ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XXII, № 3, 1987 Математика

УДК 517.9

Т. С. ИВАНЧЕНКО, Л. А. САХНОВИЧ

ОПЕРАТОРНЫЕ ТОЖДЕСТВА В ТЕОРИИ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ ЗАДАЧ

Предлагаемый в статье подход к исследованию интерполяционных задач исходит из рассмотрения операторного тождества [1]. Операторное тождество ОТ порождает вполне определенную интерполяционную задачу. Далее, следуя В. П. Потапову [2], мы интерполяционной задаче сопоставляем соответствующее ей неравенство, которое в явном виде строится по ОТ. Такой подход (сочетание ОТ и неравенства) позволяет четко описать класс исследуемых задач и при соответствующих условиях дать единообразное их решение.

Постановка задачи. Пусть заданы гильбертовы пространства H, G, G_1, причем

$$G = G_1 \oplus G_1, \ \dim G_1 < \infty. \tag{1}$$

Пусть далее операторы A, Π, J, S связаны ОТ:

$$S - ASA^* = \Pi J \Pi^*, \tag{2}$$

где $A, S \in [H, H]$; $\Pi \in [G, H]$; $\Pi^* \in [H, G]$; $J \in [G, G]$. (Через $[H_1, H_2]$ обозначается класс линейных ограниченных операторов, действующих из H_1 в H_2).

Оператору Π и разложению (1) соответствует представление $\Pi = [\Pi_1, \Pi_2]$, где $\Pi_1, \Pi_2 \in [G_1; H]$. Предположим дополнительно, что блочное представление J, порожденное разложением (1), имеет вид

$$J = \begin{bmatrix} 0 & E_1 \\ E_1 & 0 \end{bmatrix}, \ E_1 \in [G_1, G_1]. \tag{3}$$

Через N обозначим класс операторов из $[H, H]$, спектр которых состоит из конечного или счетного множества точек. Будем считать, что $A \in N$.

Пусть $\sigma(\varphi)$ — неубывающая оператор-функция со значениями в классе $[G_1, G_1]$. Через E обозначим совокупность $\sigma(\varphi)$, для которых в слабом смысле сходятся интегралы

$$S_\sigma = \int_{-\pi}^{\pi} (E - e^{i\varphi} A)^{-1} \Pi_2 \, d\sigma(\varphi) \, \Pi_2^* (E - e^{-i\varphi} A^*)^{-1}, \tag{4}$$

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} d\sigma(\varphi). \tag{5}$$

Пусть $\sigma(\varphi) \in \mathbf{E}$, тогда из (4)—(5) следует слабая сходимость интеграла

$$\Pi_{1,\sigma} = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (E + e^{i\varphi} A)(E - e^{i\varphi})^{-1} \Pi_2 \, d\sigma(\varphi). \tag{6}$$

Введем оператор

$$\Pi_1 = \Pi_{1,\sigma} + i \Pi_2 \alpha \quad (\alpha = \alpha^*). \tag{7}$$

Сформулируем теперь интерполяционную задачу, порождаемую ОТ (2):

Описать множество $\sigma(\varphi) \in \mathbf{E}$ и $\alpha = \alpha^*$ таких, что операторы S и Π_1, связанные ОТ (2), допускают представления

$$S = S_\sigma, \quad \Pi_1 = \widetilde{\Pi}_1. \tag{8}$$

В дальнейшем нам понадобится

Лемма 1. *Если $A \in N$ и $\sigma(\varphi) \in \mathbf{E}$, то оператор S_σ удовлетворяет ОТ*

$$S_\sigma - A S_\sigma A^* = \widetilde{\Pi} J \widetilde{\Pi}^*, \text{ где } \widetilde{\Pi} = [\widetilde{\Pi}_1, \Pi_2].$$

В справедливости леммы убеждаемся непосредственной подстановкой. Обозначим через $\mathbf{K}$ класс операторов A, для которых уравнение

$$S - ASA^* = 0$$

имеет только тривиальное решение $S = 0$, принадлежащее $[H, H]$.

Замечание 1. Из $S - ASA^* = 0$ следует, что $S - A^n S A^{*n} = 0$. Поэтому, если A является сжатием ($\|A\| \leqslant 1$) и A^{*n} сильно сходится к нулю при $n \to \infty$, то $A \in \mathbf{K}$.

Следствие 1. Если $A \in \mathbf{K}$ и $\Pi_1 = \widetilde{\Pi}_1$, то $S = S_\sigma$. Взаимную связь представлений (8) выясняет также

Лемма 2. *Если* $\Pi_2 g \neq 0$ *при* $g \neq 0$, то из представления $S = S_\sigma$ следует $\Pi_1 = \Pi_{1,\sigma} + i\Pi_2\alpha$.

Рассмотрим теперь класс $\mathbf{R}$, состоящий из аналитических при $|\zeta| \neq 1$ оператор-функций $F(\zeta)$, со значениями в $[G_1, G_1]$, удовлетворяющих условиям

$$F(\zeta) = -F^*\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right); \quad \frac{F^*(\zeta) + F(\zeta)}{1 - \zeta\bar{\zeta}} \geqslant 0.$$

Если $F(\zeta) \in \mathbf{R}$, то существует такая неубывающая оператор-функция $\sigma(\varphi)$ со значениями в $[G_1, G_1]$, что интеграл, стоящий в правой части (5), сходится и справедливо представление

$$F(\zeta) = -i\alpha + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\varphi} - \zeta}{e^{i\varphi} + \zeta} \, d\sigma(\varphi), \quad \alpha = \alpha^*. \tag{9}$$

Обозначим через $\mathbf{D}$ совокупность чисел таких, что $|\zeta| \neq 1$ и $\left(-\frac{1}{\zeta}\right)$ не принадлежит спектру оператора A. В терминах ОТ запишем абстрактное неравенство В. П. Потапова

$$L(\zeta)=\begin{bmatrix} S & B(\zeta) \\ B^*(\zeta) & C(\zeta) \end{bmatrix}\geqslant 0, \quad \zeta\in \mathbf{D}, \tag{10}$$

где $B(\zeta)=(E+\zeta A)^{-1}[\Pi_1+\Pi_2 F(\zeta)]$, $C(\zeta)=\dfrac{F(\zeta)+F^*(\zeta)}{1-\bar\zeta\zeta}$. (11)

Оператор $L(\zeta)$ действует в пространстве $H\oplus G_1$.

Теорема 1. *Пусть* $A\in N$ *и* $\sigma(\varphi)\in \mathbf{E}$. *Тогда оператор-функция* $F(\zeta)$, *определенная равенством* (9), *удовлетворяет неравенству*

$$\tilde L(\zeta)=\begin{bmatrix} \tilde S & \tilde B(\zeta) \\ \tilde B^*(\zeta) & C(\zeta) \end{bmatrix}\geqslant 0, \tag{12}$$

где

$$\tilde B(\zeta)=(E+\zeta A)^{-1}[\Pi_1+\Pi_2 F(\zeta)], \quad \tilde S=S_0.$$

Для доказательства теоремы рассмотрим пространство H, состоящее из векторов g_φ со значениями из G_1 и скалярным произведением

$$[g_\varphi;\ g_\varphi]=\int_{-\pi}^{\pi}(d\sigma(\varphi)\,g_\varphi,\ g_\varphi).$$

Введем в рассмотрение вектора

$$g_\varphi=\frac{e^{i\varphi}}{e^{i\varphi}+\zeta}g \text{ и } f_\varphi=\Pi_2^*(E-e^{-i\varphi}A^*)^{-1}f \quad (g\in G_1,\ f\in H).$$

Тогда нетрудно проверить непосредственной подстановкой равенство

$$\left(\begin{bmatrix} \tilde S & \tilde B(\zeta) \\ \tilde B^*(\zeta) & C(\zeta) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix}\right)=[f_\varphi+g_\varphi,\ f_\varphi+g_\varphi],$$

откуда следует (12).

Введем класс операторов N_0, состоящий из операторов $A\in N$ таких, что их соотношения

$$\|(E+\zeta A)^{-1}f\|=\frac{1}{(1-|\zeta|)}\cdot O(1), \quad |\zeta|\neq 1$$

следует равенство $f=0$.

Замечание 2. Оператор $A\in N_0$, если выполняется одно из следующих требований:

1. $A\in N$ и при некотором $\delta>0$ спектр A лежит в области

$$|1-|\zeta||\geqslant\delta.$$

2. Спектр оператора A сосредоточен в точке ζ_0 ($|\zeta_0|=1$) и при некотором $\rho>0$ выполняется

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\,[\ln M(r)]/r^\rho<\infty, \quad M(r)=\max_{0<\theta<2\pi}\|[E-(A-\zeta_0 E)z]^{-1}\|, \quad z=re^{i\theta}.$$

Теорема 2. *Пусть $A \in N_0$ и неравенство* (10) *имеет решение вида* (9), *причем* $\sigma(\varphi) < \mathbf{E}$. *Тогда справедливо равенство* $\Pi_1 = \tilde{\Pi}_1$.

Доказательство. Из теоремы 1 следует, что оператор-функция

$$F_{\sigma}(\zeta) = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\varphi} - \zeta}{e^{i\varphi} + \zeta}\, d\sigma(\varphi) \quad (\alpha = 0) \tag{13}$$

удовлетворяет неравенству

$$L_{\sigma}(\zeta) = \begin{bmatrix} S_{\sigma} & B_{\sigma}(\zeta) \\ B_{\sigma}^{*}(\zeta) & C_{\sigma}(\zeta) \end{bmatrix} \geqslant 0, \quad \zeta \in \mathbf{D}, \tag{14}$$

$$B_{\sigma}(\zeta) = (E + \zeta A)^{-1}\,[\Pi_{1,\sigma} + \Pi_2 F_{\sigma}(\zeta)]; \quad C_{\sigma}(\zeta) = \frac{F_{\sigma}(\zeta) + F_{\sigma}^{*}(\zeta)}{1 - \zeta\bar{\zeta}}.$$

Из неравенств (10) и (14) вытекает

$$\|B(\zeta) g\|^2 \leqslant \|S\|(C(\zeta) g, g); \quad \|B_{\sigma}(\zeta) g\|^2 \leqslant \|S_{\sigma}\| \cdot (C_{\sigma}(\zeta) g, g). \tag{15}$$

Так как при некотором M верно неравенство

$$(C(\zeta) g, g) \leqslant \frac{M}{|1 - |\zeta|^2|}, \quad |\zeta| \neq 1,$$

то, учитывая (15), имеем

$$\|B(\zeta) g\| = \frac{1}{|1 - |\zeta||} \cdot O(1), \quad \|B_{\sigma}(\zeta) g\| = \frac{1}{|1 - |\zeta||} \cdot O(1).$$

Значит, справедливо соотношение

$$\|[B(\zeta) - B_{\sigma}(\zeta)] g\| = \|(E + \zeta A)^{-1}\,[\Pi_1 - i\Pi_2\alpha - \Pi_{1,\sigma}] g\| = \frac{1}{|1 - |\zeta||} \cdot O(1).$$

Последнее равенство для $A \in N_0$ возможно только в том случае, когда

$$\Pi_1 = \Pi_{1,\sigma} + i\,\Pi_2\alpha, \quad \text{т. е.} \quad \Pi_1 = \tilde{\Pi}_1.$$

Следствие 2. Если выполняются условия теоремы 2 и $A \in \mathbf{K}$, то справедливы равенства

$$\Pi_1 = \tilde{\Pi}_1; \quad S = S_{\sigma}.$$

Следствие 2 вытекает из теоремы 2 и следствия 1. Для исследования случая $A \overline{\in} \mathbf{K}$ воспользуемся преобразованным неравенством (ПН), которое для ряда важных случаев было построено в работах [3.IV]. В терминах ОТ мы запишем ПН в общей ситуации.

Введем обозначения

$$\mathbf{L}_0(\zeta) = (\zeta_0 - \zeta)(E + \zeta A)^{-1}(E + A\zeta_0); \quad \mathbf{L}_k(\zeta) = (\zeta_0 - \zeta)(E + \zeta A)^{-1}\Pi_k, \tag{16}$$

где $|\zeta_0| = 1$, $k = 1, 2$.

$$L_{\Pi}(\zeta)=\left[\begin{array}{c|c} E & 0 \\ \hline -\frac{1}{1-\bar{\zeta}\zeta_0}\mathbf{L}_0\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right) & \mathbf{L}_2\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right)\end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} S & B(\zeta) \\ \hline B^*(\zeta) & C(\zeta)\end{array}\right]\times$$

$$\times\left[\begin{array}{c|c} E & -\frac{1}{1-\zeta\bar{\zeta}_0}\mathbf{L}_0^*\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right) \\ \hline 0 & \mathbf{L}_2^*\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right)\end{array}\right]. \tag{17}$$

Оператор $L_{\Pi}(\zeta)$ действует в пространстве $H\oplus H$ и может быть записан в виде

$$L_{\Pi}(\zeta)=\begin{bmatrix} S & B_{\Pi}(\zeta) \\ B_{\Pi}^*(\zeta) & C_{\Pi}(\zeta)\end{bmatrix},\ \zeta\in\mathbf{D},\quad (\Pi H) \tag{18}$$

где

$$B_{\Pi}(\zeta)=-\frac{1}{1-\zeta\bar{\zeta}_0}S\mathbf{L}_0^*\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right)+B(\zeta)\mathbf{L}_2\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right), \tag{19}$$

$$C_{\Pi}(\zeta)=\frac{1}{|1-\zeta\bar{\zeta}_0|^2}\mathbf{L}_0\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right)S\mathbf{L}_0^*\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right)-\frac{1}{1-\zeta\bar{\zeta}_0}\mathbf{L}_2\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right)B^*(\zeta)\mathbf{L}_0^*\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right)-$$

$$-\frac{1}{1-\bar{\zeta}\zeta_0}\mathbf{L}_0\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right)B(\zeta)\mathbf{L}_2^*\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right)+\mathbf{L}_2\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right)C(\zeta)\mathbf{L}_2^*\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right). \tag{20}$$

Из (17) следует, что любое решение $F(\zeta)$ неравенства (10) является также решением неравенства

$$L_{\Pi}(\zeta)\geqslant 0,\quad \zeta\in\mathbf{D}. \tag{21}$$

Учитывая операторное тождество (2), выводим

$$\zeta_0 S\mathbf{L}_0^*\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right)+\bar{\zeta}_0\mathbf{L}_0(\zeta)S=\mathbf{L}_1(\zeta)\mathbf{L}_2^*\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right)+\mathbf{L}_2(\zeta)\mathbf{L}_1^*\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right). \tag{22}$$

Согласно (16) имеем

$$\mathbf{L}_0(\zeta)\mathbf{L}_k(\lambda)=(\zeta_0-\zeta)(\zeta_0-\lambda)\frac{\mathbf{L}_k(\zeta)-\mathbf{L}_k(\lambda)}{\lambda-\zeta}\quad (k=0,\ 1,\ 2).$$

Из (21) и последнего равенства следует

$$\mathbf{L}_0\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right)S\mathbf{L}_0^*\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right)\zeta_0=\frac{(1-S\bar{\zeta}_0)(\zeta_0-\zeta)}{1-\zeta\bar{\zeta}}\left[-\bar{\zeta}_0\mathbf{L}_0\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right)S-\zeta_0 S\mathbf{L}_0^*\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right)+\right.$$

$$\left.+\mathbf{L}_1\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right)\mathbf{L}_2^*\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right)+\mathbf{L}_2\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right)\mathbf{L}_1^*\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right)\right]. \tag{23}$$

Из (21), (24) и формулы

$$\mathbf{L}_0\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right)B(\zeta)=\frac{1-\bar{\zeta}\zeta_0}{1-\bar{\zeta}\zeta}\left[\left(\mathbf{L}_1\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right)-\mathbf{L}(\zeta)\right)+\left(\mathbf{L}_2\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right)-\mathbf{L}_2(\zeta)\right)F(\zeta)\right]$$

выводим важное для дальнейшего равенство

$$C_{\Pi}(\zeta)=\frac{(\zeta_0-\zeta)B_{\Pi}(\zeta)+(\bar\zeta_0-\bar\zeta)B_{\Pi}^*(\zeta)}{1-\zeta\bar\zeta}. \qquad (24)$$

С одной стороны, ПН (18) приводит нас к оценке

$$\|B_{\Pi}(\zeta)f\|^2\leqslant\|S\|\cdot(C_{\Pi}(\zeta)f,\ f).$$

С другой стороны, согласно (24) имеем

$$(C_{\Pi}(\zeta)f,\ f)\leqslant\frac{2|\zeta_0-\zeta|}{|1-|\zeta|^2|}\cdot\|B_{\Pi}(\zeta)f\|\cdot\|f\|,$$

откуда окончательно получаем

$$\|B_{\Pi}(\zeta)f\|\leqslant\frac{M|\zeta_0-\zeta|}{|1-|\zeta|^2|}\|f\|, \qquad (25)$$

где M не зависит от ζ.

Следовательно, из (24), (25) вытекает

$$(\zeta_0-\zeta)B_{\Pi}(\zeta)=-i\alpha_{\Pi}+\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{i\varphi}-z}{e^{i\varphi}+z}\,d\sigma_{\Pi}(\varphi),\quad \alpha_{\Pi}=\alpha_{\Pi}^*, \qquad (26)$$

где $\sigma_{\Pi}(\varphi)$ — неубывающая оператор-функция со значениями в классе $[H,\ H]$. Пусть дуга единичной окружности $[\alpha,\ \beta]$ не содержит особых точек. Пользуясь формулой обращения, из (19) и (26) получаем

$$\int_{\alpha}^{\beta}d\sigma_{\Pi}(\varphi)=\int_{\alpha}^{\beta}|(\zeta_0-e^{i\varphi})|^2(E-e^{i\varphi}A)^{-1}\Pi_2\,d\sigma(\varphi)\,\Pi_2^*(E-e^{-i\varphi}A^*)^{-1}. \qquad (27)$$

Кроме того, имеет место оценка

$$\int_{-\pi}^{\pi}(d\sigma_{\Pi}(\varphi)\,f,\ f)\leqslant M\|f\|^2, \qquad (28)$$

которая следует из (25), (26).

Учитывая произвольность ζ_0, из (27) и (28) выводим, что верна

Теорема 3. *Если $F(\zeta)$ класса* **R** *является решением неравенства* (10), *то соответствующая оператор-функция $\sigma(\varphi)$ принадлежит классу* **E**.

Теорема 4. *Пусть $A\in N_0$ и неравенство* (10) *имеет решение $F(\zeta)$ вида* (9). *Тогда справедливы равенства*

$$\Pi_1=\Pi_1,\quad S=\tilde S. \qquad (29)$$

Доказательство. Первое равенство вытекает из теорем 2 и 3. Для доказательства второго рассмотрим неравенство

$$\tilde L_{\Pi}(S)=\begin{bmatrix}\tilde S & \tilde B_{\Pi}(\zeta)\\ \tilde B^*(\zeta) & C_{\Pi}(\zeta)\end{bmatrix}>0, \qquad (30$$

где

$$\widetilde{B}_{\Pi}(\zeta) = -\frac{1}{1-\zeta\overline{\zeta}_0}\widetilde{S}\mathbf{L}_0^*\left(\frac{1}{\overline{\zeta}}\right) + \widetilde{B}(\zeta)\mathbf{L}_2^*\left(\frac{1}{\overline{\zeta}}\right).$$

(Неравенство (30) строится по неравенству (12) согласно тому же правилу, что и неравенство (17)).

Аналогично (25) выводится оценка

$$\|\widetilde{B}_{\Pi}(\zeta) f\| \leqslant \frac{M|\zeta_0-\zeta|}{|1-|\zeta|^2|}.$$

Тогда верно соотношение

$$\left\|(S-\widetilde{S})\mathbf{L}_0^*\left(\frac{1}{\overline{\zeta}}\right)f\right\| \leqslant \frac{M|\zeta_0-\zeta|^2}{|1-|\zeta|^2|}\cdot\|f\|$$

или

$$\|\mathbf{L}_0(\zeta)(S-\widetilde{S})f\| \leqslant \frac{M|1-\overline{\zeta}\zeta_0|}{|1-|\zeta|^2|}\|f\|.$$

Воспользовавшись равенством (16), получим

$$|\zeta_0-\zeta|\cdot\|(E+\zeta A)^{-1}(E+\zeta_0 A)(S-\widetilde{S})f\| < \frac{M|1-\overline{\zeta}\zeta_0|^2}{|1-|\zeta|^2|}\|f\|.$$

Откуда

$$\|(E+\zeta A)^{-1}(E+\zeta_0 A)(S-\widetilde{S})f\| \leqslant \frac{M|\zeta-\zeta_0|}{|1-|\zeta|^2|}\|f\|.$$

Так как A принадлежит N_0, то приходим к равенству

$$(E+\zeta_0 A)(S-\widetilde{S})f = 0.$$

Из произвольности ζ_0 следует (29).

Итак, в теоремах 1—4 доказана возможность сведения исследования поставленной интерполяционной проблемы к решению соответствующего ей неравенства (10) или неравенства (18). Найдем описание решений неравенства (10). Тем самым будет определено и множество решений неравенства (18), так как совокупности решений неравенств (10) и (18) совпадают.

Пусть $\Phi(\zeta)$ — мероморфная в единичном круге оператор-функция, действующая из G_1 в G. Рассмотрим неравенство (10), положив

$$B(\zeta) = (A\zeta+E)^{-1}\Pi J\Phi(\zeta);\quad C(\zeta) = \frac{\Phi^*(\zeta)J\Phi(\zeta)}{1-\zeta\overline{\zeta}}. \tag{31}$$

Заметим, что формулы (31) и (11) совпадают, если

$$\Phi(\zeta) = \mathrm{col}[F(\zeta),\ E].$$

Теорема 5. *Пусть оператор S ограничен вместе с обратным, положителен и удовлетворяет соотношению (2); оператор $(E+\zeta_0 A)$ обратим $(|\zeta_0|=1)$. Тогда для того, чтобы оператор-функция $\Phi(\zeta)$ являлась решением неравенства (10), (31), необходимо и достаточно, чтобы она допускала представление*

$$\Phi(\zeta) = \mathbf{A}(\zeta) P(\zeta), \tag{32}$$

где

$$\mathbf{A}(\zeta) = E + (\zeta_0 - \zeta)\Pi^* (E\zeta + A^*)^{-1} S^{-1} (E + \zeta_0 A)^{-1} \Pi J, \tag{33}$$

а $P(\zeta)$ — аналитическая в единичном круге оператор-функция со значениями из класса $[G_1; G]$, обладающая J-свойством

$$P^*(\zeta) J P(\zeta) \geqslant 0, \quad |\zeta| < 1. \tag{34}$$

Доказательство необходимости следует из рассмотрения J-формы оператор-функции $\mathbf{A}^{-1}(\zeta)$ $\left(\mathbf{A}^{-1}(\zeta) = J\mathbf{A}^*\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right)J\right)$

$$J - \mathbf{A}^{*-1}(\zeta) J \mathbf{A}^{-1}(\zeta) = (1 - \zeta\bar{\zeta}) J\Pi^* (\bar{\zeta} A^* + E)^{-1} S^{-1} (E + \zeta A)^{-1} \Pi J. \tag{35}$$

Непосредственной проверкой убеждаемся в том, что неравенство (10), (31), эквивалентное по лемме о неотрицательной блок-матрице неравенству

$$C(\zeta) - B^*(\zeta) S^{-1} B(\zeta) \geqslant 0, \quad \zeta \in \mathrm{D},$$

с помощью оператор-функции $\mathbf{A}^{-1}(\zeta)$ записывается в виде

$$\Phi^*(\zeta) \mathbf{A}^{-1*}(\zeta) J \mathbf{A}^{-1}(\zeta) \Phi(\zeta) \geqslant 0. \tag{36}$$

Откуда следует, что решение $\Phi(\zeta)$ неравенства (10), (31) допускает представление (32).

Пусть теперь $\mathbf{P}(\zeta)$ — произвольная аналитическая в единичном круге оператор-функция, обладающая J-свойством (34). Определим оператор-функцию $\Phi(\zeta)$ равенством

$$\Phi(\zeta) = \mathbf{A}(\zeta) \mathbf{P}(\zeta).$$

Тогда в силу обратимости оператор-функции $\mathbf{A}(\zeta)$ получим

$$\mathbf{P}(\zeta) = \mathbf{A}^{-1}(\zeta) \Phi(\zeta).$$

Из неравенства (34) следует

$$\Phi^*(\zeta) \mathbf{A}^{-1*}(\zeta) J \mathbf{A}^{-1}(\zeta) \Phi(\zeta) \geqslant 0,$$

которое, согласно доказанному выше, эквивалентно неравенству (10), (31). Поэтому оператор-функция $\Phi(\zeta)$, определенная равенством (32), является решением исследуемого неравенства.

Чтобы решить неравенство (10), (11), перейдем к парам 2, 4, 5 мероморфных в единичном круге оператор-функций $\mathbf{R}(\zeta)$, $\mathbf{Q}(\zeta)$ со значениями в классе $[G_1, G_1]$.

Пару $\mathrm{col}[\mathbf{R}(\zeta), \mathbf{Q}(\zeta)]$ будем называть особенной, если для каждой точки голоморфности σ оператор-функций $\mathbf{R}(\zeta)$, $\mathbf{Q}(\zeta)$ существует такой элемент $e \in G_1$, что

$$([\mathbf{R}^*(\zeta)\mathbf{R}(\zeta) + \mathbf{Q}^*(\zeta)\mathbf{Q}(\zeta)]e, e) = 0; \quad e \neq 0.$$

Пары $\mathrm{col}[\mathbf{R}(\zeta), \mathbf{Q}(\zeta)]$ и $\mathrm{col}[r(\zeta), q(\zeta)]$ называются эквивалентными, если существует обратимая мероморфная оператор-функция $T(\zeta)$, такая, что

$$\mathrm{col}[r(\zeta), q(\zeta)] = T(\zeta) \cdot \mathrm{col}[\mathbf{R}(\zeta), \mathbf{Q}(\zeta)].$$

Будем говорить, что пара $\mathrm{col}\,[\mathbf{R}(\zeta),\ \mathbf{Q}(\zeta)]$ обладает J-свойством, если

$$[\mathbf{R}^*(\zeta),\ \mathbf{Q}^*(\zeta)]\,J\,\mathrm{col}\,[\mathbf{R}(\zeta),\ \mathbf{Q}(\zeta)] \geqslant 0.$$

Теорема 6. *Пусть выполнены условия теоремы 5 и $\Pi_2 g \neq 0$, если $g \neq 0$. Тогда для того, чтобы оператор-функция $F(\zeta)$ являлась решением неравенства (10), (11), необходимо и достаточно, чтобы она допускала представление*

$$F(\zeta) = [a(\zeta)\,\mathbf{R}(\zeta) + b(\zeta)\,\mathbf{Q}(\zeta)]\,[c(\zeta)\,\mathbf{R}(\zeta) + d(\zeta)\,\mathbf{Q}(\zeta)],$$

где матрица коэффициентов

$$\begin{bmatrix} a(\zeta) & b(\zeta) \\ c(\zeta) & d(\zeta) \end{bmatrix} = \mathbf{A}(\zeta) = E + (\zeta_0 - \zeta)\,\Pi^*(E\zeta + A^*)^{-1}\,S^{-1}\,(E + \zeta_0 A)^{-1}\,\Pi J;$$

$\mathrm{col}\,[\mathbf{R}(\zeta),\ \mathbf{Q}(\zeta)]$ — *— неособенная пара, обладающая J-свойством.*

Необходимость вытекает из соответствующего доказательства теоремы 5.

Для доказательства достаточности рассмотрим произвольную неособенную пару $\mathrm{col}\,[\mathbf{R}(\zeta),\ \mathbf{Q}(\zeta)]$, обладающую J-свойством. Определим пару

$$\mathrm{col}\,[u(\zeta),\ v(\zeta)] = \mathbf{A}(\zeta)\,\mathrm{col}\,[\mathbf{R}(\zeta),\ \mathbf{Q}(\zeta)]. \tag{37}$$

Убедимся, что $v(\zeta)$ — обратимая оператор-функция. Действительно, положив противное, получим: для каждой точки голоморфности ζ оператор-функции $v(\zeta)$ существует такой элемент $e = e(\zeta) \neq 0$, что $v(\zeta)\,e = 0$. Так как пара $\mathrm{col}\,[\mathbf{R}(\zeta),\ \mathbf{Q}(\zeta)]$ обладает J-свойством, то с учетом равенства (37) имеем

$$\begin{aligned} &([\mathbf{R}^*(\zeta),\ \mathbf{Q}^*(\zeta)]\,J\,\mathrm{col}\,[\mathbf{R}(\zeta),\ \mathbf{Q}(\zeta)]\,e,\ e) = \\ &= ([u^*(\zeta),\ v^*(\zeta)]\,\mathbf{A}^{-1*}(\zeta)\,J\,\mathbf{A}^{-1}(\zeta)\,\mathrm{col}\,[u(\zeta),\ v(\zeta)]\,e,\ e) = \\ &= -\,(u^*(\zeta)\,\alpha(\zeta)\,u(\zeta)\,e,\ e), \end{aligned} \tag{38}$$

где $\alpha(\zeta)$ — левый верхний блок разбиения J-формы оператор-функции $\mathbf{A}^{-1*}(\zeta)$ на блоки в соответствии с (3)

$$J - \mathbf{A}^{-1*}(\zeta)\,J\,\mathbf{A}^{-1}(\zeta) = \begin{bmatrix} \alpha(\zeta) & \beta(\zeta) \\ \beta^*(\zeta) & \gamma(\zeta) \end{bmatrix},$$

ζ — некоторая фиксированная точка голоморфности $v(\zeta)$.

Так как из (35) и условий теоремы следует, что $\alpha(\zeta) > 0$ при $|\zeta| < 1$, то из (38) получаем, что в рассматриваемой точке ζ ($|\zeta| < 1$) имеет место равенство $u(\zeta)\,e = 0$. Значит пара $\mathrm{col}\,[u(\zeta),\ v(\zeta)]$, а поэтому и эквивалентная ей пара $\mathrm{col}\,[\mathbf{R}(\zeta),\ \mathbf{Q}(\zeta)]$ вырождены, что противоречит условию.

Итак, доказано, что оператор-функция $v(\zeta)$ обратима. Дальнейшее доказательство следует из теоремы 5.

Пример. 1. Тригонометрическая проблема моментов. Пусть заданы операторы

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ E & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & E & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & E & 0 \end{bmatrix};\ S=$$

$$=\begin{bmatrix} C_0+C_0^* & C_1^* & \cdots & C_n^* \\ C_1 & C_0+C_0^* & \cdots & C_{n-1}^* \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ C_n & C_{n-1} & \cdots & C_0+C_0^* \end{bmatrix};\ J=\begin{bmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{bmatrix}; \qquad (39)$$

$\Pi=[\Pi_1, \Pi_2]$; $\Pi_1=\mathrm{col}\,[C_0, C_1, \cdots, C_n]$; $\Pi_2=\mathrm{col}\,[E, 0, \cdots, 0]$,

где $C_0, C_1, \cdots, C_n$ — квадратные матрицы m-го порядка.

Непосредственной проверкой убеждаемся в справедливости ОТ (2). Представления (8) эквивалентны равенствам:

$$C_0=i\alpha+\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} d\sigma(\varphi), \quad C_k=\int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\varphi}\, d\sigma(\varphi), \quad 1\leqslant k\leqslant n, \qquad (40)$$

где $\alpha=\alpha^*$, $\sigma(\varphi)\in\mathbf{E}$. Заметим, что в данном примере принадлежность монотонно возрастающей оператор-функции $\sigma(\varphi)$ классу $\mathbf{E}$ эквивалентна сходимости интеграла (5). В силу (40) рассматриваемая интерполяционная задача совпадает с усеченной тригонометрической проблемой моментов. Из теорем 3, 4 вытекает

Теорема 7. *Множество $\alpha=\alpha^*$, $\sigma(\varphi)\in\mathbf{E}$, дающих решение усеченной тригонометрической проблемы* (40), *совпадает с множесвом α, $\sigma(\varphi)$, порожденных при помощи формулы* (9) *классом $F(\zeta)$, удовлетворяющих неравенству* (10) *рассматриваемой задачи.*

Замечание 2. Если $S>0$, то неравенство (10) примера 1 решается эффективно (теорема 6). В этом случае приходим к известным результатам ([6], при $m=1$ и [4, 7], при $m\geqslant 1$).

Пример 2. В ряде задач исследуемый оператор S удовлетворяет тождеству (см. [1, 8])

$$A_0S-SA_0^*=i\Pi_0J\Pi_0^*, \qquad (41)$$

где A_0, $S\in[H, H]$, $\Pi_0\in[H, G]$, а J имеет вид (3). Легко придать ОТ (41) форму (2). В самом деле, выберем μ_0 так, чтобы точка $-i\mu_0$ не принадлежала спектру A_0. Положим далее

$$A=(A_0-i\mu_0E)(A_0+i\mu_0E)^{-1}. \qquad (42)$$

Тогда оператор $E—A$ обратим и справедливо равенство

$$A_0=i\mu_0(E+A)(E-A)^{-1}. \qquad (43)$$

Учитывая (41) и (43), получаем ОТ (2), где

$$\Pi=\frac{1}{\sqrt{2\mu_0}}(E-A)\Pi_0. \qquad (44)$$

Одесский институт народного хозяйства,
Одесский электротехнический институт
связи им. А. С. Попова

Поступила 28. IV. 1984

Տ. Ս. ԻՎԱՆՉԵՆԿՈ, Լ. Ա. ՍԱԽՆՈՎԻՉ. Օպերատորային նույնություններ ինտերպոլյացիոն խնդիրների տեսությունում *(ամփոփում)*

Հոդվածում առաջարկված է մեթոդ, որը թույլ է տալիս միասին լուծել մի շարք ինտերպոլյացիոն խնդիրներ։ Մեթոդում էապես օգտագործվում են Վ. Պ. Պոտապովի արդյունքները և օպերատորային նույնությունները։

T. S. IVANCENKO, L. A. SAHNOVIC. *Operator identities in interpolation problems* (summary)

In this article we propose a method which permits a unified treatment of various interpolation problems.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Л. А. Сахнович.* О подобии операторов, ДАН СССР, 1971, 200, № 3, 541—544.
2. *И. В. Ковалишина, В. П. Потапов.* Индефинитная метрика в проблеме Неванлинны—Пика, ДАН Арм.ССР, 1974, 59, № 1, 17—21.
3. *В. Э. Кацнельсон.* Континуальные аналоги теории Гамбургера—Неванлинны и основные матричные неравенства классических задач, Теория функций, функциональный анализ и их приложения, Харьков, I — 1981, вып. 36, 31—48; II — 1982, вып. 37, 31—48; III—1983, вып. 39, 30—41; IV—1984, вып. 40, 79—90.
4. *А. А. Нудельман.* Об одной новой проблеме типа проблемы моментов, ДАН СССР, 1977, 233, № 5, 792—795.
5. *И. В. Ковалишина.* J-растягивающие матрицы—функции в задаче Кара Теодори, ДАН Арм.ССР, 1974, 59, № 3, 129—135.
6. *Н. И. Ахиезер.* Классическая проблема моментов, ГИФМЛ, М., 1961.
7. *Л. А. Сахнович.* О подобии операторов, Сиб. матем. журнал, 1972, 13, № 4, 868—883.
8. *Л. А. Сахнович.* Уравнения с разностным ядром на конечном отрезке, УМН, 1980, 35, вып. 4, 69—129.