)^{1/(\rho-1)}$, $\rho>1$, $-\infty<\mu<\infty$. He introduced this function in connection with the integral representations of the functions $E_\rho(z,\mu)$. In the present paper the following answer to this problem is obtained:

If one of the following conditions is satesfied: a) $1<\lambda<3/2$, b) $\lambda=2$ and $2(1-\mu)$ is a non-negative integer, then:

$$h(\vartheta)=-\sigma\cos\lambda\vartheta,\quad |\vartheta|\leqslant\pi.$$

In the remaining cases

$$h(\vartheta)=\begin{cases}-\sigma\cos\lambda\vartheta, & |\vartheta|\leqslant 3\pi/(2\lambda),\\ 0, & 3\pi/(2\lambda)\leqslant|\vartheta|\leqslant\pi.\end{cases}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. М. Джрбашян, Р. А. Багиян.* Об интегральных представлениях и мерах, ассоциированных с функциями типа Миттаг—Леффлера, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», 10, № 6, 1975, 483—508.
2. *Б. Я. Левин.* Распределение корней целых функций, М., ГИТТЛ, 1956, 632 с.
3. *Ю. В. Линник, И. В. Островский.* Разложения случайных величин и векторов, М., «Наука», 1972, 480 с.
4. *А. А. Гольдберг, И. В. Островский.* О производных и первообразных целых функций вполне регулярного роста, Теория функций, функцион. анализ и их прил., 18, 1973, 70—81.