УДК 517.98

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

А. К. МАТЕВОСЯН

О РАЗЛОЖЕНИИ ПО МАТРИЧНЫМ ЭЛЕМЕНТАМ ЛИНЕЙНЫХ
 ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ОПЕРАТОРОВ ОБОБЩЕННОГО СДВИГА

1°. В настоящей работе обобщаются на случай самого общего типа операторов сдвига — некоммутативные операторы обобщенного сдвига, — теоремы Петера—Вейля [1] (о полноте матричных элементов неприводимых линейных представлений топологической группы), Бохнера [2] и Колмогорова—Крамера [3] (о представлении положительно определенной на группе функции и однородного случайного процесса). Для случая коммутативных операторов обобщенного сдвига теорема Бохнера получена Б. М. Левитаном [4], а для случая сдвигов на некоммутативной группе аналоги теорем Бохнера и Колмогорова-Крамера получены А. М. Ягломом [5].

Пусть Ω — топологическое пространство, m — мера на Ω , $C(\Omega)$ — совокупность непрерывных в топологии Ω комплекснозначных функций, $L^2_m(\Omega)$ — совокупность комплекснозначных функций, имеющих интегрируемый квадрат модуля по мере m . Пусть теперь на функциях $f(t) \in C(\Omega)$ определено семейство операторов A^s , зависящих от элемента $s \in \Omega$ как от параметра, то есть каждой функции $f(t)$ ставится в соответствие функция двух переменных $A^s f(t)$, где нижний индекс t подчеркивает что оператор A^s применяется к функции $f(t)$, как к функции от переменной t . Пусть операторы A^s удовлетворяют так называемым условиям обобщенного сдвига [6]:

1. линейность,
2. существование верхнего нейтрального элемента, то есть такого элемента $s_0 \in \Omega$, что $A^{s_0} = I$, где I — единичный оператор,
3. ассоциативность — для любой функции $f \in C(\Omega)$ и любых точек $s, r, t \in \Omega$ выполняется равенство

$$A^s A^r f(t) = A^s A^r f(t),$$

4. непрерывность функции $A^s f(t)$ по совокупности переменных. Семейство таких операторов называется операторами обобщенного сдвига (о.о.с.), они были введены и изучены Б. М. Левитаном [6, 7]. Если кроме условий 1—4 выполняется также условие

5. для любой функции $f \in C(\Omega)$ и любых точек $s, r, t \in \Omega$

$$A^s A^r f(t) = A^r A^s f(t),$$

то о.о.с. называются коммутативными. Двойственным к о.о.с. называется оператор

$$R_s^t f(s) = A_s^t f(t),$$

который также является о.о.с. Семейство сопряженных операторов определяется, как обычно, из равенства

$$\int_{\Omega} A_s^t f(t) \overline{g(t)} dm(t) = \int_{\Omega} f(t) \overline{A_s^t g(t)} dm(t).$$

Ниже символы m и Ω в интегралах будем опускать.

Линейным представлением о.о.с. A^r называется матрица $E(t) = (e_{ij}(t))_{j=1}^n$ такая, что для произвольных точек $s, t \in \Omega$ выполняется равенство

$$A_s^t E(t) = E(s) \cdot E(t).$$

Элементы $e_{ij}(t)$ матрицы $E(t)$ как функции от t называются матричными элементами линейного представления $E(t)$, порядок n матрицы $E(t)$ называется степенью представления.

Пусть существует мера m , относительно которой сопряженные операторы $\tilde{A}^s$ и $\tilde{R}^s$ удовлетворяют следующим условиям (см. [6], стр. 28): для любой функции $f \in C(\Omega) \cap L_m^2(\Omega)$ и любых точек $s, r, t \in (\Omega)$

$$\tilde{A}_s^r A_s^t f(t) = A_s^r \tilde{A}_s^t f(t),$$

(1)

$$\tilde{R}_s^r A_s^t f(t) = \tilde{A}_s^r A_s^t f(t).$$

О.о.с., удовлетворяющие (1), будем называть регулярными.

Примерами о.о.с. являются операторы сдвига на топологической группе и обобщенные сдвиги Дельсарта [6]. В том случае, когда m есть двусторонне инвариантная мера Хаара, операторы сдвига на топологической группе являются регулярными. В п. 2 будет приведена общая конструкция некоммутативных регулярных о.о.с. на дискретном пространстве, существенно более общих, чем операторы сдвига на дискретной некоммутативной группе.

Условия регулярности (1) играют существенную роль при построении теории линейных представлений для о.о.с. (см. § 5—§ 7 [6]). Наложение этих же условий позволяет обобщить на случай некоммутативных о.о.с. теорему Петера-Вейля. Далее предполагается, что пространство Ω бикомпактно, а полная мера пространства $m(\Omega)$ конечна.

Теорема 1. Пусть $E^v(t) = (e_{ij}^v(t))_{i,j=1}^n$, $v \in N$, — полная система попарно неэквивалентных неприводимых представлений регулярного о.о.с., тогда функции

$$e_{ij}^v(t), \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \quad v \in N,$$

образуют полную ортогональную систему в пространстве $L_m^2(\Omega)$.

Доказательство аналогично приведенному в [1].

2°. Перейдем к каноническим представлениям обобщенных положительных определенных функций и однородных случайных процессов.

Функция $p(t) \in C(\Omega)$ называется положительно определенной относительно операций сдвига A^s , если

$$\sum_{j, k=1}^n \bar{A}_{ij}^t p(t_j) z_j z_k > 0 \quad (2)$$

для любых точек $t_1, \dots, t_n \in \Omega$ и любых комплексных чисел $z_1, \dots, z_n$. [4]. В дальнейшем для краткости выражение „относительно операций сдвига A^s “ будем опускать. Из (2) следует, что оператор, задаваемый ядром $\bar{A}_i^s p(t)$, положительно определен и поэтому является самосопряженным, то есть

$$\bar{A}_i^s p(t) = \overline{\bar{A}_i^s p(s)}.$$

Таким образом, каждая положительно определенная функция $p(t)$ задает случайный процесс $\xi(t)$ с нулевым средним и ковариационной функцией $E \xi(t) \bar{\xi}(s) = \bar{A}_i^s p(t)$.

Предложение 1. Интегральный оператор K , порожденный ядром $K(t, s) = \bar{A}_i^s p(t)$, где $p(t)$ — положительно определенная функция, перестановочен с о. о. с. A^s .

Доказательство. Из (2) и по определению сопряженного оператора

$$Kf(t) = \int \overline{\bar{A}_i^s p(s)} f(s) ds = \int \overline{p(s)} A_i^s f(s) ds,$$

тогда в силу ассоциативности о. о. с.

$$\begin{aligned} A_i^s [Kf(t)] &= \int \overline{p(s)} A_i^s A_i^t f(s) ds = \int \overline{p(s)} A_i^t A_i^s f(s) ds = \\ &= \int \overline{\bar{A}_i^t p(s)} A_i^s f(s) ds = K[A_i^t f](t). \end{aligned}$$

По предложению I случайные процессы с нулевым средним и ковариационной функцией вида $\bar{A}_i^s p(t)$, где $p(t)$ — положительно определенная функция, будем называть однородными относительно о. о. с. A^s . Такими являются и однородные в классическом смысле процессы [5].

Теорема 2. Положительно определенная функция $p(t)$ представима в виде

$$p(t) = \sum_j \text{Tr}(E^s(t) B^s), \quad (3)$$

где B^s — положительно определенные матрицы.

Доказательство. По теореме Мерсера функция $\bar{A}_i^s p(t)$ разлагается в равномерно сходящийся ряд

$$\bar{A}_i^s p(t) = \sum_i \lambda_i \varphi_i(t) \overline{\varphi_i(s)}, \quad (4)$$

где $\varphi_i(t)$ — последовательность ортонормированных собственных функций, а $\lambda_i > 0$ — последовательность соответствующих собственных значений ядра $\bar{A}_i^s p(t)$. Подставляя сюда значения для собственных функций, соответствующих равным собственным значениям λ_i с кратностью n_i , выраженные через матричные элементы линейных представлений о. о. с. A^s [6], получим

$$\bar{A}_i^s p(t) = \sum_{j=1}^{n_i} \lambda_j \sum_{k=1}^{n_i} \varphi_j^*(s_0) \overline{\varphi_k^*(s_0)} \bar{A}_i^s e_{kj}(t),$$

где s_0 — верхний нейтральный элемент для о. о. с. Из линейности операторов A^s следует

$$\bar{A}_i^s p(t) = \bar{A}_i^s [\sum Tr(E^*(t) B^*)],$$

где Tr — символ следа матрицы, а

$$B^* = \{\lambda_j \varphi_j^*(s_0) \overline{\varphi_k^*(s_0)}\}_{j,k=1}^{n_i}.$$

Так как s_0 является верхним нейтральным элементом для сопряженных о.о.с. также, то

$$p(t) = \sum Tr(E^*(t) B^*).$$

Положительная определенность матрицы B^* следует из равенства:

$$\sum_{j,k=1}^{n_i} b_{j,k}^* z_j \bar{z}_k = \left| \sum_{j=1}^{n_i} \sqrt{\lambda_j} \varphi_j^*(s_0) z_j \right|^2 \geq 0.$$

Обратно, если функция представима в виде (3) с положительно определенными матрицами-коэффициентами B^* , то она положительно определена. Теорема доказана.

Перейдем к каноническим представлениям однородных случайных процессов. Поскольку сходимость ряда (4) обеспечивает выполнение условий теоремы Карунена (см. [3]), то существует такой процесс $\zeta(i)$ с некоррелированными приращениями, что

$$\xi(t) = \sum \zeta(i) \varphi_i(t).$$

Отсюда аналогично предыдущему можно получить

$$\xi(t) = \sum Tr(E^*(t) Z^*).$$

Тогда ковариационная функция процесса $\xi(t)$

$$E \zeta(t) \overline{\zeta(s)} = \sum_{\nu, \mu} \sum_{l=1}^{n_\nu} \sum_{p,q=1}^{n_\mu} E(Z_{l\nu}^* Z_{pq\mu}^*) e_{lj}^*(t) \overline{e_{pq}(s)},$$

с другой стороны эта же функция равна

$$\bar{A}_i^s p(t) = \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{l=1}^{n_j} b_{lj}^* \sum_{r=1}^{n_l} e_{rj}^*(t) \overline{e_{rl}(s)}.$$

Приравнивая полученные выражения и учитывая ортогональность матричных элементов представлений $E \cdot (s)$, получаем

$$E(Z_{ij}^* Z_{pq}^*) = \begin{cases} b_{ip}^* & \text{когда } j = p, \quad j = q, \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

или

$$E(Z_{ij}^* Z_{pq}^*) = b_{ip}^* \delta_{j, p} \delta_{j, q}, \tag{5}$$

что по существу совпадает с «условием ортогональности», приведенным в [5]. Таким образом, доказана

Теорема 3. *Однородный случайный процесс $\xi(t)$ с нулевым средним и ковариационной функцией $\bar{A}^s p(t)$ представим в виде*

$$\xi(t) = \sum Tr(E^*(t) Z^*), \tag{6}$$

где матрицы Z^* удовлетворяют условию (5).

3°. Пусть K_N — N -мерное линейное пространство с обычным скалярным произведением элементов x и $y \in K_N$. $\{\varphi_i(t)\}_{i=1}^N$ —некоторый ортогональный базис в K_N , а $n_1, \dots, n_k \geq 1$ —некоторые целые, для которых $n_1^2 + \dots + n_k^2 = N$. Разобьем множество функций базиса на подмножества из $n_1^2, \dots, n_k^2$ функций. Расположим функции i -го подмножества в виде кубической матрицы $E^{(i)}$ размера $n_i \times n_i \times N$ с элементами

$$e_{kj}^{(i)}(t) = \varphi_{(k-1)n_i+j}^{(i)}(t),$$

$$k, j = 1, 2, \dots, n_i, \quad t = 1, 2, \dots, N,$$

где $\varphi_n^{(i)}(t)$ —функции i -го подмножества. Произведение u -го и v -го сечений $D(u)$ и $D(v)$ блочно-диагональной кубической матрицы

$$D = \text{diag}(E^{(1)}, \dots, E^{(k)})$$

будет иметь блочно-диагональный вид с блоками тех же размеров $n_i \times n_i$, и в силу ортогональности функций $\varphi_n(t)$ найдутся такие единственные коэффициенты a_{vu}^s , что

$$\sum_{r=1}^N d_{ir}(u) d_{rj}(v) = \sum_{s=1}^N a_{vu}^s p_{ij}(s).$$

Кубическая матрица $\{a_{vu}^s\}$ размера $N \times N \times N$ задает семейство операторов, которые линейно распространяются с базисных элементов на все пространство K_N . Обозначим построенные операторы через A^u :

$$A_v^u d_{ij}(v) = \sum_{r=1}^N d_{ir}(u) d_{rj}(v) \tag{7}$$

и предположим, что существует такое целое $1 \leq s_0 \leq N$, что

$$D(s_0) = I.$$

Приведем некоторые свойства построенного семейства операторов.

1. Операторы A^u линейны по определению.

2. В семействе операторов существует единичный A^0 .

3. В матричном виде действие оператора A^n можно записать как

$$A^n D(v) = D(u) \cdot D(v),$$

и так как умножение матриц ассоциативно, операторы A^n линейны, а матричные элементы составляют базис в K_N , то для любой функции f из K_N выполняется равенство

$$A_i^n A_i^r f(t) = A_i^n A_i^r f(t),$$

т.е. операторы A^n ассоциативны.

4. В общем случае операторы A^n не коммутируют. Коммутативность заведомо будет иметь место в случае $n_i = 1, i = 1, 2, \dots, k$.

5. Из определения сопряженного оператора в конечномерном пространстве следует

$$A^n d_{ik}(v) = \sum_{j=1}^N \overline{d_{ji}(u)} d_{jk}(v),$$

или в матричной форме

$$\bar{A}^n D(v) = D^*(u) D(v).$$

6. Операторы A^n удовлетворяют условию (1). Действительно,

$$A_i^n \bar{A}_i^r D(t) = A_i^n D^*(s) D(t) = D^*(s) D(r) D(t),$$

а

$$\bar{A}_r^n A_i^r D(t) = \bar{A}_r^n D(r) D(t) = D^*(s) D(r) D(t).$$

Вторая часть условия (1) проверяется аналогично.

Приведенные свойства 1—3 являются алгебраическими условиями обобщенного сдвига, и, таким образом, конструктивно задан широкий класс некоммутативных регулярных о.о.с., более общий, чем сдвиги на дискретной некоммутативной группе. Диагональные блоки $E^i(t)$ матрицы $D(t)$ являются при этом линейными представлениями о.о.с.

Вычислительный центр
АН Армянской ССР и ЕГУ

Поступила 28. I. 1985

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Я. Виленкин. Специальные функции и теория представлений групп, М., «Наука», 1965.
2. И. М. Гельфанд, Д. А. Райков, Г. Е. Шилов. Коммутативные нормированные кольца, М., ГИЗ ФМЛ, 1960.
3. У. Гренандер. Случайные процессы и статистические выводы, М., ИЛ, 1961.
4. Б. М. Левитан. Теорема о представлении положительно определенных функций для обобщенной операции сдвига, ДАН СССР, 47, № 3, 1945, 163—165.
5. А. М. Яглом. Положительно-определенные функции и однородные случайные поля на группах и однородных пространствах, ДАН СССР, 135, № 6, 1960, 1342—1345.
6. Б. М. Левитан. Теория операторов обобщенного сдвига, М., «Наука», 1973.
7. Б. М. Левитан. Нормированные кольца, порожденные обобщенной операцией сдвига, ДАН СССР, 47, № 1, 1945, 3—6.