УДК 517.444

С. С. КАЗАРЯН

НЕРАВЕНСТВА В ПРОСТРАНСТВАХ ОРЛИЧА ДЛЯ ОДНОЙ МАКСИМАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

§ 1. Введение

В. Макенхаупт [1] для максимальной функции Харди—Литтльвуда, которая в пространстве R_n для интегрируемой по Лебегу функции f определяется следующим образом:

$$(Mf)(x) = \sup_{x \in Q} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)| dy, \quad x \in R_n, \quad (1.1)$$

где Q — куб, стороны которого параллельны координатным осям, доказал следующую теорему.

Теорема А. Неравенство

$$\int_{R_n} [(Mf)(x)]^p \omega(x) dx \leq C \int_{R_n} |f(x)|^p \omega(x) dx, \quad 1 < p < \infty,$$

где $C > 0$ не зависит от f , имеет место тогда и только тогда, когда весовая, [локально интегрируемая функция $\omega(x) > 0$ принадлежит классу A_p :

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \omega(x) dx \right) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \omega(x)^{-\frac{1}{p-1}} dx \right)^{p-1} \leq D \quad (1.2)$$

где $Q \subset R_n$ произвольный куб*.

Р. Керман и А. Торчинский [2] распространили результаты В. Макенхаупта на классы Орлица. Несмотря на то, что необходимые определения и обозначения будут даны позже, приведем эту теорему:

Теорема Б. Пусть функция Юнга $\Phi(t)$ и ее дополнительная функция $\Psi(t)$ удовлетворяют Δ_2 условию. Тогда следующие условия эквивалентны:

$$(I) \quad \int_{R_n} \Phi(Mf)(x) \omega(x) dx \leq C \int_{R_n} \Phi(f(x)) \omega(x) dx, \quad (1.3)$$

где константа $C > 0$ не зависит от функции f ;

(II) локально интегрируемая, неотрицательная функция $\omega(x)$ принадлежит классу A_Φ :

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \xi \omega(x) dx \right) \varphi \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \varphi^{-1} \left(\frac{1}{\xi \omega(x)} \right) dx \right) \leq K, \quad (1.4)$$

для всех кубов $Q \subset R_n$ и произвольных чисел $\xi > 0$;

ны координатным осям

* Всяду далее, когда говорим о кубах, подразумеваем, что их стороны параллель-

(III) $\omega(x)$ принадлежит классу $A_{p_0^*}$, где p_0^* — нижний индекс функции Юнга $\Phi(t)$.

Для любой локально интегрируемой функции $W(x)$ введем связанную с ней максимальную функцию следующим образом:

$$(H_W f)(x) = \sup_{x \in Q} \frac{1}{|Q|} |W(x)| \int_Q \left| \frac{f(t)}{W(t)} \right| dt. \quad (1.5)$$

Легко видеть, что непрерывность максимального оператора в весовом пространстве $L_p(\omega)$, $p \geq 1$ эквивалентна непрерывности оператора $H_W(f)$ в пространстве L_p , где $\omega(x) = |W(x)|^p$. Но в пространстве Орлича уже невозможно подобные результаты непосредственно вывести друг из друга. В связи со сказанным необходимо отметить работу Юнг—Мин Чэна [3], в которой, получая многочисленные результаты для различных классических операторов, автор четко различает эти два случая.

В настоящей работе мы докажем интегральные неравенства для $H_W(f)$ при некоторых необходимых и достаточных условиях, налагаемых на функцию $W(x)$. Доказывается следующая

Теорема 1. Пусть функция Юнга $\Phi(t)$ и дополнительная к ней функция $\Psi(t)$ удовлетворяют Δ_2 условию. Пусть p_0^* , p_1^* — нижний и верхний индексы функции $\Phi(t)$ и, соответственно, q_0^* , q_1^* — нижний и верхний индексы функции $\Psi(t)$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

(а) локально интегрируемая функция $W(x)$ принадлежит классу B_Φ , т. е. для всех кубов $Q \subset R_n$ и произвольных чисел $\xi > 0$

$$\frac{1}{|Q|} \|\chi_Q W\|_{L_\xi^\Phi} \left\| \frac{\chi_Q}{\xi W} \right\|_{L_\xi^\Psi} \leq D_\Phi. \quad (1.6)$$

(б) $W(x)$ принадлежит классам $B_{p_0^*}$ и $B_{p_1^*}$, т. е. для всех кубов $Q \subset R_n$ справедливы, соответственно, неравенства

$$\frac{1}{|Q|} \|\chi_Q W\|_{L^{p_0^*}} \left\| \frac{\chi_Q}{W} \right\|_{L^{q_0^*}} \leq D_{p_0^*}, \quad (1.7)$$

$$\frac{1}{|Q|} \|\chi_Q W\|_{L^{p_1^*}} \left\| \frac{\chi_Q}{W} \right\|_{L^{q_1^*}} \leq D_{p_1^*}.$$

(в) Существует некоторая константа $C_\Phi > 0$ такая, что

$$\|H_W(f)\|_{L_\xi^\Phi} \leq C_\Phi \|f\|_{L_\xi^\Psi}. \quad (1.8)$$

(г) Существует некоторая константа $C_\Phi > 0$ такая, что

$$\int_{R_n} \Phi((H_W(f))(x)) dx \leq C_\Phi \int_{R_n} \Phi(f(x)) dx. \quad (1.9)$$

(д) Существует некоторая константа $D_\Phi > 0$ такая, что для всех кубов $Q \subset R_n$ и произвольных чисел $\xi > 0$

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q S_\Phi(\xi |W(x)|) dx \varphi \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \Psi \left(\frac{1}{\xi |W(x)|} \right) dx \right) \leq D_\Phi, \quad (1.10)$$

где

$$S_\Phi(\lambda) = \inf_{t>0} \frac{\Phi(\lambda t)}{\Phi(t)}.$$

(е) Справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \|H_W(f)\|_{L^{p_0}} &\leq C_{p_0} \|f\|_{L^{p_0}}, \\ \|H_W(f)\|_{L^{p_1}} &\leq C_{p_1} \|f\|_{L^{p_1}}. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Полученные результаты обобщают результат Б. Макенхаупта в другом направлении, в некотором смысле „параллельно“ работе [2].

Из полученных результатов выводятся различные следствия, касающиеся базисности в пространствах Орлича некоторых классических систем.

§ 2. Предварительные сведения и результаты

В настоящей работе через B, C, D будем обозначать различные константы. Чтобы подчеркнуть параметр, от которого зависит константа, иногда будем писать соответствующий индекс. Всюду ниже

$$\Phi(t) = \int_0^t \varphi(\tau) d\tau$$

функция Юнга ($\varphi(0) = 0$, $\varphi(\tau) > 0$, при $\tau > 0$, не убывает и непрерывна справа, $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \varphi(\tau) = +\infty$).

Предположим, что $\Phi(t)$ удовлетворяет Δ_2 условию: $\Phi(2t) \leq B\Phi(t)$, которое эквивалентно более общему условию $\Phi(At) \leq B\Phi(t)$, $A > 1$.

Предположим также, что дополнительная к $\Phi(t)$ функция:

$$\Psi(t) = \int_0^t \varphi^{-1}(\tau) d\tau,$$

где $\varphi^{-1}(\tau) = \sup \{S: \varphi(S) \leq \tau\}$ также удовлетворяет Δ_2 условию (см. [4], стр. 16—35).

Весовое пространство Орлича L_ω^Φ , где $\omega(x) \geq 0$ локально интегрируемая функция в R_n , есть пространство таких функций $u(x)$, что

$$\left| \int_{R_n} u(x) v(x) \omega(x) dx \right| < \infty$$

для любой $v(x)$ с

$$\int_{R_n} \Psi(v(x)) \omega(x) dx < \infty.$$

L_ω^Φ — банахово пространство относительно нормы Орлича (для весовых функций все рассуждения аналогичны обычному случаю (см. [4], стр. 83))

$$\|f\|_{L_\omega^\Phi} = \sup_{v: \int_{R_n} \Psi(v(x)) \omega(x) dx < 1} \left| \int_{R_n} f(x) v(x) \omega(x) dx \right|. \quad (2.1)$$

Как и в обычном случае (см. [4], стр. 95—98) эта норма эквивалентна следующей норме Люксембурга:

$$\|f\|_{L_\omega^{(\Phi)}} = \inf_{k, k > 0} \int_{R_n} \Phi\left(\frac{|f(x)|}{k}\right) \omega(x) dx < 1 \quad (2.2)$$

причем имеют место неравенства

$$\|f\|_{L_\omega^{(\Phi)}} \leq \|f\|_{L_\omega^\Phi} \leq 2 \|f\|_{L_\omega^{(\Phi)}}. \quad (2.3)$$

Для произвольного куба $Q \subset R_n$ будем обозначать через $L_\omega^\Phi(Q)$ пространство таких функций $u(x)$, что

$$\left| \int_Q u(x) v(x) \omega(x) dx \right| < \infty$$

для любой $v(x)$ с

$$\int_Q \Psi(v(x)) \omega(x) dx < \infty.$$

Если $\omega(x) = 1$, то получаем обычное пространство Орлича (см. [4], стр. 83).

Функции $f(t)$ и $\varphi(t)$ будем называть эквивалентными, если существует константа C такая, что

$$C^{-1} f(t) \leq \varphi(t) \leq C f(t).$$

Мы будем использовать следующие свойства $\Phi(t)$ (см. [4], стр. 25, 37, 98):

$$C^{-1} t \varphi(t) \leq \Phi(t) \leq C t \varphi(t), \quad (2.4)$$

$$t < \Phi^{-1}(t) \Psi^{-1}(t) < 2t. \quad (2.5)$$

Если $u(x) \in L_\omega^\Psi$ и $v(x) \in L_\omega^\Psi$, то имеет место неравенство Гельдера

$$\left| \int_{R_n} u(x) v(x) \omega(x) dx \right| \leq \|u\|_{L_\omega^\Psi} \|v\|_{L_\omega^\Psi}. \quad (2.6)$$

В. Матусевска и В. Орлич [5] для исследования пространств Орлича L^Φ определили некоторые функции и связанную с ними пару индексов.

Для функции

$$\bar{S}_\Phi(\lambda) = \sup_{t>0} \frac{\Phi(\lambda t)}{\Phi(t)} \quad (2.7)$$

справедлива следующая (см. [6], стр. 35)

Лемма А. Функция $\bar{S}_\Phi(\lambda)$ ограничена на каждом компактном множестве и существуют числа ρ_0 и ρ_1 ($\rho_0 \leq \rho_1$) такие что

$$\bar{S}_\Phi(\lambda) = O(\max(\lambda^{\rho_0}, \lambda^{\rho_1})), \quad (2.8)$$

при $\lambda \rightarrow 0$ или $\lambda \rightarrow \infty$.

Если обозначить $\rho_0^* = \sup \rho_0$, $\rho_1^* = \inf \rho_1$, то

$$\rho_1^* = \inf_{1 < \lambda < \infty} \frac{\ln \bar{S}_\Phi(\lambda)}{\ln \lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\ln \bar{S}_\Phi(\lambda)}{\ln \lambda}, \quad (2.9)$$

$$\rho_0^* = \sup_{0 < \lambda < 1} \frac{\ln \bar{S}_\Phi(\lambda)}{\ln \lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\ln \bar{S}_\Phi(\lambda)}{\ln \lambda}.$$

Из леммы А вытекает, что при $\rho_0 < \rho_0^*$ и $\rho_1 > \rho_1^*$

$$\bar{S}_\Phi(\lambda) = o(\max(\lambda^{\rho_0}, \lambda^{\rho_1})). \quad (2.10)$$

Из определения функции $\bar{S}(\lambda)$ следует, что существует константа $C > 0$ такая, что

$$\Phi(\lambda t) \leq C \max(\lambda^{\rho_0}, \lambda^{\rho_1}) \Phi(t), \quad \rho_0 \leq \rho_1. \quad (2.11)$$

В этом случае, следуя [6], будем писать $\Phi \in \Lambda(\rho_0, \rho_1)$, или, чтобы зафиксировать константу, запишем $\Phi \in \Lambda(\rho_0, \rho_1, C)$. Если выполнено условие (2.10), то Φ имеет ρ_0^+ нижний тип и ρ_1^- верхний тип, что запишем в следующем виде: $\Phi \in \Lambda(\rho_0^+, \rho_1^-)$.

Определение 1. Положительная функция ρ называется псевдовогнутой, если существует эквивалентная ей вогнутая функция $F(t)$.

Имеют место следующие утверждения [6].

Лемма Б. Функция $\rho(t)$ псевдовогнута тогда и только тогда, когда $\rho \in \Lambda(0, 1)$, т. е.

$$\rho(\lambda t) \leq C \max(1, \lambda) \rho(t). \quad (2.12)$$

Множество тех функций ρ , для которых имеет место неравенство (2.12), обозначается через $\Upsilon(C)$. Множество функций ρ , для которых выполняется условие (2.10) при $\rho_0 = 0$ и $\rho_1 = 1$, обозначим через $\Upsilon^{+-}(C)$.

Лемма В. Если $\Phi \in \Lambda(\rho_0, \rho_1, C)$, то существует такая функция $\psi(t)$, эквивалентная $\Phi(t)$, что $\psi \in \Lambda(\rho_0, \rho_1, 1)$.

Лемма Г. Если $\Phi \in \Lambda(\rho_0, \rho_1)$ и $\rho_0 > 0$ то, $\Phi^{-1} \in \Lambda(\rho_1^{-1}, \rho_0^{-1})$.

Лемма Д. Пусть $\Phi(t) = t^{\rho_0} \sigma(t^{\rho_1 - \rho_0})$, $\Phi \in \Lambda(\rho_0, \rho_1, C)$ тогда и только тогда, когда $\sigma \in \Upsilon(C)$.

Лемма Е. Пусть $\Phi(t) = t^{\rho_0} \sigma(t^{\rho_1 - \rho_0})$ и $\Phi^{-1}(t) = t^{\frac{1}{\rho_1}} \rho(t^{\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_0}})$. Для того, чтобы $\sigma(t) \in \Upsilon(C)$, необходимо и достаточно, чтобы $\rho(t) \in \Upsilon(C)$.

Заметим, что приведенные выше леммы справедливы также для положительной, непрерывной, строго возрастающей функции $\psi(t)$, определенной на положительной полупрямой и удовлетворяющей Δ_2 условию. Если

$$\bar{S}_\psi(\lambda) = O(\max(\lambda^{p_0}, \lambda^{p_1})),$$

то будем говорить, что ψ имеет нижний тип p_0 и верхний тип p_1 .

$L_\psi^\psi(G)$ есть пространство таких функций $u(x)$, для которых

$$\int_G \psi\left(\frac{|u(x)|}{a}\right) d\mu < \infty, \quad a > 0.$$

Для $L_\psi^\psi(G)$ справедливо следующее утверждение [6]:

Лемма Ж. Если положительная, непрерывная, строго возрастающая функция $\psi(t)$ имеет конечный верхний и положительный нижний тип, то $L_\psi^\psi(G)$ является квазибанаховым пространством с квазинормой

$$\|u\|_{L_\psi^\psi(G)} = \inf \left\{ a > 0 / \int_G \psi\left(\frac{|u(x)|}{a}\right) d\mu \leq 1 \right\}.$$

Определение 2. Оператор T называется сублинейным, если

$$T(f_1 + f_2) \leq T f_1 + T f_2.$$

Для доказательства теоремы 1 нам понадобятся следующие интерполяционные теоремы [6], [7].

Теорема В. Пусть $\psi_0(t)$ и $\psi_1(t)$ — положительные, непрерывные, строго возрастающие функции, имеющие конечный верхний и положительный нижний тип. Пусть T — линейный непрерывный оператор или сублинейный непрерывный оператор и такой, что имеют место следующие неравенства:

$$\|Tf\|_{L_{\psi_0}^{\psi_0}} \leq C_{\psi_0} \|f\|_{L_{\psi_0}^{\psi_0}},$$

$$\|Tf\|_{L_{\psi_1}^{\psi_1}} \leq C_{\psi_1} \|f\|_{L_{\psi_1}^{\psi_1}}.$$

Тогда если $\psi^{-1} = \psi_0^{-1} \rho(\psi_1^{-1}/\psi_0^{-1})$, где $\rho \in \Upsilon^{+-}(1)$, то существует константа C_ψ такая, что

$$\|Tf\|_{L_\psi^\psi} \leq C_\psi \|f\|_{L_\psi^\psi}.$$

Теорема Г. Пусть T — сублинейный оператор, определенный на характеристических функциях χ_E , где E — подмножество R_n , имеющее конечную меру и $\omega(x)$ локально интегрируемая функция на R_n . Пусть T имеет обобщенный слабый тип (p_1, p_1) и (p_2, p_2) , $1 < p_1 < p_2 < \infty$ относительно $\omega(x)$, т. е.

$$\int_{T\chi_E > \lambda} \omega(x) dx \leq C \omega(E) \lambda^{-p_i}, \quad i=1, 2,$$

где константа C не зависит от множества E и $\lambda > 0$. Тогда

$$|\mathcal{M}_{L^p} \leq C_p |\mathcal{M}_{L^p}|,$$

где $p_1 < p < p_2$.

Отметим следующее полезное утверждение [2], которое относится к теореме Г.

Лемма 3. Пусть $\omega(x)$ — локально интегрируемая функция на R_n . Тогда для того, чтобы имело место

$$\int_{M_{\chi_E}^{\lambda > \lambda}} \omega(x) dx \leq C \omega(E) \lambda^{-p}, \quad 1 \leq p \leq \infty,$$

где C не зависит от измеримого множества E и $\lambda > 0$, необходимо и достаточно, чтобы существовала такая константа $D > 0$, что для всех кубов Q , всех измеримых $E \subset Q$

$$\frac{|E|}{|Q|} \leq D \left(\frac{\omega(E)}{\omega(Q)} \right)^{1/p},$$

где $\omega(E) = \int_E \omega(x) dx$.

Приведем следующий результат, который также используется при доказательстве теоремы 1 [8].

Теорема Д. Пусть неотрицательная, локально интегрируемая функция $\omega(x)$ принадлежит классу (A_p) , где $1 < p < \infty$. Тогда «обратное неравенство Гельдера».

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q (\omega(x))^{1+\delta} dx \right)^{\frac{1}{1+\delta}} \leq C \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \omega(x) dx \right)$$

выполняется для всякого куба Q с положительными постоянными C , δ не зависящими от Q .

В наших рассуждениях мы будем использовать функции:

$$S_\Phi(\lambda) = \inf_{t>0} \frac{\Phi(\lambda t)}{\Phi(t)}; \quad h_\Phi(\lambda) = \sup_{t>0} \frac{\Phi^{-1}(t)}{\Phi^{-1}(\lambda t)}; \quad (2.13)$$

Для них справедливы следующие соотношения (см. [9]):

$$p_0^* = \sup_{1 < \lambda < \infty} \frac{\ln S_\Phi(\lambda)}{\ln \lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\ln S_\Phi(\lambda)}{\ln \lambda}, \quad (2.14)$$

$$p_1^* = \inf_{0 < \lambda < 1} \frac{\ln S_\Phi(\lambda)}{\ln \lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\ln S_\Phi(\lambda)}{\ln \lambda}$$

и

$$\frac{1}{p_0^*} = \inf_{0 < \lambda < 1} \left(- \frac{\ln h_\Phi(\lambda)}{\ln \lambda} \right) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left(- \frac{\ln h_\Phi(\lambda)}{\ln \lambda} \right), \quad (2.15)$$

$$\frac{1}{p_1^*} = \sup_{1 < \lambda < \infty} \left(- \frac{\ln h_\Phi(\lambda)}{\ln \lambda} \right) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left(- \frac{\ln h_\Phi(\lambda)}{\ln \lambda} \right),$$

p_0^* и p_1^* называются нижним и верхним индексами функции $\Phi(t)$.

Из работы [10] следует, что если q_0^* и q_1^* — нижний и верхний индексы дополнительной к функции Юнга $\Phi(t)$ функции $\Psi(t)$, то

$$\frac{1}{p_0} + \frac{1}{q_1} = 1, \text{ соответственно, } \frac{1}{q_0} + \frac{1}{p_1} = 1. \quad (2.16)$$

§ 3. Доказательство теоремы 1

Эквивалентность утверждений (б) и (е) следует из теоремы А, учитывая условие (2.16).

Для доказательства импликации (е) $\Rightarrow$ (в) нам необходимы следующие леммы:

Лемма 1. Пусть $W(x)$ удовлетворяет условию B_p . Тогда существует такое число $\delta > 0$, что $W(x)$ удовлетворяет условиям $B_{p-\delta}$ и $B_{p+\delta}$.

Доказательство. Так как $W(x)$ удовлетворяет условию B_p (см. (1.17)), то ввиду того, что $|W(x)|^p$ удовлетворяет условию (A_p) , согласно теореме Д получаем, что существуют $r_1 > 1$ и C такие, что

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |W(x)|^{pr_1} dx \right)^{1/r_1} \leq C \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |W(x)|^p dx \right). \quad (3.1)$$

Обозначим через q и r_2 ($r_2 < q$) числа, сопряженные, соответственно, p и pr_1 . Применяя неравенство Гельдера, находим

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |W(x)|^{-r_2} dx \right)^{1/r_2} \leq \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |W(x)|^{-q} dx \right)^{1/q}. \quad (3.2)$$

Из (3.1) и (3.2) следует

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |W(x)|^{pr_1} dx \right)^{1/pr_1} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |W(x)|^{-r_2} dx \right)^{1/r_2} \leq C_1.$$

Тем самым получили, что существует такое число $\delta_1 > 0$, что $W(x)$ удовлетворяет условию $B_{p+\delta_1}$.

Опять используя „обратное неравенство Гельдера“ и неравенство Гельдера, из условия B_p получим, что для любого куба Q

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |W(x)|^{r_2} dx \right)^{1/r_2} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \left(\frac{1}{|W(x)|} \right)^{qr_1} dx \right)^{1/qr_1} \leq C_2,$$

где r_2' — число, сопряженное qr_1' и $r_1' > 1$. Отсюда следует существование такого числа δ_2 , что $W(x)$ удовлетворяет условию $B_{p-\delta_2}$.

Лемма 2. Пусть $\psi(t)$ — положительная, непрерывная, строго возрастающая функция на положительной полупрямой и $\psi(t) = t^{\sigma} \sigma(t^{p_1-p_0})$. $\psi \in \Lambda(p_0^+, p_1^-, 1)$ тогда и только тогда, когда $\sigma \in \Gamma^+(1)$.

Доказательство. Необходимость. Допустим, что $\psi \in \Lambda(p_0^+, p_1^-, 1)$, тогда

$$\psi(\lambda t) = o(\max(\lambda^{p_0}, \lambda^{p_1})) \psi(t), \quad p_0 \leq p_1, \quad \psi(t) \leq \max(\lambda^{p_0}, \lambda^{p_1}) \psi(t).$$

Отсюда

$$\sigma((\lambda t)^{p_1-p_0}) = o(\max(\lambda^{p_0}, \lambda^{p_1-p_0})) \sigma(t^{p_1-p_0}). \quad (3.3)$$

Положив

$$\mu = \lambda^{p_1-p_0}, \quad x = t^{p_1-p_0}, \quad (3.4)$$

из условия (3.3) получим $\sigma(\mu x) = o(\max(1, \mu)) \sigma(x)$. Аналогично имеем

$$\sigma(\mu x) \leq \max(1, \mu) \sigma(x).$$

Достаточность. Пусть теперь $\sigma \in \gamma^{+-}(1)$, т. е. $\sigma(\mu x) = o(\max(1, \mu)) \sigma(x)$, $\sigma(\mu x) \leq \max(1, \mu) \sigma(x)$. Из этих соотношений, переходя к первоначальным обозначениям (3.4), имеем

$$\sigma((\lambda t)^{p_1-p_0}) = o(\max(1, \lambda^{p_1-p_0})) \sigma(t^{p_1-p_0}),$$

$$\sigma((\lambda t)^{p_1-p_1}) \leq \max(1, \lambda^{p_1-p_0}) \sigma(t^{p_1-p_0}).$$

Следовательно, $\psi \in \Lambda(p_0^+, p_1^-, 1)$.

Лемма 3. Пусть $\psi(t)$ — непрерывная, строго возрастающая положительная функция на положительной полупрямой. Пусть

$\psi(t) = t^{p_0} \sigma(t^{p_1-p_0})$ и $\psi^{-1}(t) = t^{\frac{1}{p_1}} \rho(t^{\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1}})$. $\sigma(t) \in \gamma^{+-}(1)$ тогда и только тогда, когда $\rho(t) \in \gamma^{+-}(1)$.

Доказательство. Необходимость. Допустим, что $\sigma \in \gamma^{+-}(1)$, тогда в силу леммы 2

$$\psi(\lambda t) = o(\max(\lambda^{p_0}, \lambda^{p_1})) \psi(t), \quad p_0 \leq p_1,$$

$$\psi(\lambda t) \leq \max(\lambda^{p_0}, \lambda^{p_1}) \psi(t).$$

В случае, когда $\lambda > 1$, имеем

$$\psi(\lambda t) = o(\lambda^{p_1}) \psi(t), \quad \lambda \rightarrow \infty.$$

Положив $t = \psi^{-1}(\mu x)$ и $\lambda = \mu^{-\frac{1}{p_1}}$, легко находим

$$\psi^{-1}(\mu x) = o(\mu^{\frac{1}{p_1}}) \psi^{-1}(x), \quad \mu \rightarrow 0+.$$

Аналогичные выкладки показывают, что

$$\psi^{-1}(\mu x) = o(\max(\mu^{\frac{1}{p_1}}, \mu^{\frac{1}{p_0}})) \psi^{-1}(x),$$

$$\psi^{-1}(\mu x) \leq \max(\mu^{\frac{1}{p_1}}, \mu^{\frac{1}{p_0}}) \psi^{-1}(x).$$

Отсюда на основании леммы 2 получаем, что $\rho \in \gamma^{+-}(1)$. Доказательство достаточности леммы аналогично.

Приступим к непосредственному доказательству импликации (е) $\Rightarrow$ (в). Из леммы 1, а также из эквивалентности утверждений (б) и (е) следует существование таких чисел $p_0 < p_0^*$ и $p_1 > p_1^*$, что

$$\|H_W \mathcal{A}\|_{L^{p_0}} \leq C_{p_1} \|\mathcal{A}\|_{L^{p_0^*}}, \quad \|H_W \mathcal{A}\|_{L^{p_1}} \leq C_{p_0} \|\mathcal{A}\|_{L^{p_1^*}}. \quad (3.5)$$

Так как p_0^+ и p_1^+ являются соответственно нижним и верхним индексами для Φ , то для выбранных p_0 и p_1 согласно (2.10) получаем $\Phi \in \Lambda(p_0^+, p_1^-, C)$. Тогда в силу леммы В существует непрерывная, строго возрастающая функция $\psi(t)$, эквивалентная $\Phi(t)$ такая, что $\psi \in \Lambda(p_0^+, p_1^-, 1)$. Из леммы 2 и 3 вытекает, что если $\psi^{-1}(t)$ представить в виде $\psi^{-1}(t) = t^{\frac{1}{p_1}} \rho(t^{\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1}})$, то $\rho \in \gamma^{+-}(1)$. Таким образом $\psi(t)$ удовлетворяет условиям теоремы В, откуда и из (3.5) получаем

$$\|H_W \mathcal{A}_{L_\xi^\psi} \leq C_\psi \|\mathcal{A}_{L_\xi^\psi}. \quad (3.6)$$

Согласно неравенству Иенсена (см. [4], стр. 18) имеем

$$C\Phi(t) \leq \Phi(Ct), \quad C^{-1}\Phi(t) \geq \Phi\left(\frac{1}{C}t\right),$$

если $C > 1$. Отсюда и из эквивалентности функций Φ и ψ получаем, что для некоторого $C > 1$

$$\Phi\left(\frac{1}{C}t\right) \leq \psi(t) \leq \Phi(Ct). \quad (3.7)$$

Ввиду того, что

$$\|u\|_{L_\xi^\psi} = \inf \left\{ k > 0 \mid \int \psi\left(\frac{u(x)}{k}\right) \xi dx \leq 1 \right\},$$

$$\frac{1}{C} \|u\|_{L_\xi^{(\Phi)}} = \inf \left\{ k > 0 \mid \int \Phi\left(\frac{1}{C} \frac{u(x)}{k}\right) \xi dx \leq 1 \right\},$$

то согласно (3.7) получаем

$$\int \Phi\left(\frac{1}{C} \frac{u(x)}{k}\right) dx \leq \int \psi\left(\frac{u(x)}{k}\right) dx.$$

Следовательно

$$\frac{1}{C} \|u\|_{L_\xi^{(\Phi)}} \leq \|u\|_{L_\xi^\psi}.$$

Аналогично доказывается, что

$$\|u\|_{L_\xi^\psi} \leq C \|u\|_{L_\xi^{(\Phi)}}.$$

Таким образом, отсюда и из (3.6) получаем

$$\|H_W \mathcal{A}_{L_\xi^\psi} \leq C_\psi \|\mathcal{A}_{L_\xi^{(\Phi)}}.$$

Импликация (е) $\Rightarrow$ (в) доказана.

Так как для любого $\xi > 0$ и произвольного куба $Q \subset R_n$

$$\frac{1}{|Q|} \mathcal{W}(x) \chi_Q(x) \int_Q \left| \frac{f(y)}{\xi \mathcal{W}(y)} \right| \xi dy \leq H_{\xi \mathcal{W}}(\chi_Q f, x),$$

то из условия (в) и неравенства (2.3) получаем

$$\frac{1}{|Q|} \|\chi_Q \mathcal{W}\|_{L_\xi^{(\Phi)}} \int_Q \frac{1}{|\xi \mathcal{W}(y)|} |f(y)| \xi dy < C_\psi \|f \chi_Q\|_{L_\xi^{(\Phi)}},$$

откуда следует, что

$$\frac{1}{|Q|} \|\chi_Q\|_{L_\xi^{(\Phi)}} \sup_{\|h\|_{L_\xi^{(\Phi)}}=1} \int_Q \frac{1}{|\xi W(y)|} |f(y)| \xi dy \leq C_\Phi.$$

Левая часть полученного неравенства равна левой части неравенства в условии (а). Импликация (в) $\Rightarrow$ (а) доказана.

Для вывода импликации (г) $\Rightarrow$ (а) будем использовать доказательство основного результата работы [2]. Мы можем выбрать такую функцию f , определенную на Q , где Q — произвольный куб в R_n , что $\|f\|_{L_\xi^{(\Phi)}} = 1$ и

$$\int_Q \left| \frac{f(x)}{\xi W(x)} \right| \xi dx = \left\| \frac{\chi_Q}{\xi W} \right\|_{L_\xi^{(\Psi)}}.$$

Потому для $x \in Q$

$$H_W(f, x) \geq \frac{1}{|Q|} \chi_Q(x) |W(x)| \left\| \frac{\chi_Q}{\xi W} \right\|_{L_\xi^{(\Psi)}}.$$

Следовательно, так как для выбранной функции f согласно определению нормы Люксембурга имеем

$$\int_{R_n} \Phi(f(x)) \xi dx = 1,$$

то из условия (г) получаем

$$\int_Q \Phi \left(\frac{1}{|Q|} |W(x)| \left\| \frac{\chi_Q}{\xi W} \right\|_{L_\xi^{(\Psi)}} \right) \xi dx \leq C_\Phi. \quad (3.8)$$

Из определения функции $\underline{S}_\Phi$ (2.13) имеем

$$\underline{S}_\Phi \left(|W(x)| \right) \Phi \left(\frac{1}{|Q|} \left\| \frac{\chi_Q}{\xi W} \right\|_{L_\xi^{(\Psi)}} \right) \leq \Phi \left(\frac{1}{|Q|} |W(x)| \left\| \frac{\chi_Q}{\xi W} \right\|_{L_\xi^{(\Psi)}} \right),$$

откуда и из (3.8) получаем неравенство

$$\Phi \left(\frac{1}{|Q|} \left\| \frac{\chi_Q}{\xi W} \right\|_{L_\xi^{(\Psi)}} \right) \leq \frac{C_\Phi}{\xi \int_Q \underline{S}_\Phi(|W(x)|) dx}. \quad (3.9)$$

Используя соотношение (см. (2.13))

$$\Phi^{-1}(Ct) \leq h_\Phi \left(\frac{1}{C} \right) \Phi^{-1}(t),$$

из (3.9) находим, что

$$\frac{1}{|Q|} \left\| \frac{\chi_Q}{\xi W} \right\|_{L_\xi^{(\Psi)}} \leq D_\Phi \Phi^{-1} \left(\frac{1}{\xi \int_Q \underline{S}_\Phi(|W(x)|) dx} \right), \quad (3.10)$$

где $D_\Phi = h_\Phi \left(\frac{1}{C_\Phi} \right)$. Согласно определению нормы Люксембурга

$$\int_Q \Psi \left(\frac{1}{\xi |W(x)| \left\| \frac{\chi_Q}{\xi W} \right\|_{L(\Psi)}} \right) \xi dx = 1.$$

Отсюда, воспользовавшись неравенством (3.10), будем иметь

$$\int_Q \Psi \left(\frac{D_\Phi^{-1}}{\xi |W(x)| Q \Phi^{-1} \left(\frac{1}{\xi \int_Q \underline{S}_\Phi (|W(x)|) dx} \right)} \right) \xi dx \leq 1. \quad (3.11)$$

Основываясь на эквивалентности функций $\Psi(t)$ и $t\varphi^{-1}(t)$ (3.11) можем записать в виде

$$\begin{aligned} & \frac{D_\Phi^{-1}}{\xi |Q| \Phi^{-1} \left(\frac{1}{\xi \int_Q \underline{S}_\Phi (|W(x)|) dx} \right)} \int_Q \varphi^{-1} \times \\ & \times \left(\frac{D_\Phi^{-1}}{\xi |Q| |W(x)| \Phi^{-1} \left(\frac{1}{\xi \int_Q \underline{S}_\Phi (|W(x)|) dx} \right)} \right) \frac{1}{|W(x)|} dx \leq D. \quad (3.12) \end{aligned}$$

Так как функция

$$F(\xi) = \frac{D_\Phi^{-1}}{\xi |Q| \Phi^{-1} \left(\frac{1}{\xi \int_Q \underline{S}_\Phi (|W(x)|) dx} \right)}$$

непрерывна и, согласно неравенству (2.5), стремится, соответственно, к нулю и бесконечности, когда $\xi \rightarrow \infty$ и $\xi \rightarrow 0$, то существует такое значение $\xi_0 > 0$, что

$$\frac{D_\Phi^{-1}}{\xi_0 |Q| \Phi^{-1} \left(\frac{1}{\xi_0 \int_Q \underline{S}_\Phi (|W(x)|) dx} \right)} = 1. \quad (3.13)$$

В силу неравенства Юнга (2.5) из (3.13) получаем

$$\frac{D_\Phi^{-1} \int_Q \underline{S}_\Phi (|W(x)|) dx \cdot \Psi^{-1} \left(\frac{1}{\xi_0 \int_Q \underline{S}_\Phi (|W(x)|) dx} \right)}{2|Q|} \leq 1.$$

Отсюда

$$\Psi^{-1} \left(\frac{1}{\xi_0 \int_Q \underline{S}_\Phi (|W(x)|) dx} \right) \leq \frac{2 D_\Phi |Q|}{\int_Q \underline{S}_\Phi (|W(x)|) dx}.$$

Применив к обеим частям неравенства функцию Ψ , будем иметь

$$\left[\Psi \left(\frac{2 D_\Phi |Q|}{\int_Q \underline{S}_\Phi (|W(x)|) dx} \right) \int_Q \underline{S}_\Phi (|W(x)|) dx \right]^{-1} \leq \xi_0 \quad (3.14)$$

Используя оценку (3.14), из неравенства (3.12) и условия (3.13) имеем

$$\int_Q \varphi^{-1} \left(\frac{1}{|\mathcal{W}(x)|} \right) \frac{1}{|\mathcal{W}(x)|} dx \leq \frac{D}{\xi_0} \leq \\ \leq 2D \cdot D_\Phi \cdot D'_\Phi \cdot |Q| \cdot \varphi^{-1} \left(\frac{2D_\Phi \cdot |Q|}{\int_Q S_\Phi(|\mathcal{W}(x)|) dx} \right).$$

Отсюда легко находим

$$\frac{1}{|Q|} \int S_\Phi(|\mathcal{W}(x)|) dx \varphi \left(\frac{1}{|Q|} \int \Psi \left(\frac{1}{|\mathcal{W}(x)|} \right) dx \right) \leq D'_\Phi.$$

Импликация (г) $\Rightarrow$ (д) доказана.

Для доказательства импликации (а) $\Rightarrow$ (д) заметим, что для любого куба $Q \subset R_n$ неравенство (3.8) сразу следует из условия (а). Откуда, точно таким же образом как и выше, приходим к неравенству (д).

Перейдем к доказательству импликации (д) $\Rightarrow$ (е).

Пусть Q — куб и E — некоторое измеримое подмножество Q , тогда из (2.3) и (2.6) имеем

$$\frac{|E|}{|Q|} \leq 2 \frac{1}{|Q|} \|\chi_E \mathcal{W}\|_{L_\xi^{(\Phi)}} \left\| \frac{\chi_Q}{\xi \mathcal{W}} \right\|_{L_\xi^{(\Psi)}}. \quad (3.15)$$

Покажем, что существует такое ξ' , для которого

$$\xi' \left\| \frac{\chi_Q}{\xi' \mathcal{W}} \right\|_{L_{\xi'}^{(\Psi)}} = 1. \quad (3.16)$$

В силу определения нормы Люксембурга и предложений, касающихся функции ψ , очевидно, что равенство (3.16) имеет место, если

$$\int_Q \Psi \left(\frac{1}{\mathcal{W}(x)} \right) \xi' dx = 1.$$

Отсюда требуемое значение ξ' равно

$$\xi' = \frac{1}{\int_Q \Psi \left(\frac{1}{\mathcal{W}(x)} \right) dx}.$$

Взяв $\xi = 1$ в условии (д) и используя (3.16), получим

$$\frac{1}{\xi' |Q|} \left(\int_Q S_\Phi(|\mathcal{W}(x)|) \xi' dx \right) \varphi \left(\frac{1}{\xi' |Q|} \int_Q \Psi \left(\frac{1}{\xi' |\mathcal{W}(x)|} \left\| \frac{\chi_Q}{\xi \mathcal{W}} \right\|_{L_\xi^{(\Psi)}} \right) \xi' dx \right) \leq D'_\Phi,$$

откуда, воспользовавшись определением нормы Люксембурга и равенством (3.16), находим

$$\frac{1}{|Q|} \left\| \frac{\chi_Q}{\xi' \mathcal{W}} \right\|_{L_{\xi'}^{(\Psi)}} \varphi \left(\frac{1}{|Q|} \left\| \frac{\chi_Q}{\xi' \mathcal{W}} \right\|_{L_{\xi'}^{(\Psi)}} \right) \leq \frac{D'_\Phi}{\xi' \int_Q S_\Phi(|\mathcal{W}(x)|) dx}. \quad (3.17)$$

Из определения h_Φ (см. (2.13)) и неравенств (2.4), (3.17) получим

$$\frac{1}{|Q|} \left\| \chi_Q \right\|_{L^{\xi'}(\Gamma)} \leq C_\Phi \Phi^{-1} \left(\frac{1}{\xi' \int_Q S_\Phi(|W(x)|) dx} \right), \quad (3.18)$$

где $C_\Phi = h_\Phi \left(\frac{1}{B_\Phi \cdot C} \right)$ (C — константа из равенства (2.4)). Очевидно имеем, что

$$\int_E \Phi \left(\frac{1}{\alpha} \right) \bar{S}_\Phi(|W(x)|) \xi' dx = 1, \quad (3.19)$$

где

$$\alpha = \frac{1}{\Phi^{-1} \left(\frac{1}{\xi' \int_E \bar{S}_\Phi(|W(x)|) dx} \right)}. \quad (3.20)$$

Из (3.19), (3.20) согласно определению функции $\bar{S}_\Phi(\lambda)$ получаем

$$\int_E \Phi \left(\frac{(|W(x)|)}{\alpha} \right) \xi' dx \leq \int_E \Phi \left(\frac{1}{\alpha} \right) \bar{S}_\Phi(|W(x)|) \xi' dx = 1.$$

Следовательно

$$\|W\|_{L^{\xi'}(\Gamma)} \leq \frac{1}{\Phi^{-1} \left(\frac{1}{\xi' \int_E \bar{S}_\Phi(|W(x)|) dx} \right)}. \quad (3.21)$$

Из неравенства (3.15) для $\xi = \xi'$ на основе (3.18) и (3.21) находим

$$\frac{|E|}{|Q|} \leq 2 C_\Phi \frac{\Phi^{-1} \left(\frac{1}{\xi' \int_Q S_\Phi(|W(x)|) dx} \right)}{\Phi^{-1} \left(\frac{1}{\xi' \int_E \bar{S}_\Phi(|W(x)|) dx} \right)}. \quad (3.22)$$

Если условие (д) выполняется для некоторой функции $W(x)$, то это же условие будет выполняться и для функции $\xi\gamma W(x)$ при любых положительных $\xi > 0$ и $\gamma > 0$. Следовательно, из справедливости (3.22) ввиду того, что C_Φ не зависит от функции $W(x)$, вытекает неравенство

$$\frac{|E|}{|Q|} \leq 2 C_\Phi \frac{\Phi^{-1} \left(\frac{1}{\xi \int_Q S_\Phi(\gamma \xi |W(x)|) dx} \right)}{\Phi^{-1} \left(\frac{1}{\xi' \int_E \bar{S}_\Phi(\gamma \xi |W(x)|) dx} \right)}. \quad (3.23)$$

Пусть $Q_N = \{x : W(x) \geq N\} \cap Q$ и $E_N = E \cap Q_N$. Выберем N настолько большим, чтобы интегралы

$$\int_{Q_N} \underline{S}_\phi(|W(x)|) dx; \int_{E_{N_1}} \bar{S}_\phi(|W(x)|) dx$$

были меньше наперед заданного числа $\delta > 0$.

Из условий (2.9) и (2.14), для произвольных положительных ξ_1 и ξ_2 , мы можем выбрать такое $\xi > 0$, чтобы имели место неравенства

$$\xi^{\rho_0^*} |W^{\rho_0^*}(x)| \leq \bar{S}_\phi(\xi W(x)) \leq \xi^{\rho_0^* - \xi_1} |W^{\rho_0^* - \xi_1}(x)|, \quad x \in E' = E \setminus E_{N_1}, \quad (3.24)$$

$$\xi^{\rho_1^* + \xi_2} |W^{\rho_1^* + \xi_2}(x)| \leq \underline{S}_\phi(\xi W(x)) \leq \xi^{\rho_1^*} |W^{\rho_1^*}(x)|, \quad x \in Q' = Q \setminus Q_N.$$

Используя определения функций $S_\phi(\lambda)$ и $\bar{S}_\phi(\lambda)$, сразу получим

$$\begin{aligned} \underline{S}_\phi(\gamma) \cdot \underline{S}_\phi(\xi W(x)) &\leq \underline{S}_\phi(\gamma \xi W(x)), \\ \bar{S}_\phi(\gamma \xi W(x)) &\leq \bar{S}_\phi(\gamma) \bar{S}_\phi(\xi W(x)). \end{aligned} \quad (3.25)$$

Из условий (3.23), (3.24) и (3.25), а также из монотонности $\Phi^{-1}(t)$ следует неравенство

$$\frac{|E|}{|Q|} \leq C_1 \frac{\Phi^{-1}\left(\frac{1}{\xi' \underline{S}_\phi(\gamma) \xi^{\rho_1^* + \xi_2} \int_{Q'} |W(x)|^{\rho_1^* + \xi_2} dx}\right)}{\Phi^{-1}\left(\frac{1}{\xi' \bar{S}_\phi(\gamma) \xi^{\rho_0^* - \xi_1} \int_{E'} |W(x)|^{\rho_0^* - \xi_1} dx}\right)}. \quad (3.26)$$

Положим

$$t = \frac{1}{\xi' \bar{S}_\phi(\gamma) \xi^{\rho_0^* - \xi_1} \int_{E'} |W(x)|^{\rho_0^* - \xi_1} dx}, \quad (3.27)$$

откуда

$$\xi^{\rho_1^* + \xi_2} = \frac{1}{(\xi')^{\frac{\rho_1^* + \xi_2}{\rho_0^* - \xi_1}} \bar{S}_\phi(\gamma)^{\frac{\rho_1^* + \xi_2}{\rho_0^* - \xi_1}} t^{\frac{\rho_1^* + \xi_2}{\rho_0^* - \xi_1}} \left(\int_{E'} |W(x)|^{\rho_0^* - \xi_1} dx \right)^{\frac{\rho_1^* + \xi_2}{\rho_0^* - \xi_1}}}. \quad (3.28)$$

Подставляя найденное выражение в (3.28) для ξ получаем

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\xi' \underline{S}_\phi(\gamma) \cdot \xi^{\rho_1^* + \xi_2} \int_{Q'} |W(x)|^{\rho_1^* + \xi_2} dx} = \\ &(\xi' t)^{\frac{\rho_1^* - \rho_0^* + \xi_1 + \xi_2}{\rho_0^* - \xi_1}} \cdot \bar{S}_\phi^{\frac{\rho_1^* + \xi_2}{\rho_0^* - \xi_1}}(\gamma) \left(\int_{E'} |W(x)|^{\rho_0^* - \xi_1} dx \right)^{\frac{\rho_1^* + \xi_2}{\rho_0^* - \xi_1}} \\ &= \frac{\underline{S}_\phi(\gamma) \int_{Q'} |W(x)|^{\rho_1^* + \xi_2} dx}{\dots} \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая очевидное неравенство

$$\left(\int_{E'} |W(x)|^{p_0^* - \varepsilon_1} dx \right)^{\frac{1}{p_0^* - \varepsilon_1}} \leq \left(\int_{E'} |W(x)|^{p_1^* + \varepsilon_2} dx \right)^{\frac{1}{p_1^* + \varepsilon_2}} \quad (3.29)$$

и определение (2.13), из (3.16) находим

$$\frac{|E|}{|Q|} \leq C_1 \cdot h_\Phi \left(\frac{S_\Phi(\gamma)}{\frac{p_1^* + \varepsilon_2}{S^{p_0^* - \varepsilon_1}}(\gamma) \cdot (\xi't) \frac{p_1^* - p_0^* + \varepsilon_1 + \varepsilon_2}{p_0^* - \varepsilon_1}} \right) \frac{\Phi^{-1}(st)}{\Phi^{-1}(t)}, \quad (3.30)$$

где t определяется условием (3.27) и

$$S = \frac{\int_{E'} |W(x)|^{p_1^* + \varepsilon_2} dx}{\int_Q |W(x)|^{p_1^* + \varepsilon_2} dx}. \quad (3.31)$$

Из определения множеств E' и Q' очевидно имеем, что $E' \subset Q'$. Поэтому число S , определяемое условием (3.31), строго меньше единицы. Из (2.13) и (2.15) следует, что существует такое значение t_0 , что

$$\frac{1}{2} \frac{\Phi^{-1}(St_0)}{\Phi^{-1}(t_0)} < \frac{1}{h_\Phi(S)} < S^{\frac{1}{p_0^*}}. \quad (3.32)$$

Так как при изменении γ от нуля до бесконечности функция $\bar{S}_\Phi(\gamma)$ также непрерывно изменяется от нуля до бесконечности, то в неравенстве (3.30) можно выбрать значение $\gamma = \gamma_0$ так, чтобы $t = t_0$.

Величины интегралов на множествах E_N и Q_N меньше δ , поэтому с помощью соответствующего выбора δ из (3.30) и (3.33) получим

$$\frac{|E|}{|Q|} \leq C_2 \left(\frac{\int_{E'} |W(x)|^{p_1^* + \varepsilon_2} dx}{\int_Q |W(x)|^{p_1^* + \varepsilon_2} dx} \right)^{\frac{1}{p_0^*}}. \quad (3.33)$$

Из неравенства (3.29) следует, что

$$\begin{aligned} \Phi^{-1} \left(\frac{\frac{p_1^* - p_0^* + \varepsilon_1 + \varepsilon_2}{(\xi't)^{p_0^* - \varepsilon_1}} \frac{p_1^* + \varepsilon_2}{\bar{S}_\Phi^{p_0^* - \varepsilon_1}(\gamma)} \int_{E'} \left(|W(x)|^{p_0^* - \varepsilon_1} dx \right)^{\frac{p_1^* + \varepsilon_2}{p_0^* - \varepsilon_1}}}{\bar{S}_\Phi(\gamma) \cdot \int_Q |W(x)|^{p_1^* + \varepsilon_2} dx} \cdot t \right) &\leq \\ &\leq h_\Phi \left(\frac{S_\Phi(\gamma)}{\frac{p_1^* + \varepsilon_2}{\bar{S}_\Phi^{p_0^* - \varepsilon_1}}(\gamma) \cdot (\xi't) \frac{p_1^* - p_0^* + \varepsilon_1 + \varepsilon_2}{p_0^* - \varepsilon_1}} \right) \cdot \frac{\Phi^{-1}(S't)}{\Phi^{-1}(t)}. \end{aligned}$$

где

$$S = \left(\frac{\int_{E'} |W(x)|^{p_0^* - \varepsilon_1} dx}{\int_Q |W(x)|^{p_0^* - \varepsilon_1} dx} \right)^{\frac{p_1^* + \varepsilon_2}{p_0^* - \varepsilon_1}}$$

Аналогичные выкладки показывают, что

$$\frac{|E|}{|Q|} < C_3 \left(\frac{\int_{E'} |W(x)|^{p_0^* - \varepsilon_1} dx}{\int_Q |W(x)|^{p_0^* - \varepsilon_1} dx} \right)^{\frac{p_1^* + \varepsilon_2}{p_0^* (p_0^* - \varepsilon_1)}} \quad (3.34)$$

Таким образом, из (3.33) и (3.34), в силу интерполяционной теоремы Д и леммы 3, когда сублинейным оператором является максимальная функция Харди—Литтльвуда, получаем

$$\|H_W(f, x)\|_{L^{p_1^* + \varepsilon_2}} < D' \|f\|_{L^{p_1^* + \varepsilon_2}}, \quad \|H_W(f, x)\|_{L^{p_0^* - \varepsilon_1}} \leq D'' \|f\|_{L^{p_0^* - \varepsilon_1}} \quad (3.35)$$

Из (3.35), в силу интерполяционной теоремы Рисса—Торина, следует утверждение (e).

Докажем импликацию (б) $\Rightarrow$ (г). Положим

$$f_\lambda(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } |f(x)| > \lambda \\ 0, & \text{если } |f(x)| \leq \lambda, \end{cases}$$

$$f'_\lambda(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } |f(x)| < \lambda \\ 0, & \text{если } |f(x)| \geq \lambda. \end{cases}$$

Из условия (б) и леммы 1 следует, что существуют такие числа $r_1 < p_0^*$ и $r_2 > p_1^*$, что $|W(x)|^{r_1}$ удовлетворяет условию A_{r_1} . Поэтому в силу теоремы А имеем

$$\int_{R_n} |H_W(f_1, x)|^{r_1} dx \leq C_{r_1} \int_{R_n} |f_1(x)|^{r_1} dx,$$

$$\int_{R_n} |H_W(f_2, x)|^{r_2} dx \leq C_{r_2} \int_{R_n} |f_2(x)|^{r_2} dx.$$

Отсюда следует, что

$$\| \{H_W(\chi_Q f_1, x) > \lambda\} \| \leq C_{r_1} \frac{1}{\lambda^{r_1}} \int_Q |f_1(x)|^{r_1} dx,$$

$$\| \{H_W(\chi_Q f_2, x) > \lambda\} \| \leq C_{r_2} \frac{1}{\lambda^{r_2}} \int_Q |f_2(x)|^{r_2} dx. \quad (3.36)$$

Для интегрируемой по Лебегу функции f , используя (2.4), получаем

$$\int_Q \Phi(H_W(f, x)) dx \leq C \int_0^{\infty} \|H_W(f, x) > \lambda\| \frac{\Phi(\lambda)}{\lambda} d\lambda. \quad (3.37)$$

Так как

$$\{H_W(f, x) > \lambda\} \subset \left\{H_W(f, x) > \frac{\lambda}{2}\right\} \cup \left\{H_W(f, x) > \frac{\lambda}{2}\right\},$$

то из (3.36) и (3.37) находим

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} \|H_W(\chi_Q f, x) > \lambda\| \frac{\Phi(\lambda)}{\lambda} d\lambda \leq \\ & \leq 2^{r_1} C_{r_1} \int_Q |f(x)|^{r_1} \left(\int_0^{|f(x)|} (\Phi(\lambda)/\lambda^{r_1+1}) d\lambda \right) dx + \\ & + 2^{r_2} C_{r_2} \int_Q |f(x)|^{r_2} \left(\int_{|f(x)|}^{\infty} (\Phi(\lambda)/\lambda^{r_2+1}) d\lambda \right) dx. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Пусть $r = \frac{r_1 + p_0^*}{2}$ и $r' = \frac{r_2 + p_1^*}{2}$, тогда в силу неравенства (2.11), из (3.38) имеем

$$\begin{aligned} & \int_Q |f(x)|^{r_1} \left(\int_0^{|f(x)|} \frac{\Phi(\lambda)}{\lambda^{r_1+1}} d\lambda \right) dx \leq \\ & \leq C \int_Q |f(x)|^{r_1-r'} \left(\int_0^{|f(x)|} \lambda^{r'-r_1-1} d\lambda \right) \Phi(|f(x)|) dx \leq C_r \int_Q \Phi(f(x)) dx. \end{aligned}$$

Подобным образом получаем, что

$$\int_Q |f(x)|^{r_2} \left(\int_{|f(x)|}^{\infty} \frac{\Phi(\lambda)}{\lambda^{r_2+1}} d\lambda \right) dx \leq C_{r'} \int_Q \Phi(f(x)) dx.$$

Отсюда следует импликация (б) $\Rightarrow$ (г). Теорема доказана.

Представляет также интерес исследование следующей максимальной функции:

$$(H_W^* f)(x) = \sup_{\substack{x \in \Delta \\ \Delta \in I_{k,n}}} \frac{1}{|\Delta|} |W(x)| \int_{\Delta} \left| \frac{f(t)}{W(t)} \right| dt,$$

где $I_{k,n}$ — совокупность всех двоичных интервалов вида $\left(\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right)$ ($1 \leq k \leq 2^n$, $n = 0, 1, \dots$) на отрезке $[0, 1]$.

Справедлива следующая

Теорема 2. Пусть функция Юнга $\Phi(t)$ и дополнительная к ней функция $\Psi(t)$ удовлетворяет Δ_2 условию. Пусть p_0^*, p_1^* — нижний и верхний индексы $\Phi(t)$ и соответственно, q_0^*, q_1^* — нижний и верхний индексы функции $\Psi(t)$. Тогда следующие утверждения эквивалентны: (а) локально интегрируемая функция $W(x)$ принадлежит классу B_Φ , т. е. для всех $\Delta \in I_{\Delta^2}$ и произвольных чисел $\xi > 0$

$$\frac{1}{|\Delta|} \| \chi_\Delta W \|_{L_\xi^\Phi[0, 1]} \cdot \left\| \frac{\chi_\Delta}{\xi W} \right\|_{L_\xi^\Psi[0, 1]} \leq D_\Phi.$$

(б) $W(x)$ принадлежит классам $B_{p_0^*}$ и $B_{p_1^*}$, т. е. для всех $\Delta \in I_{\Delta^2}$ справедливы, соответственно, неравенство

$$\frac{1}{|\Delta|} \| \chi_\Delta W \|_{L_{p_0^*}[0, 1]} \cdot \left\| \frac{\chi_\Delta}{W} \right\|_{L_{q_0^*}[0, 1]} \leq D_{p_0^*},$$

$$\frac{1}{|\Delta|} \| \chi_\Delta W \|_{L_{p_1^*}[0, 1]} \cdot \left\| \frac{\chi_\Delta}{|\Delta|} \right\|_{L_{q_1^*}[0, 1]} \leq D_{p_1^*}.$$

(в) Существует константа $C_\Phi > 0$ такая, что

$$\| H_W(f) \|_{L_\xi^\Phi[0, 1]} \leq C_\Phi \| f \|_{L_\xi^\Psi[0, 1]}.$$

(г) Существует константа $C_\Phi > 0$ такая, что

$$\int_0^1 \Phi((H_W(f))(x)) dx \leq C_\Phi \int_0^1 \Phi(f(x)) dx.$$

(д) Существует константа D_Φ такая, что для всех $\Delta \in I_{\Delta^2}$ и произвольных чисел

$$\frac{1}{|\Delta|} \int_\Delta S_\Phi(\xi |W(x)|) dx \varphi \left(\frac{1}{|\Delta|} \int_\Delta \Psi \left(\frac{1}{\xi |W(x)|} \right) dx \right) \leq D_\Phi,$$

где

$$S_\Phi(\lambda) = \inf_{t > 0} \frac{\Phi(\lambda t)}{\Phi(t)}.$$

е) Справедливы неравенства

$$\| H_W(f) \|_{L_{p_0^*}[0, 1]} \leq C_\Phi \| f \|_{L_{p_0^*}[0, 1]}, \quad \| H_W(f) \|_{L_{p_1^*}[0, 1]} \leq C_\Phi \| f \|_{L_{p_1^*}[0, 1]}.$$

Автор благодарен члену-корреспонденту АН Арм. ССР А. А. Таллалянцу за внимание к работе и полезные обсуждения.

Институт геофизики
инженерной сейсмологии АН Арм. ССР

Поступила 12.XI.1985

II. Ս. ՂԱԶԱՐԻԱՆ ԱՆՏՈՎՍՏԱՐՈՒՄՆԵՐ ՕՐԼԻՉԻ տարածություններում մի մաքսիմալ ֆունկցիայի վերաբերյալ (ամփոփում)

R_n , $n > 1$ կլիկիդան տարածությունում արված լոկալ ինտեգրելի $W(x)$ ֆունկցիայի նկատմամբ սահմանվում է հետևյալ մարտիմալ ֆունկցիան

$$(HWf)(x) = \sup_{x \in Q} \frac{1}{|Q|} |W(x)| \int_Q \left| \frac{f(t)}{W(t)} \right| dt$$

բոլոր Q խորանարդների, որոնց կողմերը զուգահեռ են կոորդինատական առանցքներին: Աշխատանքում մասնավորաբար, դտեղծ են անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ $W(x)$ ֆունկցիայի վրա, որպեսզի տեղի ունենա հետևյալ անհավասարությունը

$$\int_{R_n} \Phi((HWf)(x)) dx \leq C_\Phi \int_{R_n} \Phi(f(x)) dx,$$

որտեղ $C_\Phi > 0$ կախված չէ f ֆունկցիայից և Φ -ն Δ_2 պայմանին բավարարող ճունգի ֆունկցիա է:

S. S. KAZARIAN. Inequalities for a maximal function in Orlicz spaces (summary)

For a given local integrable $W(x)$ function the following maximal function

$$(H_W f)(x) = \sup_{x \in Q} \frac{1}{|Q|} |W(x)| \int_Q \left| \frac{f(t)}{W(t)} \right| dt$$

is defined, where Q is a nondegenerate cube with sides parallel to the axes. Necessary and sufficient conditions on $W(x)$ are found yielding the inequality

$$\int_{R_n} \Phi((H_W f)(x)) dx \leq C_\Phi \int_{R_n} \Phi(f(x)) dx,$$

where $C_\Phi > 0$ is independent of f , Φ is a Young function which satisfies Δ_2 condition

ЛИТЕРАТУРА

1. Muckenhoupt. Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function, Trans. Amer. Math. Soc., 165, 1972, 207—226.
2. R. Kerman, A. Torchinsky. Integral inequalities with weights for the Hardy maximal function. Studia Math., 71, 1982, 277—284.
3. Y. Chen. Theorems of asymptotic approximations, Math. annalen, 140, 1960, 360—407.
4. М. А. Красносельский, Я. Б. Рутцукый. Выпуклые функции к пространства Орлича, М., Физматгиз, 1958.
5. W. Matuzewska, W. Orlicz. On certain properties of φ -functions, Bull. Acad. Polon. Sci., 8, 7, 1960, 439—443.
6. J. Gustavsson, J. Peetre. Interpolation of Orlicz spaces, Studia Math., 60, 1977, 33—59.
7. E. Stein, G. Weiss. An extension of a theorem of Marcinkiewicz and some of its applications, J. Math. Mech., 8, 1959, 263—264.
8. R. Cotman, C. Fefferman. Weighted norm inequalities for maximal functions and singular integrals, Studia Math., 54, 1974, 221—237.
9. Е. Хилле, Р. Филлипс. Функциональный анализ и полугруппы, М., ИЛ, 1962.
10. D. Boyd. Indices of functions spaces and their relationship to interpolation, Canad. J. Math., 21, 1969, 1245—1254.