УДК 519.248

Д. Г. МАРТИРОСЯН

ТЕОРЕМЫ О ПОЛОСКАХ В МОДЕЛИ КЛАССИЧЕСКОГО
ИЗИНГОВСКОГО ФЕРРОМАГНЕТИКА

Введение. Формулировка основных результатов

В работе изучаются некоторые асимптотические свойства раопределения Гиббса в больших объемах в модели классического изинговского ферромагнетика. Единственность гиббсовского состояния в этой модели при ненулевом значении внешнего поля была доказана Рювлем в [1]. При достаточно низких температурах и положительном внешнем поле структура и свойства распределения Гиббса с $(+1)$ граничными условиями изучены достаточно полно как при помощи корреляционных неравенств Гриффитса, так и с использованием другого подхода [3]. При тех же значениях параметров для распределения Гиббса в конечном объеме с (-1) граничными условиями образуется так называемая полоска — связанная компонента точек решетки, примыкающая к границе данного объема, в которых поле принимает значение (-1) (см. [2]). Цель настоящей работы — выяснить степень проникновения полоски внутрь данного объема. Точнее, ставится задача оценки того, что данный частичный объем (куб) остается вне полоски. Результаты сформулированы в виде теорем 1, 2 («теоремы о полоске»).

Отметим, что в ряде работ утверждения типа теорем о полоске использовались для доказательства единственности гиббсовских состояний. В работах Добрушина, Печерского [4], Терлецкого [5], Малышева и др. [6], а также в работах Малышева, Николаева [7] и автора [8] были получены результаты, аналогичные нашим теоремам о полоске, и на их основе изучались вопросы единственности гиббсовских состояний и некоторые другие близкие вопросы в решетчатых моделях статистической физики.

Путем некоторого усложнения техники результаты настоящей работы могут быть перенесены на случай более общих моделей (например, возмущенной модели Изинга, рассмотренной в работе Пиротова, Синяя [9] и др.). Для некоторых из этих моделей более слабые теоремы о полоске были доказаны ранее в диссертационной работе автора [10].

Доказательства обеих теорем достаточно близки, однако доказательство теоремы 1 содержит дополнительные построения. Поэтому мы ограничимся полным доказательством теоремы 1 с указанием изменений, которые необходимо внести в это доказательство для получения теоремы 2. Последняя была анонсирована в [11].

В одной из ближайших публикаций будут приведены доказательства неулучшаемости оценок (с точностью до постоянной), установленных в

теоремах 1 и 2, а также некоторые следствия этих теорем.

Перейдем к определениям.

Пусть Z^1 — множество целых чисел. Через Z' будем обозначать u -мерную целочисленную решетку, то есть $Z' = \{x = (x_1, \dots, x_u) \mid x_1 \in Z^1, \dots, x_u \in Z^1\}$. Расстояние между двумя точками решетки $x, y \in Z'$, $x = (x_1, \dots, x_u)$, $y = (y_1, \dots, y_u)$ положим равным

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^u |x_i - y_i|,$$

а расстояние между множествами A_1 и A_2 , $A_1 \subseteq Z'$, $A_2 \subseteq Z'$ определим как $d(A_1, A_2) = \inf_{x \in A_1, y \in A_2} d(x, y)$.

Через $(Z^*)'$ будем обозначать двойственную к Z' решетку $(Z^*)' = \left\{ x = \left(x_1 + \frac{1}{2}, \dots, x_u + \frac{1}{2} \right) \mid x_1 \in Z^1, \dots, x_u \in Z^1 \right\}$.

Введем ряд обозначений, которых будем придерживаться на протяжении всей работы.

Для произвольного множества A через $|A|$ будет обозначаться число его элементов. Если $A \subset Z'$, то A^c будет обозначать дополнение A в Z' . Далее, для $A \subseteq Z'$ через ∂A и $\partial_1 A$ будем обозначать следующие множества:

$$\partial A = \{x \in A \mid \text{существует } y \in A^c \text{ такое, что } d(x, y) = 1\},$$

$$\partial_1 A = \{x \in A^c \mid \text{существует } y \in A \text{ такое, что } d(x, y) = 1\}.$$

Для целого положительного i через V_i обозначается специальный куб на решетке Z' вида

$$V_i = \{(x_1, \dots, x_u) \in Z' \mid \max_{1 \leq j \leq u} |x_j| \leq i\},$$

а через T_i — i -ый «слой» решетки Z' :

$$T_i = \{(x_1, \dots, x_u) \in Z' \mid \max_{1 \leq j \leq u} |x_j| = i\}.$$

Куб V_i будем называть i -ым стандартным кубом,

Перейдем к определению распределения Гиббса [12], [13].

Пусть $S = \{+1, -1\}$. Отображение $\varphi: Z' \rightarrow S$ будем называть конфигурацией, а ограничение конфигурации φ на множество $V \subset Z'$ будем называть конфигурацией на V , обозначая ее через $\varphi(V)$. Множество всех конфигураций на V будет обозначаться через $\mathfrak{X}(V)$.

Пусть $V \subset Z'$, $|V| < \infty$ — конечное множество, и пусть $\varphi(V)$ и $\varphi(V^c)$ — конфигурации на V и V^c соответственно. Введем гамильтониан $H(\varphi(V) \mid \varphi(V^c))$ модели классического изинговского ферромагнетика, полагая

$$H(\varphi(V)|\varphi(V^c)) = -\mu \sum_{x \in V} \varphi(x) - \frac{1}{2} \sum_{\substack{\langle x, y \rangle \\ x \in V, y \in V}} \varphi(x) \varphi(y) - \frac{1}{2} \sum_{\substack{\langle x, y \rangle \\ x \in V, y \in V^c}} \varphi(x) \varphi(y), \quad (1)$$

где суммирование производится по всем таким парам $\langle x, y \rangle$, что $d(x, y) = 1$. Здесь $\mu \in R^1$ — химический потенциал.

Пусть $V \subseteq Z^d$, $|V| < \infty$ и $\varphi(V) \in \mathfrak{X}(V^c)$ — конфигурация на V^c . Распределением Гиббса на множестве V , отвечающим гамильтониану (1), граничным условиям $\varphi(V^c)$ и параметрам $\beta > 0$ — обратной температуре, и $\mu \in R^1$, называется распределение вероятностей на $\mathfrak{X}(V)$, задаваемое формулой

$$q_V(\varphi(V)|\varphi(V^c)) = \frac{\exp\{-\beta H(\varphi(V)|\varphi(V^c))\}}{\Xi(V, \beta, \varphi(V^c))}, \quad (2)$$

где $\Xi(V, \beta, \varphi(V^c))$ — нормирующий множитель. Величину $h = \beta\mu$ будем называть внешним полем.

Нетрудно видеть, что если граничные условия $\varphi_0(V^c)$ и $\varphi_1(V^c)$ совпадают на $\partial_1 V$, $\varphi_0(\partial_1 V) = \varphi_1(\partial_1 V)$, то отвечающие им распределения Гиббса на $\mathfrak{X}(V)$ также совпадают. Пользуясь этим введем следующее удобное с геометрической точки зрения соглашение. Именно, всюду в дальнейшем, не нарушая общности рассуждения, от граничных условий $\varphi(V^c)$ будем требовать, чтобы $\varphi(x) = -1$ для всех $x \in V \cup \partial_1 V$.

В приводимом ниже понятии контура будем придерживаться в основном известных определений (см., например, [14]).

Через $W(x)$ будем обозначать единичный замкнутый куб в R^d с центром в точке $x \in Z^d$. Очевидно, вершины куба $W(x)$ лежат на двойственной решетке $(Z^*)^d$. Для точек $x, y \in Z^d$ таких, что $d(x, y) = 1$, множество $W(x) \cap W(y)$ будем называть гранью (решетки $(Z^*)^d$), разделяющей точки x и y .

Пусть φ — такая конфигурация, что $\{x \in Z^d \mid \varphi(x) = +1\}$ — конечное множество. Объединение граней, разделяющих точки x и y такие, что $d(x, y) = 1$ и $\varphi(x) \varphi(y) = -1$, называется границей конфигурации φ .

Пусть $G = \{g_1, \dots, g_m\}$ — множество всех граней решетки $(Z^*)^d$, содержащихся в границе конфигурации φ . Множество $R^d \setminus \{g_1 \cup \dots \cup g_m\}$ разбивается на связные (в R^d) компоненты, которые обозначим через $O_1, \dots, O_s$. В точности одна из этих компонент неограничена. Для определенности предположим, что через O_1 обозначена неограниченная компонента. Граница (в R^d) O_1 называется внешней границей конфигурации φ . Внешняя граница конфигурации φ содержится в границе конфигурации φ .

Для простоты будет считать, что множество $G = \{g_1, \dots, g_m\}$ перенумеровано таким образом, что $G^{(ext)} = \{g_1, \dots, g_{m'}\}$, $m' \leq m$ — множество всех граней $(Z^*)^d$, содержащихся во внешней границе конфигу-

рации φ . Далее, пусть $O_1, O_2, \dots, O_s$ — связные (в R') компоненты множества $R' \setminus [g_1 \cup \dots \cup g_m]$. Граница (в R') множества O_i , $i \geq 2$ называется внешним контуром конфигурации φ . Аналогичным образом выделяются контуры из множества оставшихся граней. Продолжая этот процесс до исчерпания, мы получим разбиение границы конфигурации φ на контуры,

Контуры будут обозначаться в дальнейшем буквами γ или Γ , в зависимости от свойств конфигурации φ . Именно, пусть γ (или Γ) — контур конфигурации φ . Дополнение к этому контуру (в R') разбивается на две связные компоненты O' и O'' , где O' — ограниченная, а O'' — неограниченная компонента. Множество $O' \cap Z'$ называется внутренностью данного контура. На протяжении всей работы обозначение γ будет использоваться для контуров, у которых $\varphi(x) = -1$ при всех $x \in \partial(O' \cap Z')$, а обозначение Γ — для контуров, у которых $\varphi(x) = +1$ при всех $x \in \partial(O' \cap Z')$. Иными словами, через γ будут обозначаться контуры, к которым изнутри примыкают частицы со спином (-1) , а через Γ — контуры, к которым изнутри примыкают частицы со спином $(+1)$.

Через $\text{int}(\Gamma)$ (соответственно $\text{int}(\gamma)$) будет обозначаться внутренность контура, через $|\Gamma|$ (соответственно $|\gamma|$) — число граней (Z^*) , входящих в контур.

Пусть $V \subset Z'$, и пусть $\varphi(V)$ и $\varphi(V^c)$ — конфигурации на множествах V и V^c соответственно. Конфигурацию φ на Z' , ограничения которой на множества V и V^c совпадают с конфигурациями $\varphi(V)$ и $\varphi(V^c)$, соответственно, будем обозначать через $(\varphi(V), \varphi(V^c))$.

Сформулируем основной результат настоящей работы.

Теорема 1. Пусть V_i , $i=1, 2, \dots$ — i -ый стандартный куб решетки Z' ($\nu \geq 2$), и пусть $\varphi_i(V_i^c)$, $i=1, 2, \dots$ — произвольная последовательность граничных условий (в соответствии с принятым соглашением φ_i является конфигурацией на V_i^c , подчиненной условию: $\varphi_i(x) = -1$ для всех $x \in \bar{V}_{i+1}$). Найдутся $\beta_0 > 0$ и функция $c(\beta) > 0$, определенная при всех $\beta \geq \beta_0$ такие, что если β и последовательность $h_1, h_2, \dots$ удовлетворяют соотношениям $\beta > \beta_0$ и $h_i \geq \frac{c(\beta)}{i}$, то для распределения Гиббса на множестве V_i , отве-

чающего параметрам β , h_i и граничным условиям $\varphi_i(V_i^c)$, справедливо следующее утверждение. Вероятность множества всех тех конфигураций $\varphi(V_i) \in \mathfrak{X}(V_i)$, для которых в расположении контуров конфигурации $(\varphi(V_i), \varphi_i(V_i^c))$ имеется (внешний) контур Γ , внутренность которого, $\text{int}(\Gamma)$, содержит стандартный куб $V \left[\frac{i}{6} \right]$, стремится к 1 при $i \rightarrow \infty$ равномерно по всем граничным условиям.

Имеет место также следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть V_i и $\varphi_i(V_i^c)$ ($i=1, 2, \dots$) удовлетворяют условиям предыдущей теоремы. Существует $\beta_0 > 0$ такое, что для любых $\beta > \beta_0$ и $h > 0$ можно найти $c(\beta, h) > 0$ так, что для распределения Гиббса на множестве V_i , отвечающего параметрам $\beta > \beta_0$, $h > 0$ и граничным условиям $\varphi_i(V_i^c)$, справедливо следующее утверждение. Вероятность множества всех тех конфигураций $\varphi(V_i) \in \mathfrak{X}(V_i)$, для которых в расположении контуров конфигурации $(\varphi(V_i), \varphi_i(V_i^c))$ имеется (внешний) контур Γ , внутренность которого, $\text{int}(\Gamma)$, содержит стандартный куб $V_{i - [c(\beta, h)\text{int}]}$, стремится к 1 при $i \rightarrow \infty$ равномерно по всем граничным условиям.

§ 1. Вспомогательные леммы

Из рассмотрений работы Р. А. Минлоса и Я. Г. Синая ([3], стр. 233) нетрудно выделить следующее предложение, используемое нами в дальнейшем.

Лемма 1.1 Найдется $\beta_0 > 0$ такое, что для распределения Гиббса на множестве $V \subset Z^d$, $|V| < \infty$, отвечающего параметрам $\beta \geq \beta_0$ и $h \geq 0$ и граничным условиям $\varphi(x) = +1$ при всех $x \in \partial_1 V$, справедливо следующее утверждение. Для любого целого положительного m вероятность того, что Γ является внешним в V контуром конфигурации φ , и набор всех внешних в $\text{int}(\Gamma)$ контуров $\{\gamma_1, \dots, \gamma_s\}$ конфигурации φ удовлетворяет условию

$$|\text{int}(\Gamma)| - \sum_{j=1}^s |\text{int}(\gamma_j)| = m,$$

не превосходит $\exp[-\beta|\Gamma| - hm]$.

Определение 1.1 Множество $A \subseteq Z^d$ называется связным (на решетке Z^d), если для любых $x, y \in A$ найдется последовательность $x_1, \dots, x_m$ такая, что $x_i \in A$ для всех $i=1, \dots, m$, $d(x_i, x_{i+1})=1$ при всех $i=1, \dots, m-1$ и $x_1=x$, $x_m=y$.

Определение 1.2 Пусть $A \subseteq Z^d$. Мы скажем, что

$$A = A_1 \cup \dots \cup A_s, \quad (A_j \subseteq Z^d, j=1, \dots, s) \quad (1.1)$$

является разбиением множества A на связные компоненты, если каждое из множеств A_j , $j=1, \dots, s$ является связным множеством и $d(A_i, A_j) \geq 2$ при $i \neq j$.

Определение 1.3. Пусть $A \subseteq Z^d$, $B \subseteq Z^d$. Будем говорить, что множество A примыкает к множеству B , если для любого $x \in A$ найдется последовательность $x_1, \dots, x_m$ такая, что $x_i \in A$ при всех $i=1, \dots, m$; $d(x_i, x_{i+1})=1$ при всех $i=1, \dots, m-1$ и $x_1=x$, $x_m \in B$.

Лемма 1.2 Найдется постоянная $c(v)$, зависящая только от размерности решетки v такая, что число связных множеств с фиксированным числом элементов a , содержащих фиксированную точку $x_0 \in Z^d$, не превосходит $\exp[c(v)a]$. Эта же оценка выполне-

на для числа контуров γ (или Γ) с фиксированным $|\gamma| = a$, проходящих через фиксированную точку $x_0 \in (\mathbb{Z}^d)'$.

Лемма 1.3. *Найдется постоянная $c(\nu)$, зависящая только от размерности решетки ν такая, что для любого фиксированного $B \subseteq \mathbb{Z}^d$ число множеств A , примыкающих к множеству B и имеющих фиксированное число элементов a ($|A| = a$), не превосходит $\exp\{c(\nu)(a + |B|)\}$.*

Утверждения типа лемм 1.2 и 1.3 встречаются во многих работах, использующих технику кластерных разложений. Доказательства этих лемм достаточно просты, поэтому мы опускаем их. В дальнейшем достаточно несколько более грубые оценки, поэтому мы будем для простоты считать, что постоянные $c(\nu)$ из формулировок лемм 1.2 и 1.3 совпадают.

§ 2. Геометрические построения

Пусть φ — конфигурация. Мы считаем, что $\{x \mid \varphi(x) = +1\}$ — конечное множество, и через V_i обозначаем стандартный куб, содержащий это множество. Пусть, далее, V_i — стандартный куб такой, что $V_i \subset V_{i+1}$. Всюду в этом параграфе мы предполагаем, что конфигурация φ и кубы V_i , V_{i+1} фиксированы.

Для любых целых положительных k_1 и k_2 , $k_1 \leq k_2$, через $[k_1, k_2]$ будем обозначать отрезок натурального ряда, т. е. множество всех целых чисел k , удовлетворяющих условию $k_1 \leq k \leq k_2$.

Определение 2.1. Отображение $\omega: [k_1, k_2] \rightarrow \mathbb{Z}^d$ будем называть φ -путем в $\mathbb{Z}^d$ (или просто путем), если $\varphi(\omega(k)) = -1$ для всех $k \in [k_1, k_2]$, и $d(\omega(k), \omega(k+1)) = 1$ для всех $k \in [k_1, k_2 - 1]$. $\omega(k_1)$ и $\omega(k_2)$ будем называть, соответственно, начальной и конечной точками пути ω . Мы скажем, что точку $x \in \mathbb{Z}^d$ можно соединить с точкой $y \in \mathbb{Z}^d$, если существует φ -путь $\omega: [k_1, k_2] \rightarrow \mathbb{Z}^d$ такой, что $\omega(k_1) = x$, $\omega(k_2) = y$.

Пусть $\omega: [k_1, k_2] \rightarrow \mathbb{Z}^d$ — φ -путь, и пусть m_1 и m_2 таковы, что $k_1 \leq m_1 \leq m_2 \leq k_2$. Отрезком $[m_1, m_2]$ пути ω будем называть путь $\omega': [m_1, m_2] \rightarrow \mathbb{Z}^d$ такой, что $\omega'(m) = \omega(m)$ для всех $m \in [m_1, m_2]$.

Далее, пути $\omega: [k_1, k_2] \rightarrow \mathbb{Z}^d$ и $\omega': [m_1, m_2] \rightarrow \mathbb{Z}^d$ будем называть эквивалентными путями, если $m_2 - m_1 = k_2 - k_1$ и $\omega'(m) = \omega(k_1 + m - m_1)$ для всех $m \in [m_1, m_2]$.

Путь $\omega: [k_1, k_2] \rightarrow \mathbb{Z}^d$ будем называть объединением путей $\omega_1: [m_1, m_2] \rightarrow \mathbb{Z}^d$ и $\omega_2: [p_1, p_2] \rightarrow \mathbb{Z}^d$, если существует такое k_0 , $k_1 \leq k_0 \leq k_2$, что путь ω_1 эквивалентен отрезку $[k_1, k_0]$ пути ω , а путь ω_2 эквивалентен отрезку $[k_0, k_2]$ пути ω .

Определение 2.2.1. Мы скажем, что точка $x \in \mathbb{Z}^d$ является i -правильно расположенной точкой конфигурации φ , если $x \in T_i$ и существует φ -путь $\omega: [1, s] \rightarrow \mathbb{Z}^d$ такой, что $\omega(1) = x$, $\omega(s) \in V_i$, и $\omega(k) \in V_{i-1}$ для всех $k \in [1, s]$.

Определение 2.2.2. Мы скажем, что точка $x \in \mathbb{Z}^d$ является строго i -правильно расположенной точкой конфигурации φ , если $x \in T_i$

и существует φ -путь $\omega: [1, s] \rightarrow Z'$ такой, что $\omega(1) = x$, $\omega(s) \in V_i$ и $\omega(k) \in V_{i-1}$ для всех $k \in [2, s]$.

Всюду в дальнейшем через $U(l_1, \varphi)$ будем обозначать множество всех тех $x \in V_{i_1}$, для которых существует φ -путь $\omega: [1, s] \rightarrow Z'$ такой что $\omega(1) = x$, $\omega(s) \in V_{i_1}$. Множество $U(l_1, \varphi)$ будем называть неустойчивым ядром конфигурации φ .

Определение 2.3. Пусть $x \in U(l_1, \varphi)$, i — целое число, $i > l_1$, и пусть $\omega: [1, s] \rightarrow Z'$ — такой φ -путь, что $\omega(1) = x$. Мы скажем, что φ -путь ω является i -правильным в Z' , если из условия $\omega(k) \in V_i$ вытекает, что ни одна из точек множества $\{\omega(k'), k' \leq k\}$ не является i -правильно расположенной точкой конфигурации φ .

Определение 2.4. (Построение множеств $M_i(\varphi)$, $K_i(\varphi)$, $L_i(\varphi)$). Пусть $x \in U(l_1, \varphi)$. К множеству $M_i(x, \varphi)$ отнесем все те точки $y \in Z'$, для которых можно найти i -правильный φ -путь $\omega: [1, s] \rightarrow Z'$ такой, что $\omega(1) = x$, $\omega(s) = y$. Определим $K_i(x, \varphi)$ как множество всех i -правильно расположенных точек множества $M_i(x, \varphi)$, а $L_i(x, \varphi)$ — как множество всех строго i -правильно расположенных точек множества $M_i(x, \varphi)$. Положим также

$$M_i(\varphi) = \bigcup_{x \in U(l_1, \varphi)} M_i(x, \varphi), \quad (2.1)$$

$$K_i(\varphi) = \bigcup_{x \in U(l_1, \varphi)} K_i(x, \varphi), \quad (2.2)$$

$$L_i(\varphi) = \bigcup_{x \in U(l_1, \varphi)} L_i(x, \varphi). \quad (2.3)$$

Лемма 2.1. *Имеет место включение*

$$M_i(x, \varphi) \subset M_{i+1}(x, \varphi). \quad (2.4)$$

Доказательство. Предположим противное. Пусть $y \in M_i(x, \varphi)$, $y \notin M_{i+1}(x, \varphi)$. Из условия $y \in M_i(x, \varphi)$ вытекает существование i -правильного φ -пути $\omega_0: [1, s] \rightarrow Z'$ такого, что $\omega_0(1) = x$, $\omega_0(s) = y$. Поскольку $y \notin M_{i+1}(x, \varphi)$, то путь ω_0 не является $(i+1)$ -правильным путем. Следовательно, найдется такое k , $1 \leq k \leq s$, что $\omega_0(k) \in V_{i+1}$. Обозначая через k_2 наименьшее из всех таких чисел, мы получаем, что $\omega_0(k_2) \in V_{i+1}$, а $\omega_0(k) \in V_{i+1}$ для всех k таких, что $1 \leq k \leq k_2$. Снова воспользуемся тем, что $y \notin M_{i+1}(x, \varphi)$, и выберем k_2 так, что $1 < k_2 < k_2$ и $\omega_0(k_2)$ является строго $(i+1)$ -правильно расположенной точкой конфигурации φ . Поскольку $\omega_0(1) \in V_{i_1}$, $\omega_0(k_2) \in T_{i+1}$, то очевидно, найдется k , $1 \leq k < k_2$ такое, что $\omega_0(k) \in T_i$. Выбирая в качестве k_1 наибольшее из всех таких k , получим, что $\omega_0(k_1) \in T_i$ и $\omega_0(k) \in T_{i+1}$ для всех k , удовлетворяющих условию $k_1 < k < k_2$. Обозначим через ω_1 отрезок $[k_1, k_2]$ пути ω_0 . Воспользовавшись тем, что $\omega_0(k_2)$ является строго $(i+1)$ -правильно расположенной точкой конфигурации φ , построим φ -путь $\omega_2: [1, s] \rightarrow Z'$ такой, что $\omega_2(1) = \omega_0(k_2)$, $\omega_2(s') \in V_i$ и $\omega_2(k') \in V_{i+1}$ при всех $k' \in [2, s']$. Легко проверяется, что φ -путь $\omega_3: [1, s] \rightarrow Z'$, являющийся объединением путей ω_1 и ω_2 , обладает следующими свойствами: $\omega_3(1) = \omega_0(k_1) \in T_i$, $\omega_3(k'') \in V_i$ при всех $k'' \in [2, s']$.

Следовательно, $\omega_0(k_1)$ является строго i -правильно расположенной точкой конфигурации φ . Отсюда и из того, что $\omega_0(k_1) \notin V_i$, вытекает, что ω_0 не является i -правильным путем. Полученное противоречие доказывает требуемое включение.

Лемма 2.2. *Имеют место включения*

$$L_i(x, \varphi) \subseteq K_i(x, \varphi) \subset M_i(x, \varphi) \setminus M_{i-1}(x, \varphi). \quad (2.5)$$

Доказательство. Включение $L_i(x, \varphi) \subseteq K_i(x, \varphi)$ вытекает из того, что любая строго i -правильно расположенная точка конфигурации φ является одесрмггго i -правильно расположенной точкой конфигурации φ , и из определения множеств L_i и K_i . Далее, поскольку $K_i(x, \varphi) \subset M_i(x, \varphi)$, то для доказательства включения $K_i(x, \varphi) \subset M_i(x, \varphi) \setminus M_{i-1}(x, \varphi)$ достаточно показать, что если $y \in K_i(x, \varphi)$, то $y \notin M_{i-1}(x, \varphi)$. В самом деле, предположим противное, и пусть существует y такое, что $y \in K_i(x, \varphi) \cap M_{i-1}(x, \varphi)$. Воспользуемся условием $y \in M_{i-1}(x, \varphi)$ и построим $(i-1)$ -правильный φ -путь $\omega: [1, s] \rightarrow Z^*$, соединяющий точку $x = \omega(1)$ с точкой $y = \omega(s)$. Из условий $x = \omega(1) \in V_i$ и $y = \omega(s) \in K_i(x, \varphi) \subset T_i$ вытекает существование такого k , $1 < k < s$, что $\omega(k) \in T_{i-1}$. Через k_1 обозначим наибольшее из всех таких чисел. В силу выбора k_1 весь отрезок $[k_1 + 1, s]$ пути ω лежит вне V_{i-1} , и поскольку $y = \omega(s)$ является i -правильно расположенной точкой конфигурации φ , то отсюда вытекает, что $\omega(k_1)$ является строго $(i-1)$ -правильно расположенной точкой конфигурации φ . Учитывая также, что $\omega(s) \in V_{i-1}$, мы получаем отсюда, что ω не является $(i-1)$ -правильным путем. Полученное противоречие доказывает лемму.

§ 3. Доказательство основной теоремы

Для удобства доказательство основной теоремы (теоремы 1) разбито на отдельные пункты. Нам потребуется ряд дополнительных построений, которые приводятся в пунктах 3.1—3.7.

В этом параграфе для краткости записи мы будем пользоваться обозначением $q_p(\cdot)$ для распределения Гиббса на стандартном кубе V_p , отвечающего параметрам $\beta > 0$, $h > 0$ и граничным условиям $\varphi_p(V_p^c)$. Через n и n_0 будем обозначать целые числа, определяемые посредством соотношений $n = \left\lfloor \frac{p}{6} \right\rfloor$, $p = 6n + n_0$ ($0 \leq n_0 \leq 5$). Далее, в силу принятого соглашения конфигурация $\varphi = (\varphi(V_p), \varphi(V_p^c))$, где $\varphi(V_p)$ — произвольная конфигурация на V_p , а $\varphi_p(V_p^c)$ — граничное условие вне V_p , обладает свойством $\{x \in Z^* \mid \varphi(x) = +1\} \subseteq V_{p+1}$. Поэтому мы можем воспользоваться рассмотрениями предыдущего параграфа с $l_2 = p + 1$ и с $l_1 = n$. Через $\mathfrak{X}_0(p)$ обозначим множество всех тех конфигураций $\varphi(V_p) \in \mathfrak{X}(V_p)$, для которых в расположении контуров конфигурации $(\varphi(V_p), \varphi_p(V_p^c))$ не существует контура Γ такого, что $\text{int}(\Gamma) \supset V_n \left(n = \left\lfloor \frac{p}{6} \right\rfloor \right)$. Мы покажем, что $\lim_{p \rightarrow \infty} q_p(\mathfrak{X}_0(p)) = 0$. Это ут-

верждение эквивалентно утверждению теоремы 1.

3.1. Предварительное построение.

Предложение 3.1. *Существует $\beta_0 > 0$ такое, что при всех $\beta > \beta_0$ имеет место следующее утверждение. Найдется постоянная $c_0(\beta)$ такая, что вероятность q_p множества всех конфигураций $\varphi \in \mathfrak{X}_0(p)$, у которых в расположении контуров имеется контур γ , удовлетворяющий условию $|\gamma| \geq c_0(\beta) \ln |V_p|$, стремится к нулю при $p \rightarrow \infty$ равномерно по всем граничным условиям.*

Доказательство. Через $\mathfrak{X}_0(\gamma)$ обозначим множество всех конфигураций $\varphi \in \mathfrak{X}_0(p)$, содержащих данный контур γ ($|\gamma| \geq c_0(\beta) \ln |V_p|$). Поскольку $\varphi(x) = +1$ для всех $x \in \partial_1 \text{int}(\gamma)$, и $\varphi(x) = -1$ для всех $x \in V_{p+1}$, то существует контур Γ такой, что его внутренность, $\text{int}(\Gamma)$, содержит контур γ , $\gamma \subset \text{int}(\Gamma)$. Контур Γ назовем γ -минимальным, если $\text{int}(\Gamma) \supset \gamma$ и не существует контура $\Gamma' \neq \Gamma$ такого, что $\text{int}(\Gamma) \supset \text{int}(\Gamma') \supset \gamma$. Легко видеть, что если $\Gamma_1 \neq \Gamma_2$, то события, состоящие в том, что Γ_1 , и соответственно Γ_2 , являются γ -минимальными контурами, несовместимы. Поэтому, если через $q_p(\gamma)$ (соответственно $q_p(\Gamma)$) обозначить вероятность того, что γ (соответственно Γ) — контур конфигурации φ , а через $q_p(\gamma | \Gamma)$ — условную вероятность того, что γ — контур конфигурации φ , при условии, что Γ является γ -минимальным контуром конфигурации φ , получим

$$q_p(\gamma) = \sum_{\Gamma} q_p(\gamma | \Gamma) q_p(\Gamma)$$

и

$$\sum_{\Gamma} q_p(\Gamma) \leq 1,$$

где в обеих формулах суммирование производится по всем γ -минимальным контурам Γ . Далее, из леммы 1.1 вытекает оценка

$$q(\gamma | \Gamma) \leq \exp\{-\beta |\gamma|\}.$$

Из трех последних соотношений, очевидно, следует

$$q_p(\gamma) \leq \exp\{-\beta |\gamma|\}.$$

Из установленного только что неравенства Пайерлса утверждение предложения 3.1 можно получить по общепринятой схеме. А именно, число контуров с данным $|\gamma| = r$, проходящих через фиксированную точку, не превосходит $\exp\{c_1 r\}$, а число способов выбора этой точки не превосходит $|V_p|$, и поэтому вероятность того, что в расположении контуров найдется контур γ с $|\gamma| \geq c_0(\beta) \ln |V_p|$, не превосходит (при $\beta > c_1$)

$$|V_p| \sum_{r > c_0(\beta) \ln |V_p|} \exp\{c_1 - \beta\} r \leq \frac{|V_p|}{1 - \exp\{c_1 - \beta\}} \exp\{-(\beta - c_1) c_0(\beta) \ln |V_p|\}.$$

Выбирая $c_0(\beta) > \frac{1}{\beta - c_1}$, получим утверждение предложения 3.1.

Определение 3.1. Через $\mathfrak{X}(p)$ обозначим множество тех конфигураций $\varphi \in \mathfrak{X}_0(p)$, у которых в расположении контуров не существует контура γ , удовлетворяющего условию $|\gamma| \geq c_0(\beta) \ln |V_p|$.

Замечание 3.1. В силу предложения 3.1 для доказательства основной теоремы достаточно показать, что

$$\lim_{p \rightarrow \infty} q_p \{ \mathfrak{X}(p) \} = 0.$$

3.2. Разбиение множества $\mathfrak{X}(p)$ на классы. Пусть $\varphi \in \mathfrak{X}(p)$, $p = 6n + n_0$, где $0 \leq n_0 \leq 5$, и пусть i, l, k — целые положительные числа, причем $2n \leq i < 6n$. Построим классы $\mathfrak{X}_p(i; l, k)$ (вообще говоря, пересекающиеся) конфигураций следующим образом. Пусть $c_2 > 0$ и $c_3 > 0$ — действительные числа. Мы скажем, что $\varphi \in \mathfrak{X}_p(i; l, k)$, если

$$2n \leq i < 4n,$$

$$\begin{aligned} |M_{i+2}(\varphi) \setminus M_i(\varphi)| &\leq c_2 |M_i(\varphi)|^{\frac{v-1}{v}}, \\ |L_{i+1}(\varphi)| &= l, \quad |K_{i+2}(\varphi)| = k, \end{aligned} \quad (3.1)$$

или

$$4n \leq i < 6n$$

$$\begin{aligned} |M_{i+2}(\varphi) \setminus M_i(\varphi)| &\leq \frac{c_3}{n} |M_i(\varphi)|, \\ |L_{i+1}(\varphi)| &= l, \quad |K_{i+2}(\varphi)| = k. \end{aligned} \quad (3.2)$$

3.3 Предложение 3.3. Для любого $c_2 > 0$ найдутся $c_3 > 0$ и целое число $p_0 > 0$ такие, что для всех $p \geq p_0$.

$$\mathfrak{X}(p) \subset \bigcup_{\substack{2n-i < 6n \\ k > 0, l > 0}} \mathfrak{X}_p(i; k, l), \quad p = 6n + n_0, \quad 0 \leq n_0 \leq 5. \quad (3.3)$$

Доказательство. Зафиксируем конфигурацию $\varphi \in \mathfrak{X}(p)$ и введем обозначение $m_r = |M_{2n+2r}(\varphi)|$, $r = 0, 1, \dots, 2n$. Заметим, что в силу (2.4) $m_{r+1} - m_r = |M_{2n+2r+2}(\varphi) \setminus M_{2n+2r}(\varphi)|$. Предположим теперь, что для данного $c_2 > 0$ условие (3.1) не имеет места ни при каком i , $2n \leq i < 4n$. Тогда при всех r , $0 \leq r \leq n$

$$m_{r+1} - m_r \geq c_2 m_r^{\frac{v-1}{v}}. \quad (3.4)$$

Положим $c = \frac{2^v - 1}{c_2}$, $p_0 = 6 \left(1 + \left\lceil \frac{1}{c} \right\rceil \right)$ и покажем, пользуясь индукцией по r , что $m_r \geq \frac{r^v}{c^v}$. В самом деле, если $p \geq p_0$, то $m_1 \geq |M_{2n}(\varphi)| \geq n > \frac{p_0}{6} > \frac{1}{c}$. Предполагая, что при некотором r , $0 < r \leq n-1$ выполняется неравенство $m_r \geq \frac{r^v}{c^v}$, мы получаем из (3.4), что

$$m_{r+1} \geq m_r + c_2 m_r^{\frac{v-1}{v}} \geq \frac{r^v}{c^v} + c_2 \frac{r^{v-1}}{c^{v-1}} = \frac{r^v + (2^v - 1) r^{v-1}}{c^v} > \frac{(r+1)^v}{c^v}.$$

Отсюда, в частности, вытекает, что $m_n > \frac{n^v}{c^v}$. Учитывая также, что

$m_{2n} = |M_{6n}(\varphi)| \leq |V_{6n}| < (12n)^n$, мы получаем

$$\prod_{j=n}^{2n-1} \frac{m_{j+1}}{m_j} = \frac{m_{2n}}{m_n} < (12c)^n. \quad (3.5)$$

Выберем j_0 , $n \leq j_0 < 2n$ так, чтобы $\frac{m_{j_0+1}}{m_{j_0}} = \min_{n < j < 2n} \frac{m_{j+1}}{m_j}$. Из (3.5) вытекает, что

$$\left(\frac{m_{j_0+1}}{m_{j_0}}\right)^n < (12c)^n.$$

Поэтому, как нетрудно видеть

$$\frac{1}{2} \frac{m_{j_0+1} - m_{j_0}}{m_{j_0}} \leq \ln \frac{m_{j_0+1}}{m_{j_0}} < \frac{\sqrt{\ln(12c)}}{n}. \quad (3.6)$$

Полагая $c_2 = 2\sqrt{\ln(12c)}$, мы получаем из (3.6) следующее неравенство:

$$|M_{i_0+2}(\varphi) \setminus M_{i_0}(\varphi)| < \frac{c_2}{n} |M_{i_0}(\varphi)|, \quad i_0 = 2n + 2j_0.$$

Предложение 3.3 доказано.

3.4. Преобразование пространства конфигураций $\mathfrak{X}_\rho(i; k, l)$. Пусть $\varphi \in \mathfrak{X}_\rho(i; l, k)$. Определим преобразование $f_i^{l, k}: \mathfrak{X}_\rho(i; k, l) \rightarrow \mathfrak{X}(V_\rho)$ следующим образом:

$$\psi(x) = f(\varphi)(x) = \begin{cases} +1, & \text{если } x \in L_{i+1}(\varphi) \\ \varphi(x) & \text{— в противном случае.} \end{cases}$$

3.5. Расширение множеств $M_i(\varphi)$. Пусть $\varphi \in \mathfrak{X}_\rho(i; l, k)$ и $\psi = f_i^{l, k}(\varphi)$.

Определение 3.5. Построим множество $\tilde{M}_i(\varphi)$ следующим образом. Мы скажем, что $z \in \tilde{M}_i(\varphi)$, если существуют $y \in M_i(\varphi)$ и ψ -путь ω такой, что y и z являются, соответственно, начальной и конечной точками пути ω .

Замечание 3.5. Если $y \in M_i(\varphi)$, то $y \notin M_{i+1}(\varphi) \setminus M_i(\varphi)$ и в силу (2.5) $y \notin L_{i+1}(\varphi)$. Поэтому из определения преобразования f вытекает, что $\varphi(y) = \psi(y)$ для всех $y \in M_i(\varphi)$, и поскольку $\varphi(y) = -1$ для всех $y \in M_i(\varphi)$, то и $\psi(y) = -1$ для всех $y \in M_i(\varphi)$.

Предложение 3.5. $M_i(\varphi) \subseteq \tilde{M}_i(\varphi) \subseteq M_{i+1}(\varphi)$.

Доказательство. Включение $M_i(\varphi) \subseteq \tilde{M}_i(\varphi)$ вытекает из замечания 3.5 и определения $\tilde{M}_i(\varphi)$. Для доказательства включения $\tilde{M}_i(\varphi) \subseteq M_{i+1}(\varphi)$ предположим противное, и пусть $z \in \tilde{M}_i(\varphi)$, $z \notin M_{i+1}(\varphi)$.

Воспользовавшись условием $z \in \tilde{M}_i(\varphi)$, найдем точку $y \in M_i(\varphi)$ и ψ -путь $\omega: [1, s] \rightarrow Z'$ такой, что $\omega(1) = y$, $\omega(s) = z$. Предположим, что y принадлежит неустойчивому ядру конфигурации φ . Это предположение не нарушает общности рассуждений, поскольку в силу заме-

чания 3.5. $\psi(x) = -1$ для всех $x \in M_i(\varphi)$, и следовательно, точка y может быть соединена с некоторой точкой $x \in U(n, \varphi)$ ψ -путем). Далее, из определения преобразования f вытекает, что путь ω является также φ -путем. Отсюда и из условия $z \in \bar{M}_{i+1}(\varphi)$ следует существование таких чисел s', s'' , что $1 \leq s' < s'' < s$, $\omega(s'') \in V_{i+1}$ и $\omega(s')$ является строго $(i+1)$ -правильно расположенной точкой конфигурации φ . Следовательно, $\omega(s') \in L_{i+1}(\varphi)$, и поэтому $\psi(\omega(s')) = +1$, откуда вытекает, что ω не является ψ -путем. Полученное противоречие доказывает требуемое включение.

3.6. Предложение 3.6. Пусть $\varphi \in \mathfrak{X}_p(i; k, l)$, и пусть

$$K_{i+2}(\varphi) = K_{i+2}^{(1)}(\varphi) \cup \dots \cup K_{i+2}^{(m)}(\varphi)$$

разбиение множества $K_{i+2}(\varphi)$ на связные компоненты. Тогда

3.6.1. Для любого j , $1 \leq j \leq m$

$$d(K_{i+2}^{(j)}(\varphi), L_{i+1}(\varphi)) = 1.$$

3.6.2. Для любой связной компоненты $\tilde{M}_i^{(0)}$ множества $\bar{M}_i(\varphi)$ найдется такое j , $1 \leq j \leq m$, что

$$d(\tilde{M}_j^{(0)}(\varphi), K_{i+2}^{(j)}(\varphi)) = 2.$$

Доказательство 3.6.1. Пусть $y \in K_{i+2}^{(j)}(\varphi)$. В силу определения $K_{i+2}(\varphi)$ точка y является $(i+2)$ -правильно расположенной точкой конфигурации φ , и кроме того, существует точка $x \in U(n, \varphi)$ и $(i+2)$ -правильный φ -путь $\omega: [1, s] \rightarrow Z'$ такой, что $\omega(1) = x$, $\omega(s) = y$. Выберем $s' \in [1, \nu, s]$ так, что $\omega(t) \in T_{i+2}$ для всех $t \in [s', s]$ и $\omega(s'-1) \in \bar{T}_{i+2}$ (Заметим, что при этом все точки $\omega(t)$, $t \in [s', s]$, принадлежат множеству $K_{i+2}^{(j)}(\varphi)$). Докажем, что $\omega(s'-1) \in V_{i-1}$. В самом деле, предположим противное, и пусть $\omega(s'-1) \in V_{i+1}$. Поскольку $\omega(s'-1) \in \bar{T}_{i+2}$, то отсюда следует, что $\omega(s'-1) \in V_{i+2}$. Выберем $s'' \in [1, s'-1]$ таким образом, чтобы $\omega(t) \in V_{i+2}$ для всех $t \in [s'', s'-1]$ и $\omega(s''-1) \in V_{i+2}$. Тогда, поскольку y является $(i+2)$ -правильно расположенной точкой конфигурации φ , $\omega(t) \in V_{i+1}$ для всех $t \in [s''-1, s]$, то $\omega(s''-1)$ также является $(i+2)$ -правильно расположенной точкой конфигурации φ , и так как $\omega(s'') \in T_{i+2}$, то отсюда вытекает, что φ -путь ω не является $(i+2)$ -правильным путем конфигурации φ . Полученное противоречие доказывает, что $\omega(s'-1) \in V_{i+1}$. Отсюда, воспользовавшись тем, что y является $(i+2)$ -правильно расположенной точкой конфигурации φ , и $\omega(t) \in T_{i+2}$ для всех $t \in [s', s]$, мы получим, что $\omega(s'-1)$ является строго $(i+1)$ -правильно расположенной точкой конфигурации φ , то есть $\omega(s'-1) \in L_{i+1}(\varphi)$. Отсюда, учитывая, что $d(\omega(s'-1), \omega(s')) = 1$ и $\omega(s') \in K_{i+2}^{(j)}(\varphi)$, мы получаем утверждение 3.6.1.

Доказательство 3.6.2. Рассмотрим произвольную связную компоненту $\tilde{M}_i^{(0)}(\varphi)$ множества $\bar{M}_i(\varphi)$, и пусть $x \in \tilde{M}_i^{(0)}(\varphi) \cap U(n, \varphi)$. Очевидно, $\tilde{M}_i^{(0)}(\varphi) = \bar{M}_i(x, \varphi)$. Пусть $z \in M_{i+1}(x, \varphi) \cap L_{i+1}(\varphi)$. Постро-

им $(i+1)$ -правильный φ -путь $\omega: [1, s] \rightarrow Z'$, $\omega(1)=x$, $\omega(s)=z$. Обозначим $S_{i+1}(\omega) = \{t \in [1, s] : \omega(t) \in L_{i+1}(\varphi)\}$, и пусть s' — наименьшее число из $S_{i+1}(\omega)$. Тогда $\omega(t) \notin L_{i+1}(\varphi)$ для всех $t \in [1, s'-1]$, и следовательно, если $\psi = f_i^{s'-1}(\varphi)$, то $\psi(\omega(t)) = -1$ для всех $t \in [1, s'-1]$. Таким образом, $\omega(s'-1) \in \tilde{M}_i(x, \varphi)$. Далее, поскольку $\omega(s') \in L_{i+1}(\varphi)$, то $\omega(s')$ является строго $(i+1)$ -правильно расположенной точкой конфигурации φ . Поэтому, если мы выберем точку $y \in T_{i+2}$ таким образом, что $d(\omega(s'), y) = 1$, то точка y будет $(i+2)$ -правильно расположенной точкой конфигурации φ . Следовательно, $y \in K_{i+2}^{(j)}$ для некоторого j , $v, 1 \leq j \leq m$. Учитывая также, что $d(y, \omega(s'-1)) = 2$, мы получаем отсюда утверждение 3.6.2.

3.7. Построение множеств $\tilde{K}_i(\varphi)$, $\tilde{L}_i(\varphi)$ и преобразования $\tilde{f}_i$.

Пусть $\varphi \in \mathfrak{X}_p(i; k, l)$, и пусть

$$\begin{aligned}\tilde{M}_i(\varphi) &= \tilde{M}_i^{(1)}(\varphi) \cup \dots \cup \tilde{M}_i^{(m_0)}(\varphi), \\ L_{i+1}(\varphi) &= L_{i+1}^{(1)}(\varphi) \cup \dots \cup L_{i+1}^{(m_1)}(\varphi), \\ K_{i+2}(\varphi) &= K_{i+2}^{(1)}(\varphi) \cup \dots \cup K_{i+2}^{(m_2)}(\varphi)\end{aligned}$$

разбиение множеств $\tilde{M}_i(\varphi)$, $L_{i+1}(\varphi)$ и $K_{i+2}(\varphi)$ на связные компоненты. Выделим подмножества индексов $J_1 \subseteq \{1, \dots, m_1\}$ и $J_2 \subseteq \{1, \dots, m_2\}$ следующим образом: $j_2 \in J_2$, если существует $j_0 \in \{1, \dots, m_0\}$ такое, что $d(\tilde{M}_i^{(j_0)}, K_{i+2}^{(j_2)}) \leq 2$, $j_1 \in J_1$, если существует $j_2 \in J_2$ такое, что $d(K_{i+2}^{(j_2)}, L_{i+1}^{(j_1)}) = 1$.

Определение 3.7.1. $\tilde{K}_{i+2}(\varphi) = \bigcup_{j_2 \in J_2} K_{i+2}^{(j_2)}(\varphi)$ ($\tilde{K}_{i+2}(\varphi) \subseteq K_{i+2}(\varphi)$).

Определение 3.7.2. $\tilde{L}_{i+1}(\varphi) = \bigcup_{j_1 \in J_1} L_{i+1}^{(j_1)}(\varphi)$ ($\tilde{L}_{i+1}(\varphi) \subseteq L_{i+1}(\varphi)$).

Определение 3.7.3. Пусть $c_2 > 0$, $c_3 > 0$. Мы скажем, что конфигурация φ принадлежит классу $\tilde{\mathfrak{X}}_p(i; \tilde{k}, \tilde{l})$, если

$$2n \leq i < 4n,$$

$$|\tilde{L}_{i+1}(\varphi) \cup \tilde{K}_{i+2}(\varphi)| \leq c_2 |\tilde{M}_i(\varphi)|^{\frac{v-1}{v}}, \quad (3.7)$$

$$|\tilde{L}_{i+1}(\varphi)| = \tilde{l}, \quad |\tilde{K}_{i+2}(\varphi)| = \tilde{k}$$

или

$$4n \leq i < 6n,$$

$$|\tilde{L}_{i+1}(\varphi) \cup \tilde{K}_{i+2}(\varphi)| \leq \frac{c_3}{n} |\tilde{M}_i(\varphi)|, \quad (3.8)$$

$$|\tilde{L}_{i+1}(\varphi)| = \tilde{l}, \quad |\tilde{K}_{i+2}(\varphi)| = \tilde{k}.$$

Замечание 3.7.3. Из формул (3.1), (3.2), (2.5), предложения 3.5 и того, что $\bar{L}_{i+1}(\varphi) \subseteq L_{i+1}(\varphi)$, $\bar{K}_{i+2}(\varphi) \subseteq K_{i+2}(\varphi)$, и $\bar{M}_i(\varphi) \subset M_i(\varphi)$, вытекает, что

$$\mathfrak{X}(p) \subset \bigcup_{\substack{2n < l < 6n \\ \bar{k}, \bar{l}}} \mathfrak{X}_p(i; \bar{k}, \bar{l}) \quad (3.9)$$

с теми же c_2 и c_3 , что и в пункте 3.3.

Определение 3.7.4. Пусть $\varphi \in \mathfrak{X}_p(i; \bar{k}, \bar{l})$. Определим преобразование $\tilde{f}_i^{\bar{k}, \bar{l}} : \mathfrak{X}_p(i; \bar{k}, \bar{l}) \rightarrow \mathfrak{X}(V_p)$ следующим образом:

$$\tilde{\psi}(x) = \tilde{f}(\varphi)(x) = \begin{cases} +1, & \text{если } x \in \bar{L}_{i+1}(\varphi) \\ \varphi(x) & \text{— в противном случае.} \end{cases} \quad (3.10)$$

3.8. Предложение 3.8. Пусть $\varphi \in \mathfrak{X}_p(i; k, l)$, и пусть $\tilde{\psi} = -\tilde{f}_i(\varphi)$. Тогда $\tilde{\psi}(\varphi) = -1$ для всех $y \in \bar{M}_i(\varphi)$, и $\tilde{\psi}(y) = +1$ для всех $y \in \partial_1 \bar{M}_i(\varphi)$.

Доказательство. Пусть $\psi_i(\varphi)$, $\tilde{\psi} = \tilde{f}_i(\varphi)$. Заметим, что из условия $\bar{L}_{i+1}(\varphi) \subseteq L_{i+1}(\varphi)$ и определения преобразований f_i и $\tilde{f}_i$ вытекает, что если $\psi(z) = -1$ для некоторого $z \in Z'$, то и $\tilde{\psi}(z) = -1$. В самом деле, условие $\psi(z) = -1$ влечет условие $z \in L_{i+1}(\varphi)$, откуда следует, что $z \in \bar{L}_{i+1}(\varphi)$, и следовательно, $\tilde{\psi}(z) = -1$. Так как $\psi(z) = -1$ для всех $z \in \bar{M}_i(\varphi)$, то из этого замечания вытекает, что $\tilde{\psi}(z) = -1$ для всех $z \in \bar{M}_i(\varphi)$, что доказывает первую часть предложения 3.8.

Заметим далее, что в силу определения $\bar{M}_i(\varphi)$ (см. пункт 3.5) $\tilde{\psi}(z) = +1$ для всех $y \in \partial_1 \bar{M}_i(\varphi)$. Предположим, что $\tilde{\psi}(y_1) = -1$ для некоторого $y_1 \in \partial_1 \bar{M}_i(\varphi)$. Тогда $\tilde{\psi}(y_1) \neq \psi(y_1)$, и следовательно, $y_1 \in (L_{i+1}(\varphi) \setminus \bar{L}_{i+1}(\varphi))$. Поэтому y_1 является строго $(i+1)$ -правильно расположенной точкой конфигурации φ . Отсюда следует, что если точка y_2 удовлетворяет условиям $d(y_1, y_2) = 1$, $y_2 \in T_{i+2}$, то y_2 является $(i+2)$ -правильно расположенной точкой конфигурации φ . Далее, воспользовавшись условием $y_1 \in \partial_1 \bar{M}_i(\varphi)$, выберем точку $y_0 \in \bar{M}_i(\varphi)$ такую, что $d(y_0, y_1) = 1$. Таким образом, мы построили три точки y_0, y_1, y_2 такие, что $y_0 \in \bar{M}_i(\varphi)$, $y_1 \in L_{i+1}(\varphi)$, $y_2 \in K_{i+2}(\varphi)$, и $d(y_0, y_2) = 2$, $d(y_2, y_1) = 1$. Отсюда и из определений пункта 3.7 вытекает, что $y_1 \in \bar{L}_{i+1}(\varphi)$, и следовательно $\tilde{\psi}(y_1) = +1$.

3.9. Оценка для вероятности множества $\mathfrak{X}_p(i; k, l)$. В этом пункте приводятся простые оценки для вероятности множеств

$\mathfrak{X}_p(i; k, l)$, которые играют важную роль в дальнейшем. Поскольку мы предположили, что $h > 0$, то в силу определения преобразования $\tilde{f}_i^{-1}$ для любой конфигурации $\varphi(\mathfrak{X}_p(i; k, l))$

$$q_p(\varphi) \leq \exp\{\nu\beta l\} q_p(\tilde{f}_i(\varphi)).$$

Поэтому

$$q_p(\mathfrak{X}_p(i; \bar{k}, \bar{l})) \leq \exp\{\nu\beta \bar{l}\} \sum_{\varphi \in \mathfrak{X}_p(i; \bar{k}, \bar{l})} q_p(\tilde{f}_i(\varphi)) = \quad (3.11)$$

$$= \exp\{\nu\beta \bar{l}\} \sum_{\varphi \in \mathfrak{X}_p(i; \bar{k}, \bar{l})} |\{\varphi \in \mathfrak{X}_p(i; \bar{k}, \bar{l}) \mid \tilde{f}_i(\varphi) = \psi\}| q_p(\varphi),$$

где через $|\{\varphi \in \mathfrak{X}_p(i; \bar{k}, \bar{l}) \mid \tilde{f}_i(\varphi) = \psi\}|$ обозначено число конфигураций φ , которые переходят в данную конфигурацию ψ при применении преобразования $\tilde{f}_i$.

3.10. Описание множества $\tilde{f}_i(\mathfrak{X}_p(i; \bar{k}, \bar{l}))$. Пусть $\varphi \in \mathfrak{X}_p(i; k, l)$, $2n \leq i < 6n$, и $\psi = f_i(\varphi)$, $\tilde{\psi} = \tilde{f}_i(\varphi)$, $p = 6n + n_0$ ($0 \leq n_0 \leq 5$). В соответствии с принятым соглашением $\varphi(z) = \psi(z) = \tilde{\psi}(z) = -1$ для всех $z \in V_{p+1}$. Поэтому можно ввести внешние контуры, отвечающие конфигурации $\tilde{\psi}$.

Предложение 3.10.1. *В расположении внешних контуров, отвечающих конфигурации $\tilde{\psi}$, найдется контур, обозначаемый далее через Γ_0 , такой, что его внутренность $\text{int}(\Gamma_0)$ содержит стандартный куб V_n , $\text{int}(\Gamma_0) \supset V_n$.*

Доказательство. В силу условия $\varphi(z) = \tilde{\psi}(z) = \psi(z) = -1$ для $z \in V_{p+1}$ в разложении множества $\{z \mid \tilde{\psi}(z) = -1\}$ на связные компоненты найдется в точности одна бесконечная компонента, которую мы обозначим через A . Через $A_0, A_1, \dots, A_k$ обозначим связные компоненты множества $Z' \setminus A$. Эти $A_0, A_1, \dots, A_k$ являются внутренностями внешних контуров $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_k$ конфигурации $\tilde{\psi}$ ($A_i = \text{int}(\Gamma_i)$, $i = 1, \dots, k$). Если A не пересекается с V_n , то V_n целиком лежит в одной из компонент $A_0, \dots, A_k$ (Здесь через A_0 обозначена та связная компонента, которая целиком содержит V_n , $V_n \subseteq A_0 = \text{int}(\Gamma_0)$). Поэтому достаточно обнаружить, что A не пересекается с V_n . В самом деле, предположим противное и пусть $x \in A \cap V_n$. Пользуясь связностью A и тем, что $\tilde{\psi}(z) = -1$ для всех $z \in A$, найдем $\tilde{\psi}$ -путь $\omega: [1, s] \rightarrow Z'$ такой, что $\omega(1) = x$, $\omega(s) \in V_{p+1}$. Из определения преобразования $\tilde{f}_i$ вытекает, что ω является также φ -путем. Выделим подмножество индексов $J, J \subset \{1, \dots, s\}$, для которых $\omega(j), j \in J$ являются

строго $(i+1)$ -правильно расположенными точками конфигурации φ . Заметим, что множество J не пусто. Для доказательства этого воспользуемся условием $\omega(1) = x \in V_n$, $\omega(s) \in V_{p+1}$ и через j_0 обозначим наибольший элемент множества $\{1, \dots, s\}$, для которого $\omega(j_0) \in V_{i+1}$. Тогда $\omega(j') \in V_{i+1}$ для всех $j', j_0 < j' \leq s$ и, следовательно, $\omega(j_0)$ является строго $(i+1)$ -правильно расположенной точкой конфигурации φ , т. е. в самом деле $J \neq \emptyset$, ибо $j_0 \in J$. Пусть j_1 — наименьший элемент множества J . В силу выбора j_1 отрезок $[1, j_1]$ пути ω является $(i+1)$ -правильным φ -путем. Следовательно, $\psi(\omega(j_1)) = \tilde{\psi}(\omega(j_1)) = +1$, что противоречит тому, что ω является $\tilde{\psi}$ -путем. Полученное противоречие показывает, что A не пересекается с V_n . Предложение 3.10.1 доказано.

Замечание 3.10.1. $\tilde{M}_i(\varphi) \subset \text{int}(\Gamma_0)$.

Доказательство. Как было показано в пункте 3.8, $\tilde{\psi}(y) = -1$ для всех $y \in \tilde{M}_i(\varphi)$. Поэтому всякая связная компонента множества $\tilde{M}_i(\varphi)$ может либо целиком лежать в $\text{int}(\Gamma_0)$, либо целиком вне $\text{int}(\Gamma_0)$. Учитывая, что каждая из этих связных компонент имеет непустое пересечение с V_n , и $V_n \subset \text{int}(\Gamma_0)$, мы получим требуемое утверждение.

Перейдем к описанию свойств конфигурации $\tilde{\psi}$ на множестве $\text{int}(\Gamma_0)$.

Предложение 3.10.2. Пусть $c_2 > 0$ — произвольно, а c_3 выбрано таким образом, что имеет место утверждение предложения 3.2. Тогда

а) В расположении внешних контуров на множестве $\text{int}(\Gamma_0)$, отвечающих конфигурации $\tilde{\psi}$, найдется контур γ , внутренность которого, $\text{int}(\gamma)$, имеет непустое пересечение как с V_n , так и с $(V_{2n})^c$.

в) Пусть $\varphi \in \mathfrak{X}_p(i; k, \tilde{l})$ с $2n \leq i < 4n$, и пусть $\{\gamma_1, \dots, \gamma_m\}$ — набор всех тех внешних контуров конфигурации $\tilde{\psi}$ на множестве $\text{int}(\Gamma_0)$, внутренности которых, $\text{int}(\gamma_j)$, $j = 1, \dots, m$, имеют непустое пересечение как с V_n , так и с $(V_{2n})^c$. Тогда

$$\sum_{j=1}^m |\gamma_j| > |\tilde{M}_i(\varphi)|^{i-1} \geq c_2 (|\tilde{K}_{i+2}(\varphi)| + |\tilde{L}_{i+1}(\varphi)|). \quad (3.12)$$

Доказательство. а) Пусть

$$\tilde{M}_i(\varphi) = \tilde{M}_i^{(1)}(\varphi) \cup \dots \cup \tilde{M}_i^{(m)}(\varphi)$$

разложение множества $\tilde{M}_i(\varphi)$ на связные компоненты. В соответствии с предложением пункта 3.8 $\tilde{\psi}(y) = -1$ для всех $y \in \tilde{M}_i^{(j)}(\varphi)$ и $\tilde{\psi}(y) = +1$ для всех $y \in \partial_1 \tilde{M}_i^{(j)}(\varphi)$. Поэтому множества $\tilde{M}_i^{(j)}(\varphi)$ и $\partial_1 \tilde{M}_i^{(j)}(\varphi)$ разделяются контурами конфигурации $\tilde{\psi}$, один из которых (внешний),

обозначаемый далее через γ_j , удовлетворяет условию

$$\bar{M}_j^{(l)}(\varphi) \subseteq \text{int}(\gamma_j) \subseteq \text{int}(\Gamma_0), \quad j=1, \dots, m. \quad (3.13)$$

Пользуясь предложением 3.6.2, для каждого $\bar{M}_j^{(l)}(\varphi)$ найдем связную компоненту $\bar{K}_{l+2}^{(j)}$ множества $\bar{K}_{l+2}(\varphi)$ такую, что $d(\bar{M}_j^{(l)}(\varphi), \bar{K}_{l+2}^{(j)}(\varphi)) = 2$. Отсюда, с учетом включений $\bar{M}_j^{(l)}(\varphi) \subseteq \text{int}(\Gamma_0)$ и $\bar{K}_{l+2}^{(j)}(\varphi) \subseteq (\text{int}(\Gamma_0))^c$ вытекает, что γ_j являются внешними контурами конфигурации $\bar{\psi}$ на множестве $\text{int}(\Gamma_0)$.

b) Если хотя бы при одном $j=1, \dots, m$, $|\gamma_j| \geq |\bar{M}_j(\varphi)|^{\frac{\nu-1}{\nu}}$, то неравенство (3.12) выполнено очевидным образом. Поэтому предположим, что $|\gamma_j| \leq |\bar{M}_j(\varphi)|^{\frac{\nu-1}{\nu}}$ при всех $j=1, \dots, m$. Воспользовавшись изопериметрическим неравенством $|\gamma| \geq 2\nu |\text{int}(\gamma)|^{\frac{\nu-1}{\nu}}$, справедливым для любого контура γ , получим

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m |\gamma_j| &= \sum_{j=1}^m |\gamma_j|^{\frac{\nu-1}{\nu}} |\gamma_j|^{-\frac{1}{\nu-1}} \geq |\bar{M}_j|^{-\frac{1}{\nu}} \sum_{j=1}^m |\gamma_j|^{\frac{\nu-1}{\nu}} \geq \\ &> (2\nu)^{\frac{\nu}{\nu-1}} |\bar{M}_j|^{-\frac{1}{\nu}} \sum_{j=1}^m |\text{int}(\gamma_j)| \geq |\bar{M}_j(\varphi)|^{\frac{\nu-1}{\nu}}. \end{aligned}$$

Здесь ν — размерность решетки Z' . Предложение 3.10.2 полностью доказано.

Ниже нам понадобится следующее простое

Замечание 3.10.2. Контур γ , внутренность которого имеет непустое пересечение как с V_n , так и с $(V_{2n})^c$, удовлетворяет условию $|\gamma| \geq n$

Доказательство. Если $\text{int}(\gamma)$ не содержит целиком слой T_r , ни при каком r , $n < r < 2n$, то в любом из слоев T_r , $r=n, n+1, \dots, 2n-1$, найдутся две точки x, y , $d(x, y) = 1$, такие, что $x \in \text{int}(\gamma)$, $y \notin \text{int}(\gamma)$, и грань, разделяющая эти две точки, принадлежит γ . Поскольку число таких слоев не меньше n , то и $|\gamma| \geq n$. Пусть теперь $T_r \subseteq \text{int}(\gamma)$ для некоторого r , $n < r < 2n$. Через $T_r^{(up)}$ обозначим множество точек T_r вида

$$T_r^{(up)} = \{y = (x_1, \dots, x_\nu) \in Z' \mid x_1 = r, |x_2| < r, \dots, |x_\nu| < r\}$$

и для $y_0 = (x_1^{(0)}, \dots, x_\nu^{(0)}) \in T_r^{(up)}$ через $T_r^+(y_0)$ обозначим множество

$$T_r^+(y_0) = \{z = (x_1, \dots, x_\nu) \in Z' \mid x_1 \geq r, x_2 = x_2^{(0)}, \dots, x_\nu = x_\nu^{(0)}\}.$$

Из ограниченности $\text{int}(\gamma)$ и того, что $T_r \subseteq \text{int}(\gamma)$, вытекает, что для любой точки $y \in T_r^{(up)}$ можно найти такие точки $z_1, z_2 \in T_r^+(y)$, что $d(z_1, z_2) \in T_r^+(y)$, что $d(z_1, z_2) = 1$, $z_1 \in \text{int}(\gamma)$, $z_2 \notin \text{int}(\gamma)$. Точки z_1 и z_2 разделяются гранью контура γ . Таким образом, каждой точке $y \in T_r^{(up)}$ сопоставляется грань контура γ , и следовательно, $|\gamma| \geq |T_r^{(up)}| \geq n^{\nu-1} \geq n$.

3.11. Оценки. Наконец, пользуясь формулой (3.11), оценим вероятность множества $\bar{\mathfrak{X}}_p(i; \bar{k}, \bar{l})$.

Предложение 3.11.1 Пусть $\varphi \in \bar{\mathfrak{X}}_p(i; \bar{k}, \bar{l})$, и пусть M' — связная компонента множества $\{x \mid \varphi(x) = -1\}$, имеющая непустое пересечение как с V_n , так и с $(V_{2n})^c$. Тогда M' неограничено.

Доказательство. Предположим противное, и пусть M' — ограниченное множество. Обозначим через γ' контур, ограничивающий множество M' . Из замечания 3.10.2 вытекает, что $|\gamma'| > n$. Но все конфигурации, удовлетворяющие этому условию, были ранее исключены нами из рассмотрения (см. пункт 3.1), следовательно $\varphi \notin \bar{\mathfrak{X}}_p(i; \bar{k}, \bar{l})$. Полученное противоречие доказывает неограниченность множества M' .

3.11.2 Зафиксируем конфигурацию $\bar{\psi} \in \bar{f}_i(\bar{\mathfrak{X}}_p(i; \bar{k}, \bar{l}))$ и оценим $|\{\varphi \in \bar{\mathfrak{X}}_p(i; \bar{k}, \bar{l}) \mid f_i(\varphi) = \bar{\psi}\}|$.

При этом мы будем пользоваться описанием свойств конфигурации $\bar{\psi}$, приведенным в 3.10. Зная конфигурацию $\bar{\psi}$, можно единственным способом восстановить множества $M_i^{(j)}(\varphi)$, пользуясь следующим алгоритмом.

В расположении внешних контуров, отвечающих конфигурации $\bar{\psi}$, выберем тот контур Γ_0 (см. 3.10.1), внутренность которого, $\text{int}(\Gamma_0)$, содержит куб V_n . Рассмотрим, далее, ограничение конфигурации $\bar{\psi}$ на $\text{int}(\Gamma_0)$ и в $\text{int}(\Gamma_0)$ выделим все внешние контуры $\gamma_1, \dots, \gamma_m$, внутренность которых, $\text{int}(\gamma_j)$, имеет непустое пересечение как с V_n , так и с $(V_{2n})^c$. В каждом из множеств $\text{int}(\gamma_j)$, $j=1, \dots, m$, в свою очередь, выделим связную компоненту множества $\{x \in Z \mid \bar{\psi}(x) = -1\}$, примыкающую к $\partial_i \text{int}(\gamma_j)$.

Заметим, что если $\varphi \in \bar{\mathfrak{X}}_p(i; \bar{k}, \bar{l})$ и $f_i(\varphi) = \bar{\psi}$, то в силу определения преобразования f_i , $\varphi(x) = -1$ для всех $x \in M_i^{(j)}(\varphi)$. Поэтому, как вытекает из предложения 3.11.1, $M_i^{(j)}(\varphi) \subset M'$, где M' — неограниченная связная компонента множества $\{x \in Z \mid \varphi(x) = -1\}$. Отсюда и из определения $M_i^{(j)}(\varphi)$ вытекает, что предложенный выше алгоритм позволяет по конфигурации $\bar{\psi}$ единственным образом восстановить множества $M_i^{(j)}(\varphi)$.

Далее, связная компонента $K^{(0)}$ множества $(i+2)$ -правильно расположенных точек конфигурации $\bar{\psi}$, в силу 3.7.2, может лежать в $\bar{K}_{i+2}(\varphi)$ только в том случае, если $d(K^{(0)}, M_i^{(j)}(\varphi)) = 2$ для некоторого j ($j=1, \dots, m$). Считая, что все точки Z занумерованы некоторым способом (например, в лексикографическом порядке), выберем среди точек $x \in K^{(0)}$, удовлетворяющих условию $d(x, M_i^{(j)}(\varphi)) = 2$, пер-

вую точку, и обозначим ее через x_0 . Аналогичным образом в $M_i^{(1)}(\varphi)$ выберем первую точку, удовлетворяющую условию $d(x_0, y_0) = 2$, и пусть $z_0 \in Z^*$ — первая точка, удовлетворяющая условиям $d(x_0, z_0) = 1$, $d(y_0, z_0) = 1$. Заметим, что $\bar{\psi}(x_0) = \bar{\psi}(z_0) = -1$ и $\bar{\psi}(y_0) = +1$, и поскольку $z_0 \in M_i^{(1)}(\varphi)$, $y_0 \in M_i^{(1)}(\varphi)$, то точки y_0 и z_0 разделяются гранью контура γ_j . Таким образом, каждой связной компоненте $K^{(0)}$ ставится в соответствие некоторая грань из $\gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_m$, при этом, как нетрудно видеть, это отображение инъективно. Отсюда вытекает, что поскольку $\bar{K}_{l+2}(\varphi)$ является объединением связных компонент указанного типа, то число возможных способов выбора $\bar{K}_{l+2}(\varphi)$ не превосходит $2^{|\gamma_1| + \dots + |\gamma_m|}$.

Наконец, поскольку $\bar{L}_{l+1}(\varphi)$ примыкает к $\bar{K}_{l+2}(\varphi)$, то используя лемму 1.4, мы получаем, что при фиксированных $\bar{K}_{l+2}(\varphi)$ и $\bar{L} = |\bar{L}_{l+1}(\varphi)|$ число возможных способов выбора $L_{l+1}(\varphi)$ не превосходит $\exp\{c_1(\bar{l} + |\bar{K}_{l+2}(\varphi)|)\}$.

Собирая вместе полученные оценки, будем иметь окончательно

$$|\varphi \in \bar{\mathfrak{M}}_p(i; \bar{k}, \bar{l}) | f_i(\varphi) = \bar{\psi} | \leq \exp\{c_1(\bar{l} + \bar{k}) + \ln 2(|\gamma_1| + \dots + |\gamma_m|)\}. \quad (3.14)$$

3.11.3. Оценка вероятности $q_p(\bar{\psi})$. Зафиксируем $i, \bar{k}$ и $\bar{l}$ ($2n \leq i < 6n$). Как и в 3.10, для конфигурации $\bar{\psi} \in \bar{\mathfrak{M}}_p(i; \bar{k}, \bar{l})$ через $\Gamma_0(\bar{\psi})$ обозначим внешний контур конфигурации $\bar{\psi}$, удовлетворяющий условию $\text{int}(\Gamma_0) \supset V_n$, а через $\gamma_1(\bar{\psi}), \dots, \gamma_m(\bar{\psi})$, $m \geq 1$, внешние на $\text{int}(\Gamma_0(\bar{\psi}))$ контуры конфигурации $\bar{\psi}$, имеющие непустое пересечение как с V_n , так и с $(V_{2n})^c$.

Введем следующие обозначения:

$$N(\bar{\psi}) = \exp\{c_1(\bar{l} + \bar{k}) + \ln 2(|\gamma_1| + \dots + |\gamma_m|)\},$$

$q(\bar{\psi}(\text{int} \Gamma_0) | \bar{\psi}(\text{int} \Gamma_0)^c)$ — вычисленная в соответствии с (2) условная гиббсовская вероятность конфигурации $\bar{\psi}(\text{int} \Gamma_0)$, при условии, что фиксировано значение гиббсовского поля вне $\text{int}(\Gamma_0)$. $A(\Gamma_0)$ — множество всех тех конфигураций $\bar{\psi} \in \bar{\mathfrak{M}}_p(i; \bar{k}, \bar{l})$, для которых данный контур $\Gamma_0(\text{int}(\Gamma_0) \supset V_n)$ является внешним контуром.

$A_{\Gamma_0}(\gamma_1, \dots, \gamma_m)$ — множество всех конфигураций $\bar{\psi} \in A(\Gamma_0)$, для которых внешними на $\text{int}(\Gamma_0)$ контурами, пересекающимися с V_n и с $(V_{2n})^c$, являются данные контуры $\gamma_1, \dots, \gamma_m$. Для данных целых положительных $u_1, \dots, u_m$ через $A_{\Gamma_0}(\gamma_1, \dots, \gamma_m, u_1, \dots, u_m)$ обозначим множество

всех конфигураций $\tilde{\psi} \in A_{\Gamma_0}(\gamma_1, \dots, \gamma_m)$, для которых $|M_i^{(1)}(\tilde{\psi})| = u_1, \dots, |M_i^{(m)}(\tilde{\psi})| = u_m$.

Выражение

$$\sum_{\tilde{\psi} \in \tilde{A}_{\Gamma_0}(\gamma_1, \dots, \gamma_m)} N(\tilde{\psi}) q_p(\tilde{\psi}) \quad (3.15)$$

будем оценивать отдельно в случае $2n \leq i < 4n$ и в случае $4n \leq i < 6n$. Пусть $2n \leq i < 4n$. Используя лемму 1.1, получим

$$\begin{aligned} & \sum_{\tilde{\psi} \in A_{\Gamma_0}(\gamma_1, \dots, \gamma_m)} N(\tilde{\psi}) q_p(\tilde{\psi}) \leq \\ & \leq \sum_{\tilde{\psi} \in A_{\Gamma_0}(\gamma_1, \dots, \gamma_m)} N(\tilde{\psi}) q_p \{ \tilde{\psi}((\text{int } \Gamma_0)^c) \} q \{ \tilde{\psi}(\text{int } \Gamma_0) | \tilde{\psi}(\text{int } \Gamma_0)^c \} \leq \\ & \leq \sum_{\tilde{\psi} \in A_{\Gamma_0}(\gamma_1, \dots, \gamma_m)} \exp \{ c_1(\bar{l} + \bar{k}) + (\ln 2 - 2\beta) \left(\sum_{j=1}^m |\gamma_j| \right) \} q_p \{ \tilde{\psi}(\text{int } \Gamma_0)^c \}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Отсюда и из (3.12) очевидным образом вытекает следующая оценка, справедливая для всех $\delta > 0$

$$\begin{aligned} & \sum_{\tilde{\psi} \in A_{\Gamma_0}(\gamma_1, \dots, \gamma_m)} N(\tilde{\psi}) q_p(\tilde{\psi}) \leq \\ & \leq \sum_{\tilde{\psi} \in A_{\Gamma_0}(\gamma_1, \dots, \gamma_m)} \exp \left\{ -\beta(\bar{l} + \bar{k}) + \left(\frac{c_1 + \delta}{c_2} + \ln 2 - 2\beta \right) \times \right. \\ & \quad \left. \times \sum_{j=1}^m |\gamma_j| \right\} q_p \{ \tilde{\psi}(\text{int } \Gamma_0)^c \}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Пусть теперь $4n \leq i < 6n$. Заметим, что

$$\begin{aligned} & \sum_{\tilde{\psi} \in A_{\Gamma_0}(\gamma_1, \dots, \gamma_m)} N(\tilde{\psi}) q_p(\tilde{\psi}) \leq \\ & \leq \sum_{u_1, \dots, u_m} \sum_{\tilde{\psi} \in A_{\Gamma_0}(\gamma_1, \dots, \gamma_m; u_1, \dots, u_m)} N(\tilde{\psi}) q_p(\tilde{\psi}). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Для внутренней суммы в правой части (3.18) имеем

$$\begin{aligned} & \sum_{\tilde{\psi} \in A_{\Gamma_0}(\gamma_1, \dots, \gamma_m; u_1, \dots, u_m)} N(\tilde{\psi}) q_p(\tilde{\psi}) \leq \\ & \leq \sum_{\tilde{\psi} \in A_{\Gamma_0}(\gamma_1, \dots, \gamma_m; u_1, \dots, u_m)} \exp \left\{ c_1(\bar{l} + \bar{k}) + (\ln 2 - 2\beta) \times \right. \\ & \quad \left. \times \sum_{j=1}^m |\gamma_j| - h \sum_{j=1}^m h_j \right\} q_p \{ \tilde{\psi}(\text{int } \Gamma_0)^c \}, \end{aligned} \quad (3.19)$$

где h — внешнее поле. Пусть $h \geq \frac{c_4}{n}$, где значение c_4 будет указано

позже. Тогда, поскольку $u_1 + \dots + u_m = |\bar{M}_l(\bar{\psi})|$ и $|\bar{M}_l(\bar{\psi})|$ удовлетворяет неравенству (3.8), то из формулы (3.19) вытекает следующее неравенство:

$$\begin{aligned} & \sum_{\bar{\psi} \in A_{\Gamma_0}(\gamma_1, \dots, \gamma_m; a_1, \dots, a_m)} N(\bar{\psi}) q_p(\bar{\psi}) \leq \\ & \leq \sum_{\bar{\psi} \in A_{\Gamma_0}(\gamma_1, \dots, \gamma_m; a_1, \dots, a_m)} \exp \left\{ \left(c_1 - \frac{c_4}{c_2} \right) (\bar{k} + \bar{l}) + \right. \\ & \left. + (\ln 2 - 2\beta) \sum_{j=1}^m |\gamma_j| \right\} q_p \left\{ \bar{\psi} \left((\text{int } \Gamma_0)^c \right) \right\}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Но $0 < u_j = |M_l^{(j)}(\bar{\psi})| \leq |V_{p+1}|$. Поэтому (3.18) и (3.20) приводят к оценке

$$\begin{aligned} & \sum_{\bar{\psi} \in A_{\Gamma_0}(\gamma_1, \dots, \gamma_m)} N(\bar{\psi}) q_p(\bar{\psi}) \leq \\ & \leq |V_{p+1}|^m \sum_{\bar{\psi} \in A_{\Gamma_0}(\gamma_1, \dots, \gamma_m)} \exp \left\{ \left(c_1 - \frac{c_4}{c_2} \right) (\bar{k} + \bar{l}) + \right. \\ & \left. + (\ln 2 - 2\beta) \sum_{j=1}^m |\gamma_j| \right\} q_p \left\{ \bar{\psi} \left((\text{int } \Gamma_0)^c \right) \right\}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} & \sum_{\bar{\psi} \in A(\Gamma_0)} N(\bar{\psi}) q_p(\bar{\psi}) \leq \\ & \leq \sum_{m \geq 1} \frac{1}{m!} \sum'_{\{\gamma_1, \dots, \gamma_m\}} \sum_{\bar{\psi} \in A_{\Gamma_0}(\gamma_1, \dots, \gamma_m)} N(\bar{\psi}) q_p(\bar{\psi}), \end{aligned} \quad (3.22)$$

где сумма со штрихом в правой части (3.22) означает, что суммирование производится уже по упорядоченным наборам контуров. Для данного v число контуров γ , удовлетворяющих условию $|\gamma| = v$ и проходящих через данную точку, не превосходит $\exp \{c_1 v\}$ в соответствии с леммой 1.2, а число способов выбора этой точки не превосходит $|V_{p+1}|$. Учитывая также, что $v_j = |\gamma_j| \geq n$ для любого $j = 1, \dots, m$ и подставляя полученную в (3.17) оценку в правую часть (3.22), получим

$$\begin{aligned} & \sum_{\bar{\psi} \in A(\Gamma_0)} N(\bar{\psi}) q_p(\bar{\psi}) \leq \\ & \leq \sum_{m \geq 1} \frac{|V_{p+1}|^m}{m!} \left(\sum_{v \geq n} \exp \left\{ \left(c_1 + \frac{c_1 + \delta}{c_2} + \ln 2 - 2\beta \right) v \right\} \right)^m \times \\ & \times \sum_{\bar{\psi} \in A(\Gamma_0)} \exp \{ -\delta(\bar{k} + \bar{l}) \} q_p \left\{ \bar{\psi} \left((\text{int } \Gamma_0)^c \right) \right\}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

вслучае $2n \leq i < 4n$. Аналогичным образом для $4n \leq i < 6n$ из (3.21), и (3.22) получаем оценку

$$\begin{aligned} & \sum_{\tilde{\psi} \in \Lambda(\Gamma_0)} N(\tilde{\psi}) q_p(\tilde{\psi}) \leq \\ & \leq \sum_{m \geq 1} \frac{|V_{p+1}|^{2m}}{m!} \left(\sum_{v \geq n} \exp \{ (c_1 + \ln 2 - 2\beta) v \} \right)^m \times \\ & \times \sum_{\tilde{\psi} \in \Lambda(\Gamma_1)} \exp \left\{ \left(c_1 - \frac{c_4}{c_2} \right) (\tilde{k} + \tilde{l}) \right\} q_p \{ \tilde{\psi} ((\text{int } \Gamma_0)^c) \}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Для того, чтобы первые множители в правых частях неравенств (3.23) и (3.24) имели смысл, то есть чтобы соответствующие ряды (очевидно, геометрические прогрессии) сходились, достаточно, как легко видеть, лишь одного условия

$$\delta_1 = 2\beta - c_1 - \ln 2 - \frac{c_1 + \delta}{c_2} > 0. \quad (3.25)$$

Положим также

$$\delta_2 = \min \left(\delta, \frac{c_4}{c_2} - c_1 \right). \quad (3.26)$$

Тогда, поскольку $|V_{p+1}|^m \leq |V_{p+1}|^{2m}$ и $\exp \{ (c_1 + \ln 2 - 2\beta) v \} \leq \exp \left\{ \left(c_1 + \frac{c_1 + \delta}{c_2} + \ln 2 - 2\beta \right) v \right\} = \exp \{ -\delta_1 v \}$, то левые части (3.23) и (3.24) уже при всех i , $2n < i < 6n$, допускают единую оценку

$$\begin{aligned} & \sum_{\tilde{\psi} \in \Lambda(\Gamma_0)} N(\tilde{\psi}) q_p(\tilde{\psi}) \leq \\ & \leq \sum_{m \geq 1} \frac{|V_{p+1}|^{2m}}{m!} \left[\sum_{v \geq n} \exp \{ -\delta_1 v \} \right]^m \times \\ & \times \sum_{\tilde{\psi} \in \Lambda(\Gamma_1)} \exp \{ -\delta_2 (\tilde{k} + \tilde{l}) \} q_p \{ \tilde{\psi} ((\text{int } \Gamma_0)^c) \}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Имеем

$$\begin{aligned} \sum_{m \geq 1} \frac{|V_{p+1}|^{2m}}{m!} \left[\sum_{v \geq n} \exp \{ -\delta_1 v \} \right]^m &= \sum_{v \geq n} \frac{|V_{p+1}|}{m!} \left[\frac{\exp \{ -\delta_1 n \}}{1 - \exp \{ -\delta_1 \}} \right]^m = \\ &= \exp \left[|V_{p+1}|^2 \frac{\exp \{ -\delta_1 n \}}{1 - \exp \{ -\delta_1 \}} \right] - 1. \end{aligned}$$

С другой стороны

$$\lim_{p \rightarrow \infty} |V_{p+1}|^2 \frac{\exp \left(-\frac{\delta_1}{2} n \right)}{1 - \exp \{ -\delta_1 \}} = 0, \quad (3.28)$$

поскольку $|V_{p+1}| \leq (3p)^p$ и $n = \left\lfloor \frac{p}{6} \right\rfloor$. Поэтому для достаточно больш-

ших p

$$\sum_{m>1} \frac{|V_{p+1}|^{2m}}{m!} \left[\sum_{\sigma>n} \exp(-\delta_1 \sigma) \right]^m \leq \exp\left(-\frac{\delta_1}{2} n\right).$$

Теперь из (3.27) следует

$$\sum_{\tilde{\psi} \in \Lambda(\Gamma_0)} N(\tilde{\psi}) q_p(\tilde{\psi}) \leq \exp\left\{-\frac{\delta_1}{2} n - \delta_2(\tilde{k} + \tilde{l})\right\} \sum_{\tilde{\psi} \in \Lambda(\Gamma_0)} q_p(|\tilde{\psi}((\text{int } \Gamma_0)^c)|). \quad (3.29)$$

Далее, для любых двух пар $(\Gamma_0, \tilde{\psi}'((\text{int } \Gamma_0)^c))$ и $(\Gamma_0, \tilde{\psi}''((\text{int } \Gamma_0)^c))$ события $\{|\tilde{\psi}'((\text{int } \Gamma_0)^c)| = \tilde{\psi}'((\text{int } \Gamma_0)^c)\}$ и $\{|\tilde{\psi}''((\text{int } \Gamma_0)^c)| = \tilde{\psi}''((\text{int } \Gamma_0)^c)\}$ несовместимы, если только $\Gamma_0' \neq \Gamma_0''$ или $\tilde{\psi}'((\text{int } \Gamma_0)^c) \neq \tilde{\psi}''((\text{int } \Gamma_0)^c)$ при $\Gamma_0' = \Gamma_0''$. Поэтому

$$\sum_{\Gamma_0: \text{int } \Gamma_0 \supset V_n} \sum_{\tilde{\psi} \in \Lambda(\Gamma_0)} q_p(|\tilde{\psi}((\text{int } \Gamma_0)^c)|) \leq 1. \quad (3.30)$$

С другой стороны

$$\sum_{\tilde{\psi} \in \mathfrak{X}_p(i; \tilde{k}, \tilde{l})} N(\tilde{\psi}) q_p(\tilde{\psi}) \leq \sum_{\Gamma_0: \text{int } (\Gamma_0) \supset V_n} \sum_{\tilde{\psi} \in \Lambda(\Gamma_0)} N(\tilde{\psi}) q_p(\tilde{\psi}) \quad (3.31)$$

и поэтому из (3.29), (3.30) и (3.31) следует

$$\begin{aligned} \sum_{\tilde{\psi} \in \mathfrak{X}_p(i; \tilde{k}, \tilde{l})} &\leq \sum_{\Gamma_0: \text{int } (\Gamma_0) \supset V_n} \exp\left\{-\frac{\delta_1}{2} n - \delta_2(\tilde{k} + \tilde{l})\right\} \times \\ &\times \sum_{\tilde{\psi} \in \Lambda(\Gamma_0)} q_p(|\tilde{\psi}((\text{int } \Gamma_0)^c)|) \leq \exp\left\{-\frac{\delta_1}{2} n - \delta_2(\tilde{k} + \tilde{l})\right\}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Пользуясь определением $N(\tilde{\psi})$, приведенным в начале этого пункта, а также формулами (3.11), (3.14) и (3.31), получим

$$\begin{aligned} q_p\{\mathfrak{X}_p(i; \tilde{k}, \tilde{l})\} &\leq \exp\{\nu\beta\tilde{l}\} \sum_{\tilde{\psi} \in \mathfrak{X}_p(i; \tilde{k}, \tilde{l})} N(\tilde{\psi}) q_p(\tilde{\psi}) \leq \\ &\leq \exp\left\{-\frac{\delta_1}{2} n - \delta_2\tilde{k} - (\delta_2 - \nu\beta)\tilde{l}\right\}. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Предположим, что

$$\delta_2 - \nu\beta > 0. \quad (3.34)$$

Тогда из замечания 3.7.3 и формулы (3.33) с учетом неравенств $\tilde{k} \leq |T_{l+2}|$, $\tilde{l} \leq |T_{l+2}|$ (см. определение множеств $\tilde{K}$ и $\tilde{L}$), получаем

$$\begin{aligned} q_p\{\mathfrak{X}(p)\}_i &\leq \sum_{l=2n}^{6n} \sum_{\tilde{l} < |T_{l+2}|} \sum_{\tilde{k} < |T_{l+2}|} q_p\{\mathfrak{X}_p(i; \tilde{k}, \tilde{l})\} \leq \\ &\leq \sum_{l=2n}^{6n} \sum_{\tilde{k} < |T_{l+2}|} \sum_{\tilde{l} < |T_{l+2}|} \exp\left\{-\frac{\delta_1}{2} n\right\} \leq |V_{p+1}|^2 \exp\left(-\frac{\delta_1}{2} n\right) \end{aligned} \quad (3.35)$$

для достаточно больших p .

3.12. Выбор постоянных. Для завершения доказательства основной теоремы остается указать те значения параметров β и c (β, ν), для которых выполняются все оценки, использованные в приведенном выше доказательстве. Положим

$$2\beta_0 = c_1 + \ln 2. \quad (3.36)$$

Здесь c_1 — комбинаторная постоянная из формулировки лемм 1.2 и 1.3, зависящая только от размерности решетки ν . Далее, условие (3.34) вместе с определением (3.26) распадается на два условия

$$\delta - \nu\beta > 0, \quad (3.37)$$

$$\frac{c_4}{c_3} - c_1 - \nu\beta \geq 0. \quad (3.38)$$

Условию (3.37) можно удовлетворить, выбрав $\delta = \nu\beta$. Тогда из (3.25) и (3.36) вытекает, что c_2 должно удовлетворять условию (при $\beta > \beta_0$)

$$c_2(\nu, \beta) > \frac{c_1 + \nu\beta}{2(\beta - \beta_0)}. \quad (3.39)$$

В соответствии с предложением 3.4 выберем

$$c_3(\nu, \beta) = 2\nu \ln \left\{ 12 \frac{2^\nu - 1}{c_2(\nu, \beta)} \right\}.$$

Из условия (3.38) вытекает, что c_4 можно положить равным

$$c_4(\nu, \beta) = (c_1(\nu) + \beta\nu) c_3(\nu, \beta).$$

Окончательно получаем, что если значения параметров β и c выбраны так, что $\beta > \beta_0$ и $c > c_4(\nu, \beta)$, то имеет место оценка (3.35), а ввиду (3.28) и утверждение основной теоремы.

§ 4. Замечания к доказательству теоремы 2

Большая часть рассуждений, приведенных при доказательстве основной теоремы, может быть использована и для обоснования теоремы 2. Мы ограничимся указанием наиболее важных изменений в этих рассуждениях для получения теоремы 2.

Рассмотрим распределение Гиббса на стандартном кубе V_p , отвечающее параметрам $\beta, h > 0$ и гравичным условиям $\varphi_p((V_p)^c)$, где в отличие от основной теоремы предполагается, что внешнее поле h фиксировано. l_1 и l_2 из § 2 следует выбрать так, чтобы $l_2 = p + 1$ и $l_1 = p - 4[c' \ln |V_p|]$, где постоянную c' можно определить путем некоторого подсчета, аналогичного приведенному в основном тексте. Через $\mathfrak{X}_0(p)$ обозначим множество всех тех конфигураций $\varphi(V_p) \in \mathfrak{X}(V_p)$, для которых в расположении контуров конфигурации $(\varphi(V_p), \varphi_p(V_p^c))$ не существует контура Γ такого, что $\text{int}(\Gamma) \supset V_i$. Пусть, далее, $\mathfrak{X}'(p)$ обозначает множество тех конфигураций $\varphi \in \mathfrak{X}'_0(p)$, у которых в расположении контуров не существует контура γ , удовлетворяющего

условию $|\gamma| > c_0(\beta) \ln |V_\rho|$. В силу предложения 3.1 и определения $\mathfrak{M}'_0(\rho)$ для доказательства теоремы 2 достаточно показать, что

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} q_\rho |\mathfrak{M}'(\rho)| = 0.$$

Положим $n_0 = \rho - 2 \lceil c' \ln |V_\rho| \rceil$ и введем обозначение $m'_r = |M_{n_0+2r}(\varphi)|$, $r = 0, 1, \dots, \lceil c' \ln |V_\rho| \rceil$. Очевидно, $1 \leq m'_r \leq |V_{\rho+1}|$ для всех $r = 0, 1, \dots, \lceil c' \ln |V_\rho| \rceil$. Следовательно

$$\prod_{j=1}^{\lceil c' \ln |V_\rho| \rceil} \frac{m'_{j+1}}{m'_j} \leq |V_\rho|.$$

Из этой формулы по аналогии с формулой (3.6) вытекает существование такого j_0 , $0 \leq j_0 < \lceil c' \ln |V_\rho| \rceil$, что

$$\frac{m'_{j_0+1} - m'_{j_0}}{m'_{j_0}} \leq \frac{2 \ln |V_\rho|}{\lceil c' \ln |V_\rho| \rceil} \leq \frac{4}{c'},$$

откуда вытекает формула

$$|M'_{i_0+2}(\varphi) \setminus M'_{i_0}(\varphi)| \leq \frac{4}{c'} |M'_{i_0}(\varphi)|, \quad i_0 = n_0 + 2j_0.$$

Пользуясь ею, можно определить разбиение множества всех конфигураций $\varphi \in \mathfrak{M}'(\rho)$ на классы следующим образом. Мы скажем, что $\varphi \in \mathfrak{M}'_i(i; k, l)$, если

$$n_0 \leq i \leq \rho,$$

$$|M'_{i+2}(\varphi) \setminus M'_i(\varphi)| \leq \frac{4}{c'} |M'_i(\varphi)|,$$

$$|L'_{i+1}(\varphi)| = l, |K'_{i+2}(\varphi)| = k.$$

Несложный анализ доказательства основной теоремы показывает, что та часть построений, которая относится к случаю $2n \leq i < 4n$, оказывается уже излишней. Остальные же построения и оценки по существу пригодны и в рассматриваемом случае с незначительными изменениями чисто технического характера.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 15. XI. 1985

Գ. Հ. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ. Դասական իզիդյան ֆերմագենտիկ մադելներում շերտերի մասին քանակական (ամփոփում)

Ուսումնասիրված է Այդինզի (-1) եզրային պայմաններով դիբոյան բաշխումները V_n խորանարդի վրա (որտեղ V_n -ը կոորդինատների սկզբնականում կենտրոն ունեցող և $(2n+1)$ երկարություն կողմով Z^3 , $\gamma > 2$ ցանցի խորանարդն է (β հակադարձ շերտաստի-ճանի մեծ ($\beta > \beta_0$) արժեքների և հո արտաքին զաչտի զրական արժեքների համար. Առաջ-ցուցված է, որ երբ $n \rightarrow \infty$ 1-ին ձգտող հավանականություններ տեղի ունի հետևյալ պնդումը: Գոյություն ունի $c > 0$ հաստատուն, որ եթե h_n -երբ բավարարում են $h_n > \frac{c}{n}$ պայմանին, ապա կգտնվի այնպիսի արտաքին կոնտուր Γ , որ Γ -ի ներքին տիրույթը $\text{int}(\Gamma)$ -ն, պա-

բունակում է $V_{\lfloor \frac{n}{6} \rfloor}$ խորանարդը Այվերին, եթե h_n -ը կախված չէ n -ից, $h_n \equiv h > 0$. ասի
 կախվի այնպիսի արտաքին կոնտուր Γ , որի ներքին տիրույթը $\text{int}(\Gamma)$ -ն պարունակում է $V_{n - \lfloor c_0(\beta, h) \ln n \rfloor}$ խորանարդը, որտեղ $c_0(\beta, h)$ կախված է միայն β -ից և h -ից:

D. H. MARTIROSIAN. *Theorems about the stripes in classical Ising ferromagnet (summary)*

We study some properties of the Gibbs states in classical Ising ferromagnet on V_n , (the „standard“ cube of the lattice Z^v , $v \geq 2$, centered at the origin with the side length $(2n+1)$) with (-1) boundary conditions, large enough values of inverse temperatures β ($\beta > \beta_0$) and positive values of external field h_n . We prove that with probabilities tending to 1 as $n \rightarrow \infty$ there exists a constant $c > 0$ such that if $h_n > \frac{c}{n}$ then an external contour exists such that $V_{\lfloor \frac{n}{6} \rfloor} \subseteq \text{int} \Gamma$. Moreover, if h_n does not depend on n , $h_n \equiv h > 0$, then such external contour Γ can be found that $\text{int}(\Gamma)$ contains the cube $V_{n - \lfloor c_0(\beta, h) \ln n \rfloor}$, where the $c_0(\beta, h) > 0$ depend only on β and h .

ЛИТЕРАТУРА

1. D. Ruelle. On the use of „small external fields“ in the problem of symmetry breakdown in statistical mechanics, *Annals of Physics*, v. 69, № 2, 1972, 364—374.
2. А. Наср. Гиббсовские случайные поля для модели Изинга, *Труды ММО*, т. 32, 1975, 187—210.
3. Р. А. Минлос, Я. Г. Синай. Новые результаты о фазовых переходах 1-го рода в моделях решеточного газа, *Труды ММО*, т. 17, 1967, 213—243.
4. R. L. Dobrushin, E. A. Pecherski. Uniqueness conditions for finitely dependent random fields, *Colloquia Mathematica Societatis Janos Bolyai*, 27. Random Fields, Esztergom, Hungary, 1979, 223—261.
5. Ю. А. Терлецкий. Гиббсовские случайные поля в низкотемпературной области, *ДАН СССР*, 246, № 3, 1979, 540—544.
6. В. А. Малышев, Р. А. Минлос, Е. Н. Петрова, Ю. А. Терлецкий. Обобщенные контурные модели. Итоги науки и техники. Теория вероятностей, математическая статистика, теоретическая кибернетика, М., ВINITИ, т. 19, 1982, 3—54.
7. V. A. Malushev. I. A. Nikolaev. Uniqueness of Gibbs Fields via Cluster Expansions, *Journal of Stat. Phys.*, v. 35, № 3/4, 1984, 375—379.
8. Д. Г. Мартиросян. Единственность гиббсовских состояний в решетчатых моделях с одним основным состоянием, *Теор. и матем. физика*, 63, № 2, 1985, 280—290.
9. С. А. Пирогов, Я. Г. Синай. Фазовые переходы первого рода для малых возмущений модели Изинга, *Функц. анализ и его прилож.*, т. 8, вып. 1, 1974, 25—31.
10. Д. Г. Мартиросян. Некоторые вопросы описания предельных гиббсовских состояний, *Кандидатская диссертация*, М., МГУ, 1976, 62—67.
11. Д. Г. Мартиросян. Одна предельная теорема для гиббсовских случайных полей, *Вторая Вильнюсская конференция по теории вероятн. и матем. статистике*, Тезисы докладов, т. 2, 1977, 17—18.
12. Р. Л. Добрушин. Гиббсовские случайные поля для решетчатых систем с попарным взаимодействием, *Функц. анализ и его прил.*, т. 2, вып. 4, 1968, 31—43.
13. O. E. Lanford, D. Ruelle. Observables at Infinity and States with Short Range Correlations in Statistical Mechanics, *Commun. in Math. Phys.*, v. 13, 1968, 194—215.
14. Я. Г. Синай. Теория фазовых переходов, М., «Наука», 1980.