ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XXII, № 4, 1987 Математика

УДА 517.946

Г. Р. ОГАНЕСЯН

О НАЧАЛЬНОЙ И СМЕШАННОЙ ЗАДАЧАХ С ЗАДАННЫМИ ВРОНСКИАНАМИ ДЛЯ СИНГУЛЯРНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

§ 1. Введение. Постановка задачи

Начальная задача для сингулярного гиперболического уравнения

$$Pu \equiv (\partial_t^2 - \Delta + a(t))\, u = f(t, x), \quad |a(+0)| = \infty, \quad (t, x) \in G, \tag{1.1}$$

$G = \{(t, x),\ t \in]0, T[,\ x \in R^n\}$, $\Delta \equiv \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ —оператор Лапласа, с данными Коши на начальной гиперплоскости $t = 0$, вообще говоря, некорректна. Например, при $a = -\frac{2}{t^2}$ нетривиальным решением однородной задачи Коши является функция $u = t^2$.

В настоящей работе для уравнения (1.1) вместо обычных данных Коши предлагается задавать весовые начальные данные в кокасательном расслоении T^*G в виде

$$\lim_{t \to +0} \left\| <\xi>^s \left(\frac{W(\hat{u} - \hat{x}, \varphi_j)}{W(\varphi_1, \varphi_2)} - \hat{\Phi}_j(\xi) \right) \right\| = 0, \quad j = 1, 2, \tag{1.2}$$

а затем изучать, когда эти данные можно упросить и опустить с T^*G на G. Здесь $\xi \in (R^n)'$, $|\xi|^2 = \xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2$, $<\xi> = \sqrt{1 + |\xi|^2}$, $\|\cdot\|$— норма пространства $L_2(R_\xi^n)$, $\hat{u}(t, \xi)$—частичное преобразование Фурье по x решения $u(t, x)$ уравнения (1.1), $W(\hat{u}, \varphi) \equiv \hat{u}\varphi_t - \hat{u}_t \varphi$ — вронскиан, $\hat{\Phi}_j$—произвольные начальные функции, $\hat{x}(t, \xi)$— частное решение уравнения

$$\hat{P}\hat{u} \equiv (\partial_t^2 + |\xi|^2 + a(t))\, \hat{u} \equiv \hat{f}(t, \xi), \tag{1.3}$$

а (φ_1, φ_2)—фундаментальная система решений (ф. с. р.) уравнения

$$\hat{P}\varphi(t, \xi) = 0, \tag{1.4}$$

т. е. вронскиан $W(\varphi_1, \varphi_2)$ не обращается в нуль на $]0, T[$ и не зависит от ξ.

Для уравнений и систем с регулярными (фуксовыми) особенностями в книгах [1], [2] и работах [3]—[6] рассматривались другие весовые постановки задач Коши. В работе [8] было предложено для уравнения (1.1) задавать при $t = +0$ отношения вронскианов

$$\lim_{t\to+0}\frac{W(u(t,\ x),\ \beta_j(t))}{W(\beta_1,\ \beta_2)}=\Phi_j(x),\ j=1,\ 2, \tag{1.5}$$

где сходимость подразумевается поточечная, Φ_j —начальные функции, а $(\beta_1,\ \beta_2)$—ф. с. р. уравнения

$$(\partial_t^2+a(t))\,\beta(t)=0. \tag{1.6}$$

Однако и эта постановка задачи не универсальна, т. к. уже для уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу (Э. П. Д.)

$$P_Э u\equiv\left(\partial_t^2-\Delta-\frac{\rho}{t^2}\right)u=f(t,\ x),\ \rho\in\mathbf{C} \tag{1.7}$$

приводит к однозначной разрешимости не для любых ρ (см. пример 3.1).

В настоящей работе указаны достаточные условия на $a(t)$, при выполнении которых имеют место однозначная разрешимость начальной задачи (1.1), (1.2) в $C^2(H^{q-2})$ (см. § 2, теорема 1) и оценки коэрцитивности. В условиях теоремы 1 данные (1.2) упрощаются, опускаются на G и принимают вид

$$\lim_{t\to+0}\left\|\frac{W(u(t,\ x),\ \beta_j(t))}{W(\varphi_1,\ \varphi_2)}-\Phi_j(x)\right\|_s=0,\ j=1,\ 2, \tag{1.8}$$

здесь $\|\cdot\|_s$—норма пространства Соболева $H^s\equiv W_2^s(R_x^n)$.

Если дополнительно к условиям теоремы 1 выполнено условие

$$\operatorname{Im}a(t)\equiv 0,\ t\in\,]0,\ T], \tag{1.9}$$

то функции $\beta_j(t)$ в (1.8) можно заменить функциями Грина-Лиувилля уравнения (1.6) (см. замечание 2.1):

$$\gamma_{1,2}(t)=[a(t)]^{-\frac{1}{4}}\exp\left(\pm i\int_T^t\sqrt{a(\tau)}\,d\tau\right). \tag{1.10}$$

Теорема 1 из § 2 распространяется также на случай уравнения

$$(\partial_t^2-\Delta+a(t)+b(t,\ x))\,u=f(t,\ x), \tag{1.11}$$

когда $a(t)$ доминирует над $b(t,\ x)$ (см. условие (2.7) и замечание 2.3).

Постановка начальной задачи для уравнения (1.1) в форме (1.2) привлекательна тем, что она оказывается однозначно разрешимой для широкого класса функций с особенностью в нуле и инвариантна относительно мультипликативного преобразования решения (см. замечание 2.7). Отметим также, что если выполнено условие

$$\int_0^T|a(\tau)|\,d\tau<\infty, \tag{1.12}$$

то данные (1.2) преобразуются в обычные данные Коши (см. § 3).

Рассматривается также уравнение Эйлера-Пуассона-Дарбу (1.7), для которого условия теоремы 1 нарушаются. Для этого уравнения опущенные с T^*G на G данные (см. (2.12), (2.13)) существенно слож-

нее данных (1.8), а в оценках коэрцитивности, в отличие от теоремы 1, есть конечная потеря гладкости (см. замечание 2.9).

§ 2. Формулировка результатов

1°. Начальная задача. Пусть $L_2^s(R_\xi^n)$—пространство функций $g(\xi)$ таких, что $\langle\xi\rangle^s g(\xi)\in L_2(R_\xi^n)$, $H^s\equiv W_2^s(R_x^n)$—пространство Соболева, $C^m(H^s)$—пространство m раз непрерывно дифференцируемых отображений интервала $]0, T]$ в H^s, $B^m(H^s)$ — пространство j раз ($j=0, 1,\cdots, m$) непрерывно дифференцируемых отображений интервала $]0, T]$ в H^{s-j}, а $B_a^2(H^s)$—пополнение $C^\infty(G)$-функций по норме

$$\sup_{t\in[0,T]}\left(\sum_{k=0}^{2}|a(t)|^{\frac{1}{4}-\frac{k}{2}}\|\partial_t^k u\|_{s-k}\right).$$

Пусть $a(t)$—комплекснозначная дважды непрерывно дифференцируемая на $]0, T]$ функция такая, что $|a(+0)|=\infty$ и

$$\operatorname{Re}a(t)\geqslant 0, \tag{2.1}$$

$$\int_0^T\frac{|\operatorname{Im}a(s)|}{\sqrt{\operatorname{Re}a(s)+|a(s)|}}\,ds\leqslant \operatorname{cons}t<\infty, \tag{2.2}$$

$$\lim_{t\to+0}\frac{a_t}{a^{3/2}}(t)=0,\ \frac{a_t^2}{a^{5/2}}(t),\ \frac{a_{tt}}{a^{3/2}}(t)\in L_1[0, T]. \tag{2.3}$$

Теорема 1. *В условиях* (2.1)—(2.3) *начальная задача* (1.1), (1.8) *при*

$$\Phi_j\in H^\sigma,\ \frac{f}{\sqrt{|a(t)|}}\in C^\sigma(H^\sigma),\ \sigma=\max\left\{q,\ s+\frac{5}{2}\right\},\ j=1,\ 2,\ q\geqslant 2, \tag{2.4}$$

имеет единственное решение $u(t, x)\in B^2(H^q)$, *удовлетворяющее при* $k=0, 1, 2$ *оценкам*

$$|a(t)|^{\frac{1}{4}-\frac{k}{2}}\|\partial_t^k u\|_{q-k}\leqslant c\left\{\mathrm{J}_q(t)+\frac{\|f\|_{q-\frac{3}{2}}}{|a(t)|^{3/4}}\cdot\delta_{k2}\right\}, \tag{2.5}$$

где

$$\mathrm{J}_q(t)=\|\Phi_1\|_q+\|\Phi_2\|_q+\left(\int_0^t\frac{\|f(\tau)\|_q^2}{\sqrt{|a(\tau)|}}\,d\tau\right)^{\frac{1}{2}},$$

δ_{kj}—*символ Кронекера, c—постоянная, зависящая только от T и постоянной, фигурирующей в условии* (2.2).

Замечание 2.1 Если вместо (2.2) выполнено условие (1.9), то теорема 1 остается справедливой и при замене данных (1.8) данными

$$\lim_{t\to 0}\left\|\frac{W(u(t, x),\ \gamma_j(t))}{W(\varphi_1,\ \varphi_2)}-\Phi_j(x)\right\|_s=0, \tag{2.6}$$

где функции $\gamma_j(t)$ определяются формулой (1.10).

Замечание 2.2. Если—ρ, δ, m—положительные постоянные, а $p < -2$, $\gamma > 2$, $0 < T < 1$, то функции

$$-\frac{\rho}{t^2 |\ln t|^p}, -\frac{\rho}{t^\gamma}, \exp\left(\frac{\delta}{t^m}\right), \exp\exp\left(\frac{\delta}{t^m}\right)$$

удовлетворяют условиям (2.3). Случаи $a(t) = \rho \cdot t, \frac{\rho}{t\,|\ln t|^p}, \gamma < 1, p > 1$ неинтересны (см. (1.12)), а исключительный случай уравнения Э. П. Д. $\left(a = -\frac{\rho}{t^2}\right)$ рассмотрен ниже в теореме 2.

Замечание 2.3. Если

$$\frac{\|b(t)\|_\mu^2}{|a(t)|} < 1, \ \mu = \max(q, s), \tag{2.7}$$

то теорема 1 справедлива и для уравнения (1.11).

Условие (2.7) с $\mu = 0$ выполнено, например, если

$$a(t) = -\frac{\rho}{t^3}, \ b(t, x) = t^{-3} \exp\left(-\frac{x^2}{t^2}\right).$$

Замечание 2.4. Если $q > 5 + \left[\frac{n}{2}\right]$, то по теореме вложения Соболева, в условиях теоремы 1, получаем классическое решение $u \in C^2(G)$ задачи (1.1), (1.8).

Замечание 2.5. Наличие в оценках (2.5) множителя $|a(t)|^{\frac{k}{2}-\frac{1}{4}}$ означает, что $\|u\|_q \to 0$, $\|\partial_t^k u\|_{q-k} \to \infty$ при $t \to +0$, $k = 1, 2$. Отметим, что в условиях теоремы 1 имеем также $u \in B_a^2(H^q)$.

Замечание 2.6. Выбор ф. с. р. уравнения (1.4) неоднозначен, поэтому постановка начальной задачи в форме (1.2) неоднозначна. Неоднозначность данных (1.2) связана еще и с тем, что к начальным операторам

$$O_{\varphi_j}(u) \equiv \frac{W(\hat{u} - \hat{x}, \varphi_j)}{W(\varphi_1, \varphi_2)} \tag{2.8}$$

можно прибавлять произвольные бесконечно малые при $t \to +0$ величины, не изменяя при этом данных (1.2).

Решение уравнения (1.3) в форме

$$\hat{x}(t, \xi) = \hat{x}_\varphi(t, \xi) = \int_0^t G(t, \tau, \xi) \hat{f}(\tau, \xi)\, d\tau, \tag{2.9}$$

$$G(t, \tau, \xi) = \frac{\varphi_1(\tau, \xi)\, \varphi_2(t, \xi) - \varphi_1(t, \xi)\, \varphi_2(\tau, \xi)}{W(\varphi_1(\tau, \xi), \varphi_2(\tau, \xi))}, \tag{2.9'}$$

не зависит от выбора ф. с. р. $\varphi = \begin{pmatrix}\varphi_1 \\ \varphi_2\end{pmatrix}$, т. к. из $\psi = B\varphi$, $B \in GL_2(\mathbf{C})$ следует $\hat{x}_\varphi = \hat{x}_\psi$.

Определение 2.1. Начальные операторы O_φ и O_ψ и порожденные ими начальные задачи (см. (1.2)) мы будем называть эквивалентными, если они отличаются (по норме $L_2^s(R_\xi^n)$) на бесконечно малую при $t \to +0$ величину.

Замечание 2.7. Начальные условия (1.2) и операторы (2.8) инвариантны относительно мультипликативного преобразования решения уравнения (1.1):

$$u(t, x) \to v(t, x) \equiv b(x)\, u(t, x), \quad b(t) \in C^2(]0, T]).$$

Действительно, применяя это преобразование из (1.1) получим

$$\left(\partial_t^2 - \Delta + a(t) + 2\left(\frac{b_t}{b}\right)^2 - \frac{b_{tt}}{b} - \frac{2b_t}{b}\partial_t\right) v = bf.$$

При этом ф. с. р. уравнения (1.4) и функция $\tilde{\varkappa}(t, \xi)$ умножаются на b и, в силу следующего свойства вронскианов $W(b\varphi_1, b\varphi_2) = b^2 W(\varphi_1, \varphi_2)$, начальные операторы при этом не меняются:

$$O_\varphi(\hat{u}) = O_{b\varphi}(\widehat{bu}).$$

Рассмотрим уравнение Э. П. Д. Введем удобный параметр $\nu = \dfrac{\sqrt{1+4\rho}}{2}$ с выбором той ветви корня, для которой

$$\operatorname{Re}\nu \geqslant 0. \tag{2.10}$$

Обозначим через Z_+ (Z_-) множество целых, неотрицательных (неположительных) чисел, а через Z—множество целых чисел. Введем также следующие обозначения:

$$\mathbf{C}_+ = \{z \in \mathbf{C},\ \operatorname{Re} z \geqslant 0\},\ \mathbf{R}_+ = \{s \in \mathbf{R},\ s \geqslant 0\},\ \dot{C}_+ = C_+ \setminus \{0\},$$

$$B = \left\{k + \frac{1}{2},\ k \in \dot{Z}_+\right\},\ m = [\operatorname{Re}\nu],\ N = \left[\frac{\operatorname{Re}\nu - p}{2} - \frac{3}{4}\right], \tag{2.11}$$

[ ]—целая часть числа

$$f_m(t, x) \equiv t^{-m}\left(f(t, x) - \sum_{p=0}^{m-1} \frac{t^p}{p!}\partial_t^p f(0, x)\right),$$

$$\underset{q=0,1,\ldots}{\beta_1(t) \equiv t^{\frac{1}{2}+\nu}},\ \beta_{2q}(t) = \frac{t^{2q+\frac{1}{2}-\nu}}{2q!\,(-4)^q (q-\nu)\cdots(1-\nu)(-\nu)}. \tag{2.11'}$$

В § 7 мы покажем, что для уравнения (1.7) данные (1.2) упрощаются, опускаются на G и принимают вид

$$\lim_{t\to+0} W(u, \beta_1) = \Phi_1(x), \tag{2.12}$$

$$\lim_{t\to+0} \sum_{q=0}^{m} (-1)^q \Big\{ W(\Delta^q u, \beta_{2q}) - \sum_{p=0}^{m-1} \sum_{l+r=0}^{N} (-1)^{l+r} \varkappa_{lrpq} \times$$

$$\times t^{p+\frac{3}{2}-\nu} (t^2\Delta)^{l+r+q} \partial_t^p f(0, x)\Big\} = \Phi_2(x), \tag{2.13}$$

где пределы подразумеваются по норме H^r, а

$$\varkappa_{lrpq} = \frac{\left(l+\nu-r\right)\left(r+l-q-\frac{p+\nu}{2}+\frac{3}{4}\right)}{\left(2l+p+\frac{3}{2}+\nu\right)\left(2r+p+\frac{3}{2}-\nu\right)p!q!r!\,l!\,\Gamma(l+1+\nu)}\times$$

$$\times\frac{\Gamma(\nu)\,\Gamma^2(1-\nu)}{\Gamma(q+1-\nu)\Gamma(r+1-\nu)\,\nu(-4)^{l+r+q}}. \tag{2.14}$$

Последняя формула имеет смысл при $\nu\in\mathbf{C}_+\setminus B$. Если $\nu=0$, то полагаем $\varkappa_{lrpq}\equiv 0$. Пусть

$$q_0=\max\left(q+\operatorname{Re}\nu,\ 5\operatorname{Re}\nu+5+s\right),\quad \alpha=\begin{cases}0, & k=0,\\ \frac{1}{4}, & k=1,\\ \frac{3}{4}, & k=2.\end{cases} \tag{2.15}$$

Теорема 2. *Если* $\nu\in\mathbf{C}_+\setminus(B\cup Z_+,)$ *то начальная задача* (1.7), (2.12), (2.13) *при*

$$\Phi_j(x),\ \partial_t^p f(0,x)\in H^{q_0},\ f\in C^0(H^{q_0}),\ j=1,2,\ p=0,1,\cdots,m-1,\ q\geqslant 2, \tag{2.16}$$

имеет единственное решение $u(t,x)\in B^2(H^q)$, *удовлетворяющее при* $k=0,1,2$ *оценкам*

$$\|\partial_t^k u(t)\|_{q-k}\leqslant c\left\{t^{-2\alpha-\operatorname{Re}\nu}I_{q+\operatorname{Re}\nu}+t^{-2\alpha}\|\Phi_2\|_q+\delta_{k2}\|f(t)\|_{q-2}\right\}, \tag{2.17}$$

$$I_q\equiv\|\Phi_1\|_q+\sum_{p=0}^{m-1}\|\partial_t^p f(0)\|_q+\left(\int_0^t\|f_m(\tau)\|_q^2\,d\tau\right)^{\frac{1}{2}},$$

а постоянная c *зависит только от* ν *и* T.

Замечание 2.8. Если

$$\partial_t^p f(0,x)\equiv 0,\ p=0,1,\cdots,m-1, \tag{2.18}$$

то теорема 2 справедлива и при $\nu\in\mathbf{C}_+\setminus Z_+$.

Замечание 2.9. Наличие в (2.17) потери гладкости, зависящей от $\operatorname{Re}\nu$, связано с тем, что функции $\varphi_j(t,\xi)$ из ядра оператора $P_э$ имеют степенной рост при $|\xi|\to\infty$ и фиксированном t из $]0,T[$ (см. (7.10)), в отличие от случая, рассмотренного в теореме 1 (см. (5.15)).

2°. Смешанная задача. Пусть Ω — открытая, ограниченная область в R_x^n с гладкой границей $\partial\Omega$, Q—цилиндр над Ω: $Q=\{(t,x)\in R^{n+1},\ 0<t<T,\ x\in\Omega\}$, Q_τ—сечение Q гиперплоскостью $t=\tau$, а ∂Q—боковая поверхность цилиндра Q. Если $U=Q$ или $U=Q_0$, то пространство Соболева $H^q(U)$, $q\in R_+$ определяется как пополнение бесконечно дифференцируемых в U функций f по норме

$$\|f,U\|_q=\left(\sum_{|\alpha|\leqslant q}\int_U|D^\alpha f|^2\,dU\right)^{1/2}<\infty,$$

где $dU = dx_1 \cdots dx_n$, если $U = Q_0$ и $dU = dt\, dx_1 \cdots dx_n$, если $U = Q$. $H_0^q(Q_0)$—пополнение бесконечно дифференцируемых в Q_0 функций с компактными носителями, содержащимися в Q_0, по норме $H^q(Q_0)$.

Обозначим через $v_r(x)$ ортонормированные собственные функции, а λ_r^2—собственные значения задачи Дирихле для оператора Лапласа

$$\Delta v_r = -\lambda_r^2 v,\ x \in \Omega,\ v_r|_{\partial\Omega} = 0,\ r = 1, 2, \cdots, \tag{2.19}$$

$$0 < \lambda_1^2 \leqslant \lambda_2^2 \leqslant \cdots . \tag{2.20}$$

Введем функции φ_{1r}, φ_{2r}, образующие ф. с. р. уравнений

$$(\partial_t^2 + \lambda_r^2 + a(t))\, \varphi(t) = 0,\ r = 1, 2, 3, \cdots, \tag{2.21}$$

т. е. вронскианы $W(\varphi_{1r}, \varphi_{2r})$ не обращаются в нуль на $]0, T]$ и не зависят от r. Пусть

$$f_r(t) = \int_{Q_t} f(t, x)\, v_r(x)\, dx \tag{2.22}$$

—коэффициенты Фурье функции f, а $x_r(t)$—частные решения уравнений

$$(\partial_t^2 + \lambda_r^2 + a(t))\, x(t) = f_r(t). \tag{2.23}$$

Аналогом начальных условий (1.2) для смешанной задачи являются данные

$$\lim_{t \to +0} \frac{W(u_r - x_r, \varphi_{jr})}{W(\varphi_{1r}, \varphi_{2r})} = \Phi_{jr},\ j = 1, 2, \tag{2.24}$$

где пределы понимаются в смысле l_2. Обозначим

$$l = 2\left[\frac{q+1}{2}\right],\ \beta = 2\left[\frac{q+m+2}{2}\right],\ d = \max(q + m + 1, [5\,\mathrm{Re}\,\nu] + 6).$$

Теорема 3. *В условиях* (2.1)—(2.3) *смешанная задача* (1.1), (1.8) *с* $s = 0$ *и однородным краевым условием*

$$u|_{\partial Q} = 0, \tag{2.25}$$

при

$$\Phi_j \in H_0^l(Q_0) \cap H^{q+2}(Q_0),\ f \in H_0^l(Q_t) \cap H^{q+2}(Q_t),\ j = 1, 2,\ q \in Z,\ q \geqslant 2, \tag{2.26}$$

имеет единственное решение $u(t, x) \in B^2(H^q(Q_t))$, *причем при* $t \in]0, T]$, $k = 0, 1, 2$ *имеют место оценки*

$$\|\partial_t^k u(t)\|_{q-k}^2 \leqslant c\{\delta_{k2} \|f(t)\|_{q-2}^2 + |a(t)|^{k-\frac{1}{2}} J_q^2(t)\}, \tag{2.27}$$

где постоянная c *зависит только от* T *и постоянной из* (2.2).

Теорема 4. *Если* $\nu \in \mathbf{C}_+ \setminus (B \cup Z_+)$, *то смешанная задача* (1.7) (2.12), (2.13) *при*

$$\Phi_1,\ \partial_t^p f(0) \in H_0^\beta(Q_0) \cap H^d(Q_0),\ \Phi_2 \in H_0^l \cap H^d,$$
$$f \in C^0(H_0^\beta(Q_t)) \cap H^d(Q_t),\ q \in Z,\ q > 2, \tag{2.28}$$

имеет единственное решение $u \in B^2(H^q)$, удовлетворяющее оценкам

$$\|\partial_t^k u\|_{q-k}^2 \leqslant c\,\{t^{-4\alpha}\|\Phi_2\|_q^2 + t^{-4\alpha-2\operatorname{Re}\nu} I_{q+m+1}^2 + \delta_{k2}\|f,\ Q_l\|_{q-2}^2\}, \quad (2.29)$$

где постоянная c зависит только от ν и T, $k=0,\ 1,\ 2$, $t \in]0,\ T[$.

§ 3. Примеры. Обсуждение результатов

Если для уравнения (1.1) выполнено условие (1.12), то энергетическим методом нетрудно доказать существование решений $\beta_{1,2}(t) \in C^2(]0,\ T[)$ задач Коши для уравнения (1.6) с данными

$$\beta_1(0)=0,\ \beta_1'(0)=1,\ \beta_2(0)=-1,\ \beta_2'(0)=0.$$

Если выбрать в качестве ф. с. р. $(\beta_1,\ \beta_2)$ эти решения, то задача (1.1), (1.2) станет эквивалентна задаче (1.1), (1.5), которая, в свою очередь эквивалентна обычной задаче Коши для (1.1), корректность которой хорошо известна.

Замечание 3.1. Если $\nu \in B$, т. е. $\rho = k(k+1)$, $k \in Z_+^*$ и $f \in C^\infty$ в окрестности начала координат, то для разрешимости (1.7) в классе C^∞-функций необходимы следующие условия согласования (см. [7]):

$$f(0,\ x)=0,\ k=1,$$

$$\left(\partial_t^{k-1} + \sum_{j=0}^{\left[\frac{k-1}{2}\right]} \frac{(-1)^{j-1}(k-1)!\,(2k-2j-3)!!}{(2j+2)!!\,(k-2j-3)!\,(2k-1)!!}\Delta^{2j+2}\partial_t^{2k-2j-3}\right)\times \quad (3.1)$$

$$\times f(0,\ x) \equiv 0,\ k \geqslant 2.$$

Отметим также, что хотя случай $\nu \in B$ не рассмотрен в теореме 2, аналогичная теорема может быть доказана и в этом случае.

Опишем области в одномерном комплексном пространстве $\mathbf{C}$ — области изменения параметра ρ — в которых начальное условие (2.13) можно упростить. Из формулы

$$\sqrt{a+ib} = \pm\left((\operatorname{sign} b)\sqrt{\frac{r+a}{2}} + i\sqrt{\frac{r-a}{2}}\right),\ r=|a+ib|, \quad (3.2)$$

выбором соответствующей ветви корня имеем

$$\nu = \frac{1}{2\sqrt{2}}\{\sqrt{|1+4\rho|+4\operatorname{Re}\rho} + i\operatorname{sign}(\operatorname{Im}\rho)\sqrt{|1+4\rho|-1-4\operatorname{Re}\rho}\}. \quad (3.3)$$

Из этой формулы следует, что отображение $\nu \to \rho$, задаваемое формулой $\rho = \nu^2 - \frac{1}{4}$, полосу с выколотыми точками $0 \leqslant \operatorname{Re}\nu < l$, $\nu \neq 0$, $1,\ 2,\cdots$ отображает во внутренность параболы с выколотыми точками

$$\operatorname{Re}\rho + \left(\frac{\operatorname{Im}\rho}{2}\right)^2 < l^2 - \frac{1}{4},\ \rho \neq k^2 - \frac{1}{4},\ k \in Z_+.$$

Поэтому, если $0 \leqslant \operatorname{Re}\nu < 1$. то $m=0$, $N=-1$ и в области Π_1:

$$\operatorname{Re}\rho + \left(\frac{\operatorname{Im}\rho}{2}\right)^2 < \frac{3}{4},\ \rho \neq -\frac{1}{4}, \quad (3.4)$$

данные (2.12), (2.13) принимают вид „чистых" вронскианов (см. (15)):

$$\lim_{t\to+0} W(u, \beta_j) = \Phi_j(x), \ j=1, 2, \tag{3.5}$$

здесь $\beta_2(t) = -t^{\frac{1}{2}-\nu}/2\nu$, $\beta_1(t) = t^{\frac{1}{2}+\nu}$.

Если же $1 \leqslant \operatorname{Re}\nu < 2$, $\nu \neq 1, \frac{3}{2}$, то $m=1$, $N=0$ и в области Π_2:

$$\operatorname{Re}\rho + \left(\frac{\operatorname{Im}\rho}{2}\right)^2 > \frac{3}{4}, \ \operatorname{Re}\rho + \left(\frac{\operatorname{Im}\rho}{4}\right)^2 < \frac{15}{4}, \ \rho \neq \frac{3}{4}; 2, \tag{3.6}$$

данные (2.13) принимают вид

$$\lim_{t\to+0} \{W(u, \beta_2) - W(\Delta u, \beta_{21}) - \varkappa_0 t^{\frac{3}{2}-\nu} f(0)\} = \Phi_2(x), \tag{3.7}$$

где

$$\beta_{21} = \frac{t^{\frac{5}{2}-\nu}}{8\nu(1-\nu)}, \quad \varkappa_0 = \frac{1}{\nu(3-2\nu)}.$$

Пример 3.1. Общее решение уравнения

$$(\partial_t^2 - \partial_x^2)\, u = \frac{2u}{t^2}, \ t \in]0, T[, \ x \in R, \tag{3.8}$$

имеет вид

$$u(t, x) = \frac{g_1(t+x) + g_2(t-x)}{t} - g_1'(t+x) - g_2'(t-x), \tag{3.9}$$

где g_1, g_2—произвольные дифференцируемые функции.

Непосредственным вычислением получаем

$$\lim_{t\to+0} W(u, \beta_1) = 3(g_1(x) + g_2(x)), \ \beta_1 = t^2, \tag{3.10}$$

$$W(u, \beta_2) = -\frac{g_1'(t+x) + g_2'(t-x)}{3t}, \ \beta_2 = -\frac{1}{3t}, \tag{3.11}$$

откуда следует, что $|W(u, \beta_2)| \to \infty$ при $t \to +0$ и задача (3.8), (3.5) с „чистыми" вронскианами неразрешима. Если данные ставить произвольно, но так, чтобы получались конечные пределы, например

$$\lim_{t\to+0} W(u, \beta_1) = \Phi_1(x), \ \lim_{t\to+0} t\, W(u, \beta_2) = \Phi_2(x),$$

то и такая задача не всегда разрешима—необходимы условия согласования:

$$\Phi_1'(x) + g\,\Phi_2(x) = 0.$$

Из (3.6) следует, что уравнение (3.8) попадает в область Π_2, несмотря на то, что $\nu = \frac{3}{2} \in B$ (соответствующее значение $\rho = 2$ не выбрасывается из области Π_2 в силу однородности (3.8) и замечания 2.8). По теореме I начальная задача (3.8), (2.12), (3.7) однозначно разрешима.

Непосредственным вычислением убеждаемся, что единственное решение уравнения (3.8) с начальными условиями

$$\lim_{t\to+0} W(u,\ t^2)=\Phi_1(x),\ \Phi_1(x)\in C^3, \tag{3.12}$$

$$\lim_{t\to+0}\left\{W\left(u,-\frac{1}{3t}\right)+W\left(u_{xx},\frac{1}{6t}\right)\right\}=\Phi_2(x), \tag{3.13}$$

имеет вид

$$u(t,\ x)=\frac{\Phi_1(x-t)}{3}+\frac{\Phi_1'(x-t)}{3t}+\int\limits_{x-t}^{x+t}\frac{(x-y)^2-t^2}{12t}(\Phi_1'''(y)-9\Phi_2(y))\,dy, \tag{3.14}$$

аналогичный формуле Даламбера решения задачи Коши для волнового уравнения. Аналогичные формулы можно получить и для (1.7) при $\rho=k(k+1)$, $k\in Z_+$.

Пример 3.2. Уравнение

$$u_{tt}-t^{2m}u_{xx}=\frac{b}{t}u_t+\frac{\rho_1}{t^2}u,\ m>-1, \tag{3.15}$$

заменой

$$\tau=\frac{t^{m+1}}{m+1},\ \omega(\tau,\ x)=u(t,\ x)\,t^{\frac{m-b}{2}}$$

сводится к уравнению Э. П. Д:

$$\omega_{\tau\tau}-\omega_{xx}=\frac{\rho}{\tau^2}\omega,\quad \rho=\frac{4\rho_1+b(b+2)-m(m+2)}{4(m+1)^2}, \tag{3.16}$$

поэтому теорема 2 справедлива и для уравнения (3.15). В частности, при $m=\rho_1=0$ уравнение (3.15) принимает вид

$$u_{tt}-u_{xx}=\frac{b}{t}u_t. \tag{3.17}$$

Ф. с. р. ассоциированного уравнения $\left(\partial_t^2-\frac{b}{t}\right)\beta=0$ (сравнить с (1.6)) имеет вид

$$\beta_1=1,\ \beta_2=\begin{cases}\dfrac{t^{b+1}}{b+1}, & b\neq-1,\\ \ln t, & b=-1,\end{cases}\qquad W(\beta_1,\ \beta_2)=\begin{cases}t^b, & b\neq-1,\\ 1, & b=-1.\end{cases} \tag{3.18}$$

Поэтому из $u\in C^\infty$ и $b\in Z_+$ следует, что в (4.2) $C_2\equiv0$ и задача (3.17) с начальным условием

$$\lim_{t\to+0}\frac{W(u,\ \beta_2)}{W(\beta_1,\ \beta_2)}=u(+0,x)=\Phi_2(x) \tag{3.19}$$

однозначно разрешима в классе C^∞-функций. Это согласуется с работой [6], в которой доказана однозначная разрешимость задачи (3.17), (3.19) при $b\notin Z_+$ в классе C^∞-функций.

Если в (3.17) $b \in]-3, 1[$, то мы попадаем в область Π_1, причем если $|b| < 1$, то из (3.18) задача (1.5) принимает вид

$$\lim_{t \to +0} \frac{W(u, \beta_1)}{W(\beta_1, \beta_2)} = -\lim_{t \to +0} \frac{u_t}{t^b} = \Phi_1(x),$$
$$\lim_{t \to +0} \frac{W(u, \beta_2)}{W(\beta_1, \beta_2)} = u(+0, x) = \Phi_2(x), \tag{3.20}$$

и совпадает с весовой постановкой работ [1]—[4].

Если в (3.15) $\rho_1 = b = 0$ и $m > 0$, то опять попадаем в область Π_1 и данные (3.5) преобразованием $\omega = u \cdot t^{m/2}$ переходят в обычные данные Коши.

Пример 3.3. Для уравнения

$$u_{tt} - u_{xx} + \frac{\beta}{t^\gamma} u = 0, \ \beta \in R_+, \ \gamma > 2, \tag{3.21}$$

выполнены все условия теоремы 1 и замечания 2.1. Если $\beta \in \mathbf{C} \setminus R_+$, то нарушены условия (2.1), (2.2) теоремы 1.

§ 4. Формальный вывод начальных условий

Уравнение (1.1) применением преобразования Фурье

$$v(t, \xi) = \hat{u}(t, \xi) \equiv \int e^{-ix\xi} u(t, x)\, dx, \tag{4.1}$$

сводится к уравнению (1.3), общее решение которого имеет вид

$$v(t, \xi) = C_1(\xi)\, \varphi_1(t, \xi) + C_2(\xi)\, \varphi_2(t, \xi) + \hat{\varkappa}(t, \xi), \tag{4.2}$$

где $C_{1,2}(\xi)$—произвольные функции, $\hat{\varkappa}$ — частное решение уравнения (1.3), а $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$—ф. с. р. уравнения (1.4), такая что

$$W(\varphi_1(t, \xi), \varphi_2(t, \xi)) \equiv 1. \tag{4.3}$$

Для уравнения (1.1) за счет выбора ф. с. р. всегда можно добиться выполнения условия (4.3), тогда как для более общих уравнений (см. пример 3.2) этого добиться невозможно. Для наших целей достаточно потребовать, чтобы $W(\varphi_1, \varphi_2)$ не зависело от ξ и не обращалось в нуль при $t \in]0, T]$.

Идея вронскианной постановки (1.2) начальной задачи для (1.1) возникает из следующих рассуждений. Дифференцируя по t представление (4.2) получаем систему

$$C_1 \varphi_1 + C_2 \varphi_2 = v - \hat{\varkappa}, \ C_1 \varphi_{1t} + C_2 \varphi_{2t} = v_t - \hat{\varkappa}_t,$$

разрешая которую относительно C_1 и C_2, получаем

$$C_1(\xi) = \frac{W(v - \hat{\varkappa}, \varphi_2)}{W(\varphi_1, \varphi_2)}, \ C_2(\xi) = \frac{W(\varphi_1, v - \hat{\varkappa})}{W(\varphi_1, \varphi_2)}. \tag{4.4}$$

Из этих формул следует, что если задавать данные в виде (1.2), то

$$C_1(\xi)=\Phi_2(\xi),\ C_2(\xi)=-\Phi_1(\xi), \tag{4.5}$$

и следует ожидать, что в такой постановке начальная задача для уравнения (1.1) будет однозначно разрешима в подходящих пространствах.

Замечание 4.1. Из представления (4.2) следует, что варьируя данные $\widehat{\Phi}_j(\xi)$ мы получим все решения уравнений (1.3) и (1.1), если прямое и обратное преобразование Фурье имеют смысл. Последнее следует из того, что в условиях теоремы 1 функции $\varphi_j(t,\ \xi)$ являются распределениями умеренного роста по ξ (см. лемму 5.2).

Применив к (4.2) обратное преобразование Фурье получим следующую формальную формулу для решения задачи (1.1), (1.2):

$$u(t,\ x)=\int e^{i\xi(x-y)}\left[\Phi_2(y)\,\varphi_1(t,\ \xi)-\Phi_1(y)\,\varphi_2(t,\ \xi)+\right.$$

$$\left.+\int_0^t G(t,\ \tau,\ \xi)\,f(\tau,\ y)\,d\tau\right]\frac{dy\,d\xi}{(2\pi)^n}. \tag{4.6}$$

Для обоснования (4.6) нам предстоит выяснить каким классам должны принадлежать функции f, Φ_1, Φ_2, чтобы решение (4.6) имело смысл и принадлежало пространству $C^2(H^q)$. Для этого нам понадобятся двойные асимптотики (при $|\xi|\to+\infty$ и $t\to+0$) функций $\varphi_j(t,\ \xi)$ из ядра оператора $\widehat{P}$.

§ 5. Двойные асимптотики для ф. с. р.

Рассмотрим уравнение

$$\psi_{tt}(t)-Q(t)\,\psi(t)=0,\ t\in\,]0,\ T[. \tag{5.1}$$

Пусть функция $Q(t)$ комлекснозначна, дважды непрерывно дифференцируема на $]0,\ T[$ и удовлетворяет условиям

$$Q(t)\neq 0,\ t\in\,]0,\ T[, \tag{5.2}$$

существует ветвь корня $\sqrt{Q}$ класса $C^2(]0,\ T[)$ такая, что

$$\operatorname{Re}\sqrt{Q}\leqslant 0,\ t\in\,]0,\ T[. \tag{5.3}$$

Введем обозначения

$$S(t_0,\ t)=\int_{t_0}^t\sqrt{Q(\tau)}\,d\tau,$$

$$\rho(t_0,\ t)=\left|\int_{t_0}^t\left|\left(\frac{Q_{\tau\tau}}{Q(\tau)}-\frac{5\,Q_\tau^2}{4\,Q^3}\right)\frac{1}{\sqrt{Q(\tau)}}\right|\frac{d\tau}{8}\right|, \tag{5.4}$$

$$\delta_1(t_0,\ t)=2\,(\exp\{\rho(t_0,\ t)\}-1),\ \delta_j(t)\equiv\delta_j(0,\ t).$$

$$\delta_2(t_0, t) = \delta_1(t_0, t) + (1 + \delta_1(t_0, t))\left|\frac{Q_t}{4Q^{3/2}}\right|,$$

$$\psi_1^0(t) = [Q(t)]^{-\frac{1}{4}} \exp\{S(t, T)\},$$

$$\psi_2^0(t) = [Q(t)]^{-\frac{1}{4}} \exp\{-S(t, T)\}.$$

Хорошо известна (см., например, [9]) следующая

Лемма 5.1. *В условиях* (5.2), (5.3) *и*

$$\rho(0, t) < \infty, \quad t \in]0, T[, \tag{5.5}$$

$$\rho(t, T) < \infty, \quad t \in]0, T[, \tag{5.6}$$

уравнение (5.1) *имеет решения* $\psi_{1,2}(t)$ *такие, что при* $t \in]0, T[$, $j = 1, 2$

$$\left|\frac{\psi_j(t)}{\psi_j^0(t)} - 1\right| \leqslant \delta_1(t, T\delta_{j2}), \left|\frac{\psi_{jt}}{\sqrt{Q}\,\psi_j^0} - (-1)^j\right| < \delta_2(t, T\delta_{j2}). \tag{5.7}$$

Замечание 5.1. Если условия (5.3), (5.6) леммы 5.1 заменить условием

$$\operatorname{Re}\sqrt{Q(t)} \equiv 0, \tag{5.8}$$

то будут справедливы оценки (5.7) при $j = 1$ и

$$\left|\frac{\psi_2}{\psi_2^0}(t) - 1\right| \leqslant \delta_1(t), \left|\frac{\psi_{2t}}{\sqrt{Q}\,\psi_2} - 1\right| \leqslant \delta_2(t). \tag{5.9}$$

Замечание 5.2. Функции $\psi_{1,2}$, существование которых утверждается в лемме 5.1, будут линейно независимы, если

$$\lim_{t \to +0} \frac{|Q_t|}{Q^{3/2}} = \lim_{t \to +0} \rho(0, t) = 0. \tag{5.10}$$

Доказательство леммы 5.1 мы опускаем.

Полагая

$$Q = Q(t, \xi) \equiv -|\xi|^2 - a(t), \tag{5.11}$$

из формулы (3.2) выбором соответствующей ветви корня имеем

$$-\operatorname{Re}\sqrt{Q} = \operatorname{Im}\sqrt{|\xi|^2 + a} = \sqrt{\frac{|a + |\xi|^2| - \operatorname{Re} a - |\xi|^2}{2}},$$

откуда

$$0 \leqslant -\operatorname{Re}\sqrt{Q} \ll \frac{|\operatorname{Im} a(t)|}{\sqrt{\operatorname{Re} a(t) + |a(t)|}}\,^{*}, \tag{5.12}$$

на подмножестве

$$T_0^* = \{(t, x = 0, \tau = 0, \xi) = (t, \xi), \ t \in]0, T[, \ \xi \in (R^n)'\}$$

кокасательного расслоения T^*G.

---

*) Если f, g—функции на пространстве X, то следуя И. М. Виноградову, мы будем писать $f \ll g$, если существует постоянная $c > 0$ такая, что $|f(x)| < c|g(x)|$ для всех $x \in X$.

Из (1.1), (2.1) следует $|a(t)| \geqslant 1$ и оценки

$$|a(t)| + |\xi|^2 \ll Q(t, \xi) \ll |a(t)| < \xi >^2. \tag{5.13}$$

Из (2.3) следует (5.10), откуда, в свою очередь, следует, что по $\varepsilon > 0$ можно выбрать $T > 0$ столь малым, что при $t \in]0, T[$, $j = 1, 2$ имеем $\delta_j(t) < \varepsilon$.

Лемма 5.2. *В условиях теоремы I при $k = 0, 1, 2$, $j = 1, 2$ на T_0^* справедливы оценки*

$$< \xi >^{2l} \ll |a(t)|^{\frac{1}{4} - \frac{k}{2}} |\partial_t^k \varphi_j(t, \xi)| \ll < \xi >^{2\alpha}, \tag{5.14}$$

$$|a(t)|^l \ll < \xi >^{\frac{1}{2} - k} |\partial_t^k \varphi_j(t, \xi)| \ll |a(t)|^\sigma, \tag{5.15}$$

здесь σ определяется формулой (2.15), *а* $l = -\delta_{0k}/4$.

Для ф. с. р. (β_1, β_2) уравнения (1.6) из леммы 5.1 при $Q = -a$ получаем на $]0, T[$ оценки

$$1 \ll |a(t)|^{\frac{1}{4} - \frac{k}{2}} |\partial_t^k \beta_j| \ll 1, \ k = 0, 1, 2, \ j = 1, 2. \tag{5.16}$$

Дифференцируя по t представление (4.2), ввиду (2.9) имеем

$$\partial_t^k v = \widehat{\Phi}_2 \partial_t^k \varphi_1 - \widehat{\Phi}_1 \partial_t^k \varphi_2 + \delta_{k2} \widehat{f} + \int_0^t [\partial_t^k G(t, \tau, \xi)] \widehat{f}(\tau, \xi)\, d\tau. \tag{5.17}$$

Из (2.9′), (4.3) и леммы 5.2 на T_0^* при $k = 0, 1, 2$ иемем

$$\partial_t^k G(t, \tau, \xi) \ll \left| \frac{a^{2k-1}(t)}{a(\tau)} \right|^{1/4} < \xi >^{2\alpha}, \tag{5.18}$$

$$\partial_t^k (G(t, \tau, \xi) \ll |a(t)|^\sigma < \xi >^{k-1}. \tag{5.19}$$

Отсюда и из (5.17) получаем на T_0^* при $k = 0, 1, 2$ оценки

$$\partial_t^k v \ll \delta_{k2} |\widehat{f}| + |a|^{\frac{k}{2} - \frac{1}{4}} \left(|\widehat{\Phi}_1| + |\widehat{\Phi}_2| + \int_0^t \frac{|\widehat{f}(\tau, \xi)|}{\sqrt[4]{|a(\tau)|}}\, d\tau \right) < \xi >^{2\alpha}, \tag{5.20}$$

$$\partial_t^k v \ll \delta_{k2} |\widehat{f}| + |a|^\sigma < \xi >^{k-1} \left(\sqrt{< \xi >} (|\widehat{\Phi}_1| + |\widehat{\Phi}_2|) + \int_0^t |\widehat{f}(\tau, \xi)|\, d\tau \right). \tag{5.21}$$

Из этих оценок и формулы Планшереля получаем при $k = 0, 1, 2$

$$\|\partial_t^k u\|_{q-2\alpha}^2 \ll \delta_{k2} \|f\|_{q-\frac{3}{2}}^2 + |a(t)|^{k - \frac{1}{2}} f_q^2(t), \tag{5.22}$$

$$\|\partial_t^k u\|_{q+1-k}^2 \ll \delta_{k2} \|f\|_{q+1-k}^2 + |a(t)|^{2\alpha} \bar{I}_q(t), \tag{5.23}$$

$$\bar{I}_q(t) \equiv \|\Phi_1\|_{q+\frac{1}{2}}^2 + \|\Phi_2\|_{q+\frac{1}{2}}^2 + \int_0^t \|f(\tau)\|_q^2\, d\tau.$$

Оценки (2.5) вытекают из (5.22) и неравенства $2\alpha \leqslant k$.

§ 6. Упрощение начальных условий. Доказательство теоремы 1

Лемма 6.1. *В условиях* (2.1)—(2.4) *справедливы оценки*

$$\left|\langle\xi\rangle^s \frac{W(x, \varphi_j)}{W(\varphi_1, \varphi_2)}\right|^2 \ll \int_0^t |f(\tau)|^2_{s-\frac{1}{2}}\, d\tau, \quad j=1, 2, \tag{6.1}$$

$$|\langle\xi\rangle^s W(v, \varphi_j - \beta_j)|^2 \ll t\, f^2_{s+\frac{5}{2}}(t), \quad j=1, 2, \tag{6.2}$$

а если вместо (2.2) *выполнено* (1.9), *то*

$$|W(u, \beta_j - \gamma_j)|^2_s \ll o(1)\, f^2_{s+\frac{1}{2}}(t), \text{ при } t \to +0. \tag{6.3}$$

Доказательство. Оценки (6.1) следуют из (5.15) и формул ($j=1, 2$)

$$W(\varphi_j(t, \xi), G(t, \tau, \xi)) = \varphi_j(\tau)\, W^t(\varphi_1, \varphi_2), \tag{6.4}$$

$$\frac{W(v, \varphi_j)}{W(\varphi_1, \varphi_2)} = \widehat{\Phi}_j + \frac{W(\widehat{x}, \varphi_j)}{W(\varphi_1, \varphi_2)} = \widehat{\Phi}_j - \int_0^t \varphi_j(\tau, \xi)\, \widehat{f}(\tau, \xi)\, d\tau. \tag{6.5}$$

Оценки (6.2) следуют из формул

$$\widehat{P}(\beta_j - \varphi_j) = |\xi|^2 \beta_j(t), \tag{6.6}$$

$$W(v, \beta_j - \varphi_j) = |\xi|^2 \int_0^t W^t(G(t, \tau, \xi), v(t, \xi))\, \beta_j(\tau)\, d\tau, \tag{6.7}$$

$$W^t(G, v) \equiv G v_t - G_t v.$$

Замечание 6.1. Из леммы 6.1 следует, что правые части оценок (6.1), (6.2) стремятся к нулю при $t \to +0$, поэтому данные (1.2) и (1.8) эквивалентны. Аналогично, в условии (1.9) эквивалентны данные (1.8) и (2.6).

Доказательство теоремы 1. Итак, в условиях (2.1)—(2.4) справедливы оценки (5.20), из которых следует, что v принадлежит пространству умеренных распределений по ξ и к (4.2) можно применить обратное преобразование Фурье, получив при этом единственное решение $u \in C^2(H^{q-2})$ (по формуле (4.6)) задачи (1.1), (1.2), которая, в силу замечания 6.1, эквивалентна задаче (1.1), (1.8). Замечание 2.1 следует из замечания 6.1.

Доказательство замечания 2.3. Заменой в формуле (5.17) $f(t, x) \to f(t, x) - b(t, x)\, u(t, x)$, в силу формулы Планшереля и (5.14), (5.18), имеем оценки

$$|u|^2_q \ll |a(t)|^{-\frac{1}{2}} \left(f^2_q(t) + \int_0^t \frac{|b(\tau)|^2_q}{\sqrt{|a(\tau)|}} |u|^2_q(\tau)\, d\tau \right), \tag{6.8}$$

из которых, ввиду (2.7), применением леммы Гронуолла, можно выбросить последнее слагаемое правой части. Таким образом, из (5.17) получается оценка (2.5).

Покажем также, что при замене $f \to f - b\,u$ данные (1.2) не изменяются. Из (6.5) имеем

$$|<\xi>^s(\widehat{\Phi}_j - W(\widehat{u}, \varphi_j))|^2 \ll \int_0^t \frac{|f(\tau)|_s^2}{\sqrt{|a(\tau)|}}\,d\tau +$$

$$+ (|\Phi_1|_s^2 + |\Phi_2|_s^2) \int_0^t \frac{|b(\tau)|_s^2}{|a(\tau)|}\,d\tau \to 0, \text{ при } t \to +0.$$

§ 7. Уравнение Эйлера—Пуассона—Дарбу

Рассмотрим уравнение (1.7) при $\rho \in \mathbf{C}$, $(t, x) \in G$. Известно, что ф. с. р. уравнения

$$\widehat{P}_{\text{э}}\varphi \equiv \left(\partial_t^2 + |\xi|^2 - \frac{\rho}{t^2}\right)\varphi(t, \xi) = 0 \tag{7.1}$$

выписывается при $\nu \in \mathbf{C} \setminus Z$ через функции Бесселя (J_ν) первого рода

$$\begin{aligned} \varphi_1(t, \xi) &= \Gamma(\nu+1)\left|\frac{2}{\xi}\right|^\nu \sqrt{t}\, J_\nu(t|\xi|), \quad \nu \in \mathbf{C} \setminus Z_-, \\ \varphi_2(t, \xi) &= \frac{\Gamma(-\nu)}{2}\left|\frac{\xi}{2}\right|^\nu \sqrt{t}\, J_{-\nu}(t|\xi|), \quad \nu \in \mathbf{C} \setminus Z_+, \end{aligned} \tag{7.2}$$

где Γ — гамма функция Эйлера, а постоянные подобраны таким образом, что выполнено условие (4.3).

Пользуясь известным разложением в ряд функции Бесселя для коэффициентов разложения

$$\varphi_j(t, \xi) = \sum_{q=0}^{\infty} \beta_{jq}(t)\,|\xi|^{2q}, \quad j = 1, 2, \tag{7.3}$$

получаем формулы (2.11′) и

$$\beta_{1q}(t) = \frac{t^{2q+\frac{1}{2}+\nu}}{(-4)^q\, q!\,(q+\nu)\cdots(2+\nu)(1+\nu)}, \quad q = 0, 1, \cdots. \tag{7.4}$$

Если $\nu \in Z$, то вместо (7.3) возникают присоединенные степенные ряды

$$\sum_{q=0}^{\infty} (\beta_q(t) + \gamma_q(t)\,|\xi|^{2\nu} \ln|\xi|)\,|\xi|^{2q},$$

поэтому в начальных условиях (2.13) вместо целых степеней оператора Лапласа возникнут псевдодифференциальные операторы с символами $|\xi|^{2q+2\nu} \ln|\xi|$. Эти случаи здесь рассматриваться не будут, хотя аналог теоремы 2 справедлив и в этом случае.

Общее решение уравнения

$$\widehat{P}_{\text{э}} v(t, \xi) = \widehat{f}(t, \xi), \tag{7.5}$$

полученного применением к (1.7) преобразования Фурье, имеет вид

$$v(t, \xi) = \widehat{\Phi}_2(\xi)\,\varphi_1(t, \xi) - \widehat{\Phi}_1(\xi)\,\varphi_2(t, \xi) + v_0(t, \xi) + v_R(t, \xi), \tag{7.6}$$

где $\hat{\Phi}_j(\xi)$—произвольные функции, (φ_1, φ_2)—ф. с. р. уравнения (7.1), а v_0, v_R получаются регуляризацией частного решения неоднородного уравнения (7.5):

$$v_0(t, \xi) = \int_0^t G(t, \tau, \xi)\, \tau^m \hat{f}_m(\tau, \xi)\, d\tau, \tag{7.7}$$

$$v_R(t, \xi) = \sum_{p=0}^{m-1} \left[\int \tau^p G(t, \tau, \xi)\, d\tau \right]_{\tau=t} \frac{\partial_t^p \hat{f}(0, \xi)}{p!}, \tag{7.8}$$

где G, $\hat{f}_m$ вычисляются по формулам (2.9′), (2.11).

Введем обозначения

$t_1(\xi) = \dfrac{M}{\langle \xi \rangle}$, M—большая постоянная,

$$\omega_j = k - \frac{1}{2} + (-1)^j \operatorname{Re} \nu, \quad \lambda_{jk} = \max\left\{0,\ k - \frac{1}{2} + (-1)^j \operatorname{Re} \nu\right\}. \tag{7.9}$$

Лемма 7.1. *При* $\nu \in \mathbf{C}_+ \setminus Z_+$, $(t, \xi) \in T_0^*$, $k = 0, 1, 2$, $j = 1, 2$ *для ф. с. р. уравнения* (7.1) *справедливы оценки*

$$\partial_t^k \varphi_j(t, \xi) \ll \begin{cases} t^{-\omega_j}, & t \leqslant t_1 \\ \langle \xi \rangle^{\omega_j}, & t \geqslant t_1 \end{cases} \tag{7.10}$$

$$\partial_t^k \varphi_j(t, \xi) \ll \left(\frac{\langle \xi \rangle}{t}\right)^{\lambda_{jk}}. \tag{7.11}$$

Доказательство. Оценки (7.10) при $t \geqslant t_1$ следуют из известных асимптотических формул для функций Бесселя, а при $t \leqslant t_1$ следуют из разложений (7.3). Оценки (7.11) вытекают из (7.10).

Лемма 7.2. *При* $\nu \in \mathbf{C}_+ \setminus Z_+$, $(t, \xi) \in T_0^*$, $k = 0, 1, 2$ *для функции Грина* G *справедливы оценки*

$$\partial_t^k G \ll \begin{cases} \tau^{\frac{1}{2} - \operatorname{Re} \nu} t^{-\omega_1} + \tau^{\frac{1}{2} + \operatorname{Re} \nu} t^{-\omega_2}, & \tau \leqslant t \leqslant t_1, \\ \langle \xi \rangle^{\omega_2} \tau^{\frac{1}{2} + \operatorname{Re} \nu} + \langle \xi \rangle^{\omega_1} \tau^{\frac{1}{2} - \operatorname{Re} \nu}, & \tau \leqslant t_1 \leqslant t, \\ \langle \xi \rangle^{k-1}, & \tau \geqslant t_1,\ t \geqslant t_1, \end{cases} \tag{7.12}$$

$$\partial_t^k G(t, \tau, \xi) \ll \frac{1}{\tau^{\lambda_{2k}}} \left(\frac{\langle \xi \rangle}{t}\right)^{\lambda_{2k}}. \tag{7.13}$$

Лемма 7.2 следует из леммы 7.1.

Из представления (7.6) и лемм 7.1, 7.2 при $\nu \in \mathbf{C}_+ \setminus Z_+$, $(t, \xi) \in T_0^*$, $k = 0, 1, 2$ вытекают следующие оценки для решений задач (7.5), 1.2):

$$\partial_t^k v(t, \xi) \ll \delta_{k2} |\hat{f}(t, \xi)| + \left(\frac{\langle \xi \rangle}{t}\right)^{\lambda_{1k}} |\hat{\Phi}_2| + \left(\frac{\langle \xi \rangle}{t}\right)^{\lambda_{2k}} F, \tag{7.14}$$

$$P \equiv |\widehat{\Phi}_1(\xi)| + \sum_{p=0}^{m-1} \frac{|\partial_t^p \widehat{f}(0, \xi)|}{p!} + \left(\int |\widehat{f}_m(\tau)|^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}},$$

из которых следует

Лемма 7.3. *При* $\nu \in \mathbf{C}_+ \setminus Z_+$, $t \in]0, T[$, $k = 0, 1, 2$, $q \geqslant 0$ *для решений задач* (1.7), (1.2) *справедливы оценки*

$$\|\partial_t^k u\|_q^2 \ll t^{-2\lambda_{2k}} K_{q+\lambda_{2k}} + t^{-2\lambda_{1k}} \|\Phi_2\|_{q+\lambda_{1k}}^2 + \delta_{k2} \|f\|_q^2, \tag{7.15}$$

$$\|\partial_t^k u\|_q^2 \ll t^{-4\alpha-2\operatorname{Re}\nu} K_{q+k+\operatorname{Re}\nu} + t^{-4\alpha} \|\Phi_2\|_{q+k}^2 + \delta_{k2} \|f\|_q^2, \tag{7.16}$$

здесь

$$K_q \equiv \|\Phi_1\|_q^2 + \int_0^t \|f_m(\tau)\|_q^2 d\tau + \sum_{p=0}^{m-1} \|\partial_t^p f(0)\|_q^2. \tag{7.16'}$$

Введем обозначения

$$\gamma_{lr} = \frac{l+\nu-r}{\left(2l+p+\frac{3}{2}+\nu\right)\left(2r+p+\frac{3}{2}-\nu\right) r!\, l!\, (-4)^{r+l} (l+\nu)\cdots(1+\nu)(r-\nu)\cdots(1-\nu)\nu},$$

$$I_N = \sum_{p=0}^{m-1} \sum_{l+r=0}^{N} \frac{\gamma_{lr}}{p!} |t\xi|^{2(r+l)} t^{p+2} \partial_t^p \widehat{f}(0, \xi), \tag{7.17}$$

$$\widetilde{\Pi}_q = K_q + \|\Phi_2\|_q^2.$$

Лемма 7.4. *В условиях теоремы 2 справедливы оценки*

$$|\langle\xi\rangle^s W(v_0, \varphi_j)|^2 \ll o(1) \cdot \sup_\tau \|f_m(\tau)\|_s^2, \quad t \to +0, \quad j = 1, 2, \tag{7.18}$$

$$\|\langle\xi\rangle^s W(v_R, \varphi_1)\|^2 \ll t^2 \sum_{p=0}^{m-1} \|\partial_t^p f(0)\|_s^2, \tag{7.19}$$

$$\left\|\langle\xi\rangle^s W\left(v_R, \varphi_2 - \sum_{q=0}^{m} \beta_{2q} |\xi|^{2q}\right)\right\|^2 \ll t^2 \sum_{p=0}^{m-1} \|\partial_t^p f(0)\|_{2m+s+\operatorname{Re}\nu+\frac{3}{2}}^2, \tag{7.20}$$

$$\left\|\langle\xi\rangle^s W\left(v_R - I_N, \sum_{q=0}^{m} \beta_{2q} |\xi|^{2q}\right)\right\|^2 \ll o(1) \sum_{p=0}^{m-1} \|\partial_t^p f(0)\|_{2(m+N+\operatorname{Re}\nu)+s+3}^2, \tag{7.21}$$

$$\|\langle\xi\rangle^s W(v, \varphi_1 - \beta_1)\|^2 \ll t \widetilde{\widetilde{\Pi}}_{3\operatorname{Re}\nu+s+\frac{5}{2}}, \tag{7.22}$$

$$\left\|\langle\xi\rangle^s W\left(v, \varphi_2 - \sum_{q=0}^{m} \beta_{2q} |\xi|^{2q}\right)\right\|^2 \ll t^{2(m+1-\operatorname{Re}\nu)} \widetilde{\Pi}_{2m+3\operatorname{Re}\nu+s+3}. \tag{7.23}$$

Доказательство. Оценки (7.18), (7.19) следуют из леммы 7.1 и формул

$$W(\varphi_j, v_0) = \int_0^t \tau^m \varphi_j(\tau, \xi) \widehat{f}_m(\tau, \xi)\, d\tau,$$

$$W(\varphi_j, v_R) = \sum_{p=0}^{m-1} \left[\int \tau^p \varphi_j(\tau, \xi)\, d\tau\right]_{\tau=t} \frac{\partial_t^p \widehat{f}(0)}{p!}.$$

Оценки (7.20) следуют из (2.9) и соотношений

$$\widehat{P}_{\ni}\beta_{jq}=|\xi|^2\beta_{jq}-\beta_{j,q-1},\ q=1,\ 2,\ 3,\cdots,$$

$$\widehat{P}_{\ni}\left(\sum_{q=0}^{m}\beta_{2q}|\xi|^{2q}-\varphi_2\right)=|\xi|^{2m+2}\beta_{2m},$$

$$W^{\tau}(\varphi_1,\ \varphi_2)\,W(G(t,\ \tau),\ G(t,\ y))=W^{t}(\varphi_1,\ \varphi_2)\,G(y,\ \tau),$$

$$W\left(v_R,\ \varphi_2-\sum_{q=0}^{m}|\beta_{2q}|^{2q}\right)=\sum_{p=0}^{m-1}\frac{|\xi|^{2m+2}}{p!}\times$$

$$\times\left[\int\tau^p\int_0^t G(y,\ \tau)\,\beta_{2m}(y)\,dy\,d\tau\right]_{\tau=t}\partial_t^p\widehat{f}(0,\ \xi).$$

Оценки (7.21)следуют из формул

$$\widehat{P}_{\ni}I_N=\sum_{p=0}^{m-1}\sum_{l+r=0}^{N}\frac{\gamma_{lr}}{p!}|t\xi|^{2(r+l)}\,t^{p+2}\partial_t^p\widehat{f}(0,\ \xi)\left[|\xi|^2+\frac{\left(p+2l+2r+\frac{3}{2}\right)^2-\nu^2}{t^2}\right]=$$

$$=(1+\widetilde{\gamma}\,|t\xi|^{2N+2})\sum_{p=0}^{m-1}\frac{\partial_t^p\widehat{f}(0,\ \xi)}{p!}\,t^p,$$

$$\widetilde{\gamma}=\gamma_{N0}+\cdots+\gamma_{0N},$$

$$W\left(v_R-I_N,\ \sum_{q=0}^{m}\beta_{2q}|\xi|^{2q}\right)=\sum_{q=0}^{m}\sum_{p=0}^{m-1}\widetilde{\gamma}\,|\xi|^{2q}\frac{\partial_t^p\widehat{f}(0,\ \xi)}{p!}\times$$

$$\times\int_0^t|\tau\xi|^{2N+2}\tau^p\,W^t(G(t,\ \tau),\ \beta_{2q}(t))\,d\tau.$$

Наконец, оценки (7.22); (7.23) вытекают из формул

$$\beta_1-\varphi_1=|\xi|^2\int_0^t G(t,\ \tau,\ \xi)\,\beta_1(\tau)\,d\tau,$$

$$W\left(v,\ \varphi_2-\sum_{q=0}^{m}\beta_{2q}|\xi|^{2q}\right)=|\xi|^{2m+2}\int_0^t W(v(t,\ \xi),\ G(t,\ y,\ \xi))\,\beta_{2m}(y)\,dy.$$

Справедлива формула

$$W\left(I_N,\sum_{q=0}^{m}\beta_{2q}|\xi|^{2q}\right)=t^{\frac{3}{2}-\nu}\sum_{p=0}^{m-1}\sum_{l+r=0}^{N}\sum_{q=0}^{m}|t\xi|^{2(r+l+q)}\varkappa_{lrpq}\,t^p\,\partial_t^p f(0,\ \xi).\quad(7.24)$$

Доказательство теоремы 2. Из леммы 7.4 следует, что правые части оценок (7.8)—(7.23) стремятся к нулю при $t\to+0$. Поэтому данные (1.2), в силу (7.24), эквивалентны данным (2.12), (2.13). Теорема 2 следует из этого замечания и леммы 7.3.

§ 8. Разрешимость смешанной задачи

Решение смешанной задачи для уравнения (1.1) мы построим методом разделения переменных. Разложим функцию $f(t, x)$ в ряд Фурье по собственным функциям $v_r(x)$ задачи Дирихле для оператора Лапласа (см. (2.19)):

$$f(t, x) = \sum_{r=1}^{\infty} f_r(t)\, v_r(x), \tag{8.1}$$

где коэффициенты Фурье f_r вычисляются по формулам (2.22).

Найдем решение уравнения (1.1), имеющее вид $u = u_r(t)\, v_r(x)$ и удовлетворяющее краевому условию (2.25). Для определения функций u_r и v_r стандартным способом получаем уравнения

$$\Delta v_r = -\lambda^2 v_r, \tag{8.2}$$

$$[\partial_t^2 + \lambda^2 + a(t)]\, u_r(t) = f_r(t), \tag{8.3}$$

из которых находим, что $\lambda = \lambda_r$ и

$$u_r(t) = A_r \varphi_{1r}(t) + B_r \varphi_{2r}(t) + \varkappa_r(t), \tag{8.4}$$

где A_r, B_r—произвольные постоянные, а

$$\varkappa_r(t) = \int_0^t G_r(t, \tau)\, f_r(\tau)\, d\tau, \tag{8.5}$$

$$G_r(t, \tau) = \frac{\varphi_{1r}(\tau)\, \varphi_{2r}(t) - \varphi_{1r}(t)\, \varphi_{2r}(\tau)}{W_t(\varphi_{1r}, \varphi_{2r})}. \tag{8.6}$$

Подставив (8.4) в начальные условия (2.24) получим $A_r = \Phi_{2r}$, $B_r = -\Phi_{1r}$, поэтому решение задачи (1.1), (2.24), (2.25) представляется в виде формальной суммы

$$u(t, x) = \sum_{r=1}^{\infty} [\Phi_{2r} \varphi_{1r}(t) - \Phi_{1r} \varphi_{2r}(t) + \varkappa_r(t)]\, v_r(x). \tag{8.7}$$

Доказательства теорем 3, 4 мы опускаем, т. к. они аналогичны доказательствам теорем 1,2 с заменой $|\xi|$ на λ_r.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 12. III. 1986

Գ. Ռ. ՀՈՎՀԱՆՆԻՍՅԱՆ. Տրված վրոնսկիաններով սկզբնական և խառը խնդիրներ հիպերբոլական հավասարումների համար *(ամփոփում)*

Վերնագրում նշված հավասարումների համար առաջարկվում է կոշու տվյալների փոխարեն սկզբնական սինգուլյար հարթության վրա տալ որոշակի վրոնսկիաններ։

Ապացուցվում է, որ նշված խնդիրը Սոբոլևի դասերում ունի միակ լուծում։

G. R. OGANESIAN. *On the initial value and mixed problems with given vronskyans for the second order singular hyperbolic equations* (summary)

For the singular (on the initial hyperplane) second order hyperbolic equation $u_{tt} - \Delta u + a(t)\, u = f(t, x)$, $|a(+0)| = \infty$, $t \in]0, T[$, $x \in R^n$ the paper proposes to

consider initial value problem with vronskyans $\lim_{t\to 0} (\tilde{u}\varphi_{jt} - \tilde{u}_t\varphi_j) = \Phi_j(\xi)$, $j=1, 2$ instead of the usual Cauchy data. Here $\tilde{u}(t, \xi)$ is the x— Fourier transformation of the solution $u(t, x)$, (φ_1, φ_2) is a fundamental system of solutions of the equation $\varphi_{tt} + (|\xi|^2 + a(t))\varphi = 0$.

Unique solvability of this problem is proved in the Sobolev spaces. Functions $\varphi_{1,2}$ in the initial vronskyans may be replaced by JWKB approximation $\gamma_{1,2} = a^{-\frac{1}{4}}(t) \exp\left\{\pm i \int_{\tau}^{t} \sqrt{a(s)}\, ds\right.$, if certain conditions on $a(t)$ are satisfied.

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. В. Бицадзе.* Уравнения смешанного типа, М., ВИНИТИ, 1959.
2. *С. А. Терсенов.* Введение в теорию уравнений, вырождающихся на границе, Новосибирск, НГУ, 1973.
3. *А. Б. Нерсесян.* Задача Коши для симметрической гиперболической системы, вырождающейся на начальной гиперплоскости, ДАН СССР, 196, № 2, 1971, 289—292.
4. *Ф. Т. Барановский.* Задача Коши с видоизмененными начальными данными для обобщенного уравнения Эйлера—Пуассона—Дарбу, Матем. сб., 120 (162), 1983, 147—163.
5. *A. Weinstein.* The singular solutions and the Cauchy problem for generalized Tricomi equations, Commun. pure and appl. math., VII, № 1, 1954, 105—116.
6. *H. Tahara.* Singular hyperbolic systems III. On the Cauchy problem for Fuchsian hyperbolic partial differential equations, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. A. 27, № 3, 1980, 465—507.
7. *N. Hanges.* Parametrices and local solvability for a class of singular hyperbolic operators, Commun. in part. diff. equat., 3, № 2, 1978, 105—152.
8. *Г. Р. Оганесян.* О начальной задаче с заданными вронскианами, Изв. АН АрмССР, сер. матем., 15, № 4, 1980, 292—309.
9. *М. В. Федорюк.* Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений, М., «Наука», 1983.
10. *О. А. Ладыженская.* Смешанная задача для гиперболического уравнения, М., Гостехиздат, 1953.