ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XXII, № 3, 1987 Математика

УДК 517.927.21

Н. Е. ТОВМАСЯН

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ В ПОЛУПЛОСКОСТИ В КЛАССЕ ФУНКЦИЙ ПОЛИНОМИАЛЬНОГО РОСТА

Введение

Рассматривается следующая система дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)u, \ t>0, \ x\in \mathbf{R}^1, \tag{1}$$

где $A(\sigma)$ — квадратная матрица порядка m, элементы которой — полиномы действительной переменной $\sigma\in\mathbf{R}^1$, $u(x, t)=(u_1(x, t), u_2(x, t), \cdots, u_m(x, t))$ — искомая вектор-функция.

Определение 1. Будем говорить, что заданная в области $t\geqslant 0$, $x\in\mathbf{R}^1$ функция $u(x, t)$ принадлежит классу M, если она бесконечно дифференцируема в этой области и удовлетворяет оценкам

$$\left|\frac{\partial^k u(x, t)}{\partial t^k}\right| \leqslant C_{k1}(1+t)^{c_{k2}}(1+|x|)^{c_{k3}}; \ k=0, 1, \ t\geqslant 0, \ x\in\mathbf{R}^1, \tag{2}$$

где C_{k1}, c_{k2}, c_{k3} — положительные постоянные, зависящие от $u(x, t)$.

Определение 2. Будем говорить, что функция $u(x, t)\in M_j$, если она принадлежит классу M и в оценке (2) $c_{03}=j$, т. е.

$$|u(x, t)|\leqslant C_1(1+t)^{c_2}(1+|x|)^j, \ t\geqslant 0, \ x\in\mathbf{R}^1, \tag{3}$$

где C_1 и c_2 — постоянные, зависящие от функции $u(x, t)$.

Определение 3. Заданная в $\mathbf{R}^1$ функция $f(x)$ принадлежит классу N_j, если она бесконечно дифференцируема и удовлетворяет оценкам

$$|f^{(k)}(x)|\leqslant C_k(1+|x|)^j, \ x\in\mathbf{R}^1, \ k=0, 1, \cdots, \tag{4}$$

где C_k — некоторые постоянные, зависящие от $f(x)$.

Пусть S — класс бесконечно дифференцируемых и быстро убывающих функций в $\mathbf{R}^1$, а S' — пространство линейных непрерывных функционалов в S.

Обозначим через $F[M]$ образ множества функций $u(x, t)\in M$ при преобразовании Фурье по переменной x (при этом функцию $u(x, t)$ при любом фиксированном $t\geqslant 0$ рассматриваем как обобщенную функцию). Аналогично определяются классы функционалов $F[M_j]$ и $F[N_j]$.

Делая преобразование Фурье по переменной x в системе (1), получим

$$\frac{dv(\sigma, t)}{dt} = A(\sigma) v(\sigma, t), t > 0, \sigma \in \mathbf{R}^1, \tag{5}$$

где $v = F[u(x, t)]$.

Здесь и в дальнейшем под $F[u(x, t)]$ и $F^{-1}[u(x, t)]$ понимается преобразование Фурье и обратное преобразование Фурье функции $u(x, t)$ (как обобщенной функции) по переменной x. Под решением уравнения (5) понимается функционал $v(\sigma, t)$, зависящий от t как от параметра и принадлежащий классу $F[M]$. В уравнении (5) производная по t понимается в слабом смысле, а по x — в обобщенном смысле

Определение 4. Пусть G — открытое множество или отрезок в $\mathbf{R}^1$. Будем говорить, что

$$v_1(\sigma, t) = v_2(\sigma, t), \sigma \in G, t > 0,$$

если при любом фиксированном $t > 0$ функционалы $v_1(\sigma, t)$ и $v_2(\sigma, t)$ определены и равны над множеством функций $C_0^\infty(G)$.

Пусть E — единичная m-мерная матрица, $\lambda_1(\sigma), \lambda_2(\sigma), \cdots, \lambda_m(\sigma)$ — корни характеристического уравнения

$$\det[E\lambda - A(\sigma)] = 0, \ \mathrm{Re}\,\lambda_1(\sigma) \leqslant \mathrm{Re}\,\lambda_2(\sigma) \leqslant \cdots \leqslant \mathrm{Re}\,\lambda_m(\sigma). \tag{6}$$

(Корень берется столько раз, какова его кратность).

Обозначим через $\rho(\sigma)$ — число корней уравнения (6) с $\mathrm{Re}\,\lambda(\sigma) < 0$. Мы будем предполагать

1) $\rho(\sigma) = r$ всюду, кроме конечного числа точек $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_q$, т. е. система (1) регулярна с показателем регулярности r;

2) в окрестности точек $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_q$ корни $\lambda_1(\sigma), \cdots, \lambda_r(\sigma)$ отделены от корней $\lambda_{r+1}(\sigma), \cdots, \lambda_m(\sigma)$. Это означает, что можно указать непересекающиеся области G_{1k} и G_{2k} такие, что при $|\sigma - \sigma_k| \leqslant \varepsilon$ корни $\lambda_1(\sigma), \cdots, \lambda_r(\sigma)$ принадлежат области G_{1k}, а $\lambda_{r+1}(\sigma), \cdots, \lambda_m(\sigma)$ принадлежат G_{2k} $(k = 1, 2, \cdots, q)$. Здесь и в дальнейшем ε — достаточно малое положительное число.

Рассмотрим следующую задачу.

Задача А. Найти решение системы (1) в классе M, удовлетворяющее граничному условию

$$Q\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right) u(x, 0) = f(x), \ x \in \mathbf{R}^1, \tag{7}$$

где $Q(\sigma)$ матрица размерности $r \times m$, элементы которой — полиномы по переменной $\sigma \in \mathbf{R}^1$, $f(x) = (f_1(x), \cdots, f_m(x))$ — заданная вектор-функция из класса N_{l_0}.

Под решением задачи A понимается классическое решение. Делая преобразование Фурье по x в граничном условии (7), получаем

$$Q(\sigma) v(\sigma, 0) = g(\sigma), \tag{8}$$

где $g(\sigma) = F[f(x)]$.

Определение 5. Будем говорить, что задача A в точке $\sigma_0 \in \mathbf{R}^1$ удовлетворяет условию Лопатинского, если однородная задача (5), (8) ($g \equiv 0$) при $\sigma = \sigma_0$ имеет только нулевое решение в классе обычных функций, растущих по t не быстрее полинома.

Обозначим

$$P^+(\sigma) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma^+(\sigma)} (E\lambda - A(\sigma))^{-1}\, d\lambda;\quad P^+_{\sigma_k}(\sigma) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma^+(\sigma_k)} (E\lambda - A(\sigma))^{-1}\, d\lambda, \tag{9}$$

$k = 1, 2, \cdots, q$, где $\gamma^+(\sigma)$ — замкнутый контур в комплексной полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda > 0$, охватывающий все корни характеристического уравнения (6) с $\operatorname{Re}\lambda(\sigma) > 0$. Отметим, что матрица $P^+(\sigma)$ бесконечно дифференцируема при $\sigma \neq \sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_q$, а $P^+_{\sigma_k}(\sigma)$ — бесконечно дифференцируема в окрестности точки σ_k.

Условие Лопатинского в точке σ эквивалентно условию [7]

$$\operatorname{rang}\begin{bmatrix} P^+(\sigma) \\ Q(\sigma) \end{bmatrix} = m. \tag{10}$$

В точках $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_q$ это условие заведомо нарушается. В дальнейшем предполагается, что условие Лопатинского выполняется всюду, кроме конечного числа точек $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ $(n \geqslant q)$, то есть

$$\operatorname{rang}\begin{vmatrix} P^+(\sigma) \\ Q(\sigma) \end{vmatrix} = m \text{ при } \sigma \in \mathbf{R}^1,\ \sigma \neq \sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n. \tag{11}$$

В случае, когда условие Лопатинского выполняется всюду, задача A в классе M и в более общих классах рассмотрена в работах [1], [2] и доказано существование и единственность решения этой задачи.

Задача A для однородного эллиптического уравнения высокого порядка с однородными граничными условиями в классе бесконечно дифференцируемых функций определенного роста рассмотрена в монографии [3].

При выполнении условия дополнительности, доказаны существование и единственность решения этой задачи.

Задача A в классе обобщенных функций $u(x, t)$, для которых $F[u(x, t)]$ и $F[f(x)]$ — обычные функции, растущие не быстрее полинома по x и по t, рассмотрена в работах [4]—[6]. В этом классе доказана единственность решения этой задачи и получены необходимые и достаточные условия на $g(\sigma) = F[f(x)]$ для разрешимости неоднородной задачи. В случае, когда $\rho(\sigma) = r$ всюду задача A в классе M рассмотрена в работе [7]. Доказано, что однородная задача A имеет конечное число линейно независимых решений, а неоднородная задача всегда разрешима.

Ясно, что $M_j \subset M_k$ при $j < k$. Целью данной работы является указать минимальный класс M_j, в котором задача A имеет решение для любой функци $f(x) \in N_{j}$, т. е. указать точную связь между ростом $f(x)$ и допустимым ростом $u(x, t)$, при котором задача A всегда разрешима.

В работе получена формула числа линейно независимых решений однородной задачи A в классе M_j, которое стремится к бесконечности при

$q \neq 0$ и $j \to +\infty$. Это означает, что при наличии нерегулярных точек естественно ставить задачу A в классах M_j.

Задача A рассматривается также для граничных данных $f(x) \in S$. Получены необходимые и достаточные условия ортогональности на $f(x)$; при которых эта задача имеет решение в заданном классе M_j (при любом $j \geqslant -1$). Начиная с некоторого j эти условия отсутствуют, а для остальных j число этих условий конечно и зависит как от пространства M_j, так и от коэффициентов системы (1) и граничного условия (7).

В работе указаны классы $M(-\infty)$ и $M(+\infty)$, в которых задача имеет и притом единственное решение для любой вектор-функции $f \in S$ и предлагается метод ее решения.

§ 1. Некоторые вспомогательные предложения

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dv}{dt} - Av = 0, \ t > 0, \tag{12}$$

где A — постоянная квадратная матрица порядка m, $v = (v_1, \ldots, v_m)$ — искомое решение.

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_l$ — различные корни характеристического уравнения

$$\det[E\lambda - A] = 0, \tag{13}$$

а $k_1, k_2, \cdots, k_l$ — их кратности, $k_1 + k_2 + \cdots + k_l = m$.

Имеет место следующая

Лемма 1. *Для того, чтобы решение $v(t)$ системы (12) имело вид*

$$v(t) = \sum_{k=\nu+1}^{l} p_k(t) e^{\lambda_k t}, \tag{14}$$

необходимо и достаточно, чтобы начальное значение $v(0)$ удовлетворяло условию

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} (E\lambda - A)^{-1} d\lambda \, v(0) = 0, \tag{15}$$

где $p_k(t)$ — m-мерная вектор-функция с полиномиальными элементами, а γ_1 — замкнутый контур, охватывающий из корней характеристического уравнения (13) только $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_\nu$.

Доказательство. Необходимость. Пусть решение $v(t)$ системы (12) представляется в виде (14), а $w(\lambda)$ — преобразование Лапласа этого решения. Совершая в (12) преобразование Лапласа, получим

$$w(\lambda) = (E\lambda - A)^{-1} v(0). \tag{16}$$

Из (14) следует, что $w(\lambda)$ аналитична всюду в комплексной плоскости λ, кроме, быть может, точек $\lambda_{\nu+1}, \cdots, \lambda_l$ и $w(k) \to 0$ при $|\lambda| \to \infty$. Поэтому [10]

$$v(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} w(\lambda) e^{\lambda t} d\lambda, \tag{17}$$

где γ_2 — произвольный замкнутый контур, охватывающий из точек $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_l$ только $\lambda_{p+1}, \cdots, \lambda_l$. Тогда из (16) и (17) имеем

$$v(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2} e^{\lambda t}(E\lambda - A)^{-1}\,d\lambda\, v(0). \tag{18}$$

Подставляя в (18) $t = 0$, получим

$$v(0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2} (E\lambda - A)^{-1}\,d\lambda\, v(0). \tag{19}$$

Известно, что (см. [8], стр. 41)

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1+\gamma_2} (E\lambda - A)^{-1}\,d\lambda = E. \tag{20}$$

Используя формулу (20), условие (19) можно записать в виде (15).

Достаточность. Пусть $v(t)$ — решение системы (1) и $v(0)$ удовлетворяет условию (15). Рассмотрим вектор-функцию

$$\omega(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2} e^{\lambda t}(E\lambda - A)^{-1}\,d\lambda\, v(0). \tag{21}$$

Легко проверить, что $\omega(t)$ является решением системы (12) и согласно условию (15) и формуле (20), $\omega(0) = v(0)$. Из единственности решения задачи Коши следует, что $v(t) = \omega(t)$. Вычисляя контурный интеграл (21) по теореме о вычетах убедимся, что решение $v(t)$ имеет вид (14).

Лемма 2. *Пусть γ_1 — замкнутый контур в комплексной плоскости λ и $\det[E\lambda - A] \neq 0$ при $\lambda \in \gamma_1$. Тогда*

$$\operatorname{rang}\int_{\gamma_1} (E\lambda - A)^{-1}\,d\lambda = m_0,$$

где m_0 — число корней характеристического уравнения (13), охваченных контуром γ_1 (корни считаются столько раз, какова их кратность).

Доказательство. Известно, что система (12) имеет $k_{p+1} + \ldots + k_l$ линейно независимых решений вида (14). Из леммы 1 непосредственно следует, что система (15) относительно $v(0)$ имеет такое же число линейно независимых решений. Следовательно, ранг матрицы системы (15) равен $m - (k_{p+1} + \cdots + k_l) = k_1 + k_2 + \cdots + k_p = m_0$. Лемма доказана.

Пусть

$$\exp\{At\} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k t^k}{k!},\quad -\infty < t < +\infty, \tag{22}$$

где A — квадратная матрица m-го порядка, $A^0 = E$.

Известно, что ([8], стр. 41)

$$\exp\{At\} = \int_{\gamma} e^{\lambda t}(E\lambda - A)^{-1}\, d\lambda \quad (-\infty < t < +\infty), \tag{23}$$

$$\exp\{At\}\cdot\exp\{A\tau\} = \exp\{A(t+\tau)\}, \tag{24}$$

$$\frac{d}{dt}\exp\{At\} = A\exp\{At\}, \tag{25}$$

где γ — замкнутый контур в комплексной плоскости λ, охватывающий все корни характеристического уравнения (13).

Лемма 3. *Если $v(\sigma, t) \in F[M]$ — решение системы* (5), *то*

$$P^{+}(\sigma)\, v(\sigma, 0) = 0, \quad \sigma \in \mathbf{R}^1, \quad \sigma \neq \sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_q, \tag{26}$$

$$P^{+}_{\sigma_k}(\sigma)\, v(\sigma, 0) = 0, \text{ при } |\sigma - \sigma_k| < \varepsilon, \; k = 1, 2, \cdots, q. \tag{27}$$

Доказательство. Напомним, что $\sigma_1, \cdots, \sigma_q$ — нерегулярные точки системы (1), а $\sigma_1, \cdots, \sigma_n$ $(n > q)$ — точки, где нарушается условие Лопатинского для задачи A. Пусть $v(\sigma, t) \in F[M]$ — решение системы (5). Используя формулы (24) и (25), получим

$$\frac{d}{dt}[\exp\{-A(\sigma)t\}\, v(\sigma, t)] = 0, \text{ при } t > 0, \; \sigma \in \mathbf{R}^1. \tag{28}$$

Отсюда имеем

$$\exp\{-A(\sigma)t\}\, v(\sigma, t) = L, \quad t > 0, \; \sigma \in \mathbf{R}^1, \tag{29}$$

где L — функционал, не зависящий от t.

В (29), переходя к пределу при $t \to 0$, получим

$$L = v(\sigma, 0), \quad \sigma \in \mathbf{R}^1. \tag{30}$$

Далее, умножая обе части (29) на $\exp\{A(\sigma)t\}$ и используя равенство (30), получим

$$v(\sigma, t) = \exp\{A(\sigma)t\}\, v(\sigma, 0), \quad t > 0, \; \sigma \in \mathbf{R}^1. \tag{31}$$

Отсюда, в частности, имеем

$$v(\sigma, 0) = \exp\{-A(\sigma)t\}\, v(\sigma, t). \tag{32}$$

Заменяя t на $-t$ и A на $A(\sigma)$ в (23), получим

$$\exp\{-A(\sigma)t\} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma(\sigma)} e^{-\lambda t}(E\lambda - A(\sigma))^{-1}\, d\lambda, \tag{33}$$

где $\gamma(\sigma)$ — замкнутый контур, охватывающий все корни характеристического уравнения (6).

Отсюда и из формулы (2.4) монографии [8] (стр. 30) получим

$$P^{+}(\sigma)\cdot\exp\{-A(\sigma)t\} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma^{+}(\sigma)} e^{-\lambda t}(E\lambda - A(\sigma))^{-1}\, d\lambda; \quad \sigma \in \mathbf{R}^1, \tag{34}$$

$$P^{+}_{\sigma_k}(\sigma)\cdot\exp\{-A(\sigma)t\} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma^{+}(\sigma_k)} e^{-\lambda t}(E\lambda - A(\sigma))^{-1}\, d\lambda; \quad |\sigma - \sigma_k| < \varepsilon. \tag{35}$$

Из (34) следует, что матрица $t^N P^+(\sigma)\cdot\exp\{-A(\sigma)t\}$ и ее производные по σ равномерно стремятся к нулю при $t\to+\infty$ в малой окрестности любой точки $\sigma_0\neq\sigma_1,\cdots,\sigma_q$. Аналогичное утверждение верно и для матрицы $t^N P^+_{\sigma_k}\cdot\exp\{-A(\sigma)t\}$ в окрестности точек σ_k $(k=1, 2,\cdots, q)$ (N— произвольное число).

Умножая обе части (32) на матрицу $P^+(\sigma)$, получим

$$P^+(\sigma)v(\sigma,\ 0)=P^+(\sigma)\exp\{-A(\sigma)t\}v(\sigma,\ t);\ t>0,\ \sigma\in\mathbf{R}^1,\ \sigma\neq\sigma_1,\cdots,\sigma_q. \tag{36}$$

Переходя к пределу при $t\to+\infty$ в (36) и имея в виду, что $v(\sigma,\ t)\in F[M]$, получим равенство (26). Равенство (27) доказывается аналогично.

Лемма 4. *Если выполнено условие* (11), *то*

$$\operatorname{rang}\begin{bmatrix}P^+_{\sigma_k}(\sigma)\\ Q(\sigma)\end{bmatrix}=r+m-\rho(\sigma_k).\ \text{при}\ \begin{matrix}0<|\sigma-\sigma_k|<\varepsilon,\\ k=1,\ 2,\cdots,\ n.\end{matrix} \tag{37}$$

Доказательство. Из леммы 2 следует, что

$$\operatorname{rang}P^+_{\sigma_k}(\sigma)=m-\rho(\sigma_k),\ \text{при}\ |\sigma-\sigma_k|\leqslant\varepsilon,\ k=1,\ 2,\cdots,\ q, \tag{38}$$

$$\operatorname{rang}P^+(\sigma)=m-\rho(\sigma)\ \text{при}\ \sigma\in\mathbf{R}^1, \tag{39}$$

$$\operatorname{rang}[P^+(\sigma)-P^+_{\sigma_k}(\sigma)]=\rho(\sigma_k)-\rho(\sigma),\ \text{при}\ |\sigma-\sigma_k|\leqslant\varepsilon \tag{40}$$

$(k=1,\ 2,\cdots,\ n)$.

По предположению $\rho(\sigma)=r$ при $\sigma\neq\sigma_1,\cdots,\sigma_q$.

Ясно, что

$$\operatorname{rang}\begin{bmatrix}P^+(\sigma)\\ Q(\sigma)\end{bmatrix}\leqslant\operatorname{rang}\begin{bmatrix}P^+(\sigma)-P^+_{\sigma_k}(\sigma)\\ P^+_{\sigma_k}(\sigma)\\ Q(\sigma)\end{bmatrix}. \tag{41}$$

Так как при $\sigma\neq\sigma_1,\ \sigma_2,\cdots,\ \sigma_n$ левая часть неравенства (41) равна m (по условию), то правая часть этого неравенства равна m при $\sigma\neq\sigma_1,\ \sigma_2,\cdots,\ \sigma_n$. Отсюда и из равенств (38) и (40) получим утверждение этой леммы.

Пусть $\Delta_k(\sigma)$ — матрицы размерности $\rho_0\times m$ $(\rho_0\leqslant m)$, элементы которой — аналитические функции в окрестности точки $\sigma=\sigma_k$, причем

$$\operatorname{rang}\Delta_k(\sigma)=\rho_0;\ \text{при}\ 0<|\sigma-\sigma_k|\leqslant\varepsilon, \tag{42}$$

а $\operatorname{rang}\Delta_k(\sigma_k)\leqslant\rho_0$. Обозначим через n_0 наименьший порядок нуля в точке $\sigma=\sigma_k$ всевозможных миноров порядка ρ_0 матрицы $\Delta_k(\sigma)$. Для матрицы $\Delta_k(\sigma)$ имеет место следующая

Лемма 5. *В окрестности точки σ_k существует невырожденная аналитическая квадратная матрица $\alpha_k(\sigma)$ порядка ρ_0 такая, что*

$$\alpha_k(\sigma)\Delta_k(\sigma)=\operatorname{diag}[(\sigma-\sigma_k)^{n_1},\ (\sigma-\sigma_k)^{n_2},\cdots,\ (\sigma-\sigma_k)^{n_{\rho_0}}]B_k(\sigma), \tag{43}$$

при $|\sigma-\sigma_k|\leqslant\varepsilon$, *где* $n_1, n_2, \cdots, n_{\rho_0}$ — *неотрицательные целые числа*, $n_1+n_2+\cdots+n_{\rho_0}=n_0$, $B_k(\sigma)$ — *прямоугольная матрица размерности* $\rho_0\times m$ *с аналитическими элементами в окрестности точки* σ_k, *удовлетворяющая условию*

$$\operatorname{rang} B_k(\sigma_k)=\rho_0.$$

Эта лемма доказана в диссертационной работе [9]; доказательство приводится методом последовательного исключения (методом Гаусса). В случае, когда $\Delta_k(\sigma_k)=\rho_0$ числа $n_1=n_2=\cdots=n_{\rho_0}=0$.

Рассмотрим следующую задачу.

Задача В. Найти решение $v(\sigma)=(v_1(\sigma), \cdots, v_m(\sigma))$ системы

$$\Delta_k(\sigma)\,v(\sigma)=0, \tag{44}$$

принадлежащее классу $F[N_j]$ и сосредоточенное в точке σ_k (j — целое неотрицательное число), где $\Delta_k(\sigma)$ — матрица, указанная в лемме 5.

Лемма 6. *Число линейно независимых решений задачи В равно*

$$\sum_{k=1}^{\rho_0}\mu_k+(j+1)(m-\rho_0),\quad \text{где}\quad \mu_k=\min\{n_k,\ j+1\},$$

$n_i\ (i=0, 1, \cdots, \rho_0)$ — *целые числа, входящие в формулировку леммы 5. В частности, из этой формулы следует, что если* $j>n_0-1$, *то число линейно независимых решений однородной задачи* В *равно* $n_0+(j+1)(m-\rho_0)$.

Доказательство. Пусть $\alpha_k(\sigma)$ — матрица, построенная в лемме 5. Умножая обе части (44) на $\alpha_k(\sigma)$ и учитывая равенство (43), получим

$$(\sigma-\sigma_k)^{n_1}w_1=0,\ (\sigma-\sigma_k)^{n_2}w_2=0, \cdots, (\sigma-\sigma_k)^{n_{\rho_0}}w_{\rho_0}=0,$$

где

$$w\equiv(w_1, w_2, \cdots, w_{\rho_0})=B_k(\sigma)\,v(\sigma). \tag{45}$$

Общее решение уравнения $(\sigma-\sigma_k)^{n_p}w_p=0$ определяется формулой [4]:

$$w_p^*=\sum_{s=0}^{n_p-1}c_{ps}\,\delta^{(s)}(\sigma-\sigma_k), \tag{46}$$

где $\delta(\sigma-\sigma_k)$ — дельта-функция Дирака.

Так как функционалы $w_p\in F[N_j]$, то из (46) следует, что коэффициенты $c_{ps}=0$ при $s>j$, т. е.

$$w_p=\sum_{s=0}^{\mu_p-1}c_{ps}\,\delta^{(s)}(\sigma-\sigma_k),$$

где c_{ps} — произвольные постоянные.

Уравнение (45) относительно $v(\sigma)$ при заданном w решаем следующим образом. Так как $\operatorname{rang} B_k(\sigma_k)=\rho_0$, то в окрестности σ_k существует ρ_0 линейно независимых столбцов матрицы $B_k(\sigma)$. Пусть, для определенности, первые ρ_0 столбцов линейно независимы, тогда уравнение (45) решается относительно $v_1(\sigma), v_2(\sigma), \cdots, v_{\rho_0}(\sigma)$, а остальные $v_k(\sigma)$ $(k=\rho_0+1, \cdots, m)$ берутся произвольными функционалами из

$F[N_j]$, сосредоточенными в точке σ_k. Такими функционалами являются линейные комбинации $\delta(\sigma-\sigma_k)$, $\delta'(\sigma-\sigma_k), \cdots$, $\delta^{(j)}(\sigma-\sigma_k)$.

Таким образом, получили, что задача B имеет

$$\nu = \sum_{i=1}^{p_0} \mu_i + (j+1)(m-p_0) \tag{47}$$

линейно независимых решений.

Замечание 1. Если j — нецелое, неотрицательное число, то в формуле (47) число j нужно заменить на $[j]$, где $[j]$ — целая часть j. Если $j<0$, то задача B не имеет нетривиальных решений.

Рассмотрим уравнение

$$(\sigma-\sigma_0)^l w = p(\sigma), \quad \sigma \in \mathbf{R}^1, \tag{48}$$

где $p(\sigma) \in S$, l — натуральное число, а $w(\sigma)$ — искомое решение из класса S',

Уравнение (48) в классе $F[N_{l-1}]$ всегда имеет решение.

Лемма 7. *Для того, чтобы уравнение* (48) *в классе* $F[N_j]$ (*в классе* $E[M_j]$) *при* $-1<j<l-1$ *имело решение, необходимо и достаточно, чтобы функция* $p(\sigma)$ *удовлетворяла условиям*

$$p^{(k)}(\sigma_0)=0, \ k=0, 1, \cdots, l-[j]-2. \tag{49}$$

Доказательство леммы 7 очевидно.

§ 2. Исследование однородной задачи A

Однородная задача A в классе M_j, как было показано во введении, эквивалентна следующей задаче.

Задача C. В классе $F[M_j]$ найти решение $v(\sigma, t)$ системы

$$\frac{dv}{dt} = A(\sigma)v, \ t>0, \ \sigma \in \mathbf{R}^1, \tag{50}$$

удовлетворяющее граничному условию

$$Q(\sigma)v(\sigma, 0)=0, \ \sigma \in \mathbf{R}^1. \tag{51}$$

Покажем, что задача C имеет конечное число линейно независимых решений и укажем метод построения всех решений. Пусть сначала j — целое неотрицательное число.

Из (26) и (51), учитывая условие (11), получим

$$v(\sigma, 0)=0, \text{ при } \sigma \in \mathbf{R}^1, \ \sigma \neq \sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n.$$

Следовательно, если $v(\sigma, t)$ — решение задачи C, то $v(\sigma, 0)$ можно представить в виде

$$v(\sigma, 0) = \overset{1}{v}(\sigma, 0) + \overset{2}{v}(\sigma, 0) + \cdots + \overset{n}{v}(\sigma, 0), \tag{52}$$

где $\overset{k}{v}(\sigma, 0)$ — вектор-функция из класса $F[M_j]$, сосредоточенный в точке σ_k $(k=1, 2, \cdots, n)$.

Из условий (27) и (51) следует, что вектор-функционал $\overset{k}{v}(\sigma, 0)$ $k=(1, 2,\cdots, n)$ удовлетворяет следующей системе:

$$\begin{cases} P^{+}_{\sigma_k}(\sigma)\overset{k}{v}(\sigma, 0)=0 \\ Q(\sigma)\overset{k}{v}(\sigma, 0)=0, \quad |\sigma-\sigma_k|\leqslant\varepsilon, \; k=1, 2,\cdots, n. \end{cases} \tag{53}$$

Теперь укажем метод решения системы (53). Из равенства (38) следует, что матрица $P^{+}_{\sigma_k}(\sigma)$ $(k=1, 2,\cdots, q)$ в окрестности точки σ_k имеет $m-\rho(\sigma_k)$ линейно независимых строк. Пусть $\Delta_k(\sigma)$ $(k=1, 2,\cdots, q)$ — матрица размерности $(m-\rho(\sigma_k)+r)\times m$, состоящая из линейно независимых строк матрицы $P^{+}_{\sigma_k}(\sigma)$ в окрестности σ^k и строк матрицы $Q(\sigma)$. Согласно лемме 4

$$\operatorname{rang}\Delta_k(\sigma)=m-\rho(\sigma_k)+r, \text{ при } 0<|\sigma-\sigma_k|\leqslant\varepsilon, \; k=1, 2,\cdots, n.$$

Ясно, что система (53) эквивалентна системе $\Delta_k(\sigma)\overset{k}{v}(\sigma, 0)=0$. Таким образом, задачу C привели к задаче B, которая исследована в § 1. Пусть l_k $(k=1, 2,\cdots, n)$ — число линейно независимых решений системы (53) в классе $F[N_j]$, сосредоточенных в точке σ_k. Согласно лемме 6 эти числа конечны.

Подставляя найденные решения системы (53) в формулу (52), получим

$$v(\sigma, 0)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{l_k}c_{ks}\overset{k}{w}_s(\sigma), \tag{54}$$

где $\overset{k}{w}_s(\sigma)$ $(s=1,\cdots, l_k)$ — линейно независимые решения системы (53), $\overline{c_{ks}}$ — произвольные постоянные, $\overset{k}{w}(\sigma)\in F[N_j]$.

Ясно, что функции $\overset{k}{w}_s$ $(s=1, 2,\cdots, l_k, \; k=1, 2,\cdots, n)$ в совокупности также линейно независимы.

Подставляя $v(\sigma, 0)$ из (54) в (31), получим

$$v(\sigma, t)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{l_k}c_{ks}\exp[A(\sigma)t]\,\overset{k}{w}_s(\sigma). \tag{55}$$

Обозначим через $P^{-}(\sigma)$ и $P^{-}_{\sigma_k}(\sigma)$ $(k=1, 2, \cdots, n)$ матрицы

$$P^{-}(\sigma)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma^{-}(\sigma)}(E\lambda-A(\sigma))^{-1}d\lambda, \quad P^{-}_{\sigma_k}(\sigma)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma^{-}(\sigma_k)}(E\lambda-A(\sigma))^{-1}d\lambda,$$

где $\gamma^{-}(\sigma)$ — замкнутый контур в комплексной плоскости λ, охватывающий все корни уравнения (6) с $\operatorname{Re}\lambda\leqslant 0$ и не охватывающий остальные корни.

Подставляя в (33) $t=0$ имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma(\sigma)}(E\lambda-A(\sigma))^{-1}d\lambda=E. \tag{56}$$

Аналогично, из формул (34) и (35) получим

$$P^{-}(\sigma)\exp\{A(\sigma)t\}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma^{-}(\sigma)} e^{\lambda t}(E\lambda-A(\sigma))^{-1}\,d\lambda, \qquad (57)$$

$$P^{-}_{\sigma_k}(\sigma)\exp\{A(\sigma)t\}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma^{-}(\sigma_k)} e^{\lambda t}(E\lambda-A(\sigma))^{-1}\,d\lambda. \qquad (58)$$

Из (56), в частности, следует, что

$$P^{+}_{\sigma_k}(\sigma)+P^{-}_{\sigma_k}(\sigma)=E, \quad \text{при} \quad |\sigma-\sigma_k|\leqslant\varepsilon. \qquad (59)$$

Так как функционал $\overset{k}{w}_s(\sigma)$ удовлетворяет условию (53) и сосредоточен в точке σ_k, то, учитывая соотношение (59), решение (55) можно записать в виде

$$v(\sigma,\ t)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{l_k} c_{ks}P^{-}_{\sigma_k}(\sigma)\cdot\exp\{A(\sigma)t\}\overset{k}{w}(\sigma). \qquad (60)$$

Поскольку $\overset{k}{w}_s(\sigma)\in F[N_j]$ и сосредоточен в точке σ_k, то

$$\overset{k}{w}_s(\sigma)=\sum_{l=0}^{j} c_{ksl}\,\delta^{(l)}(\sigma-\sigma_k), \qquad (61)$$

где c_{ksl} — некоторые постоянные m-мерные векторы. Отсюда и из (60) следует, что функционал $v(\sigma,\ t)$ имеет вид

$$v(\sigma,\ t)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{l_k}\sum_{l=0}^{j} a_{ksl}(t)\,\delta^{(l)}(\sigma-\sigma_k), \qquad (62)$$

где $a_{ksl}(t)$—вектор-функция, компоненты которой линейно выражаются через производные по σ до порядка j элементов матрицы $P^{-}_{\sigma_k}(\sigma)$ exp exp $\{A(\sigma)t\}$ в точке σ_k $(k=1,\ 2,\cdots,\ n)$.

Вычисляя интеграл (58) по теореме о вычетах, убедимся, что $a_{ksl}(t)$ и их производные растут не быстрее полинома при $t\to+\infty$. Следовательно, вектор-функционал $v(\sigma,\ t)$, определенный формулой (55), принадлежит классу $F[M_j]$ при произвольных постоянных c_{ks} Совершая в (62) обратное преобразование Фурье по переменным σ получим

$$u(x,\ t)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{l_k}\sum_{l=0}^{j} a_{ksl}(t)(ix)^{l}\exp\{-i\sigma_s t\}, \qquad (63)$$

которое является общим решением однородной задачи A в классе M_j. Таким образом, доказана

Теорема 1. *Однородная задача A в классе M_j имеет $\nu=l_1+l_2+\cdots+l_n$ линейно независимых решений, где $l_1,\ l_2,\cdots,\ l_n$ — целые числа, определенные выше.*

Замечание 2. Если $j<0$, то однородная задача в классе M_j не имеет нетривиальных решений. Если же j — положительное нецелое число, то пространство решений однородной задачи A в классах M_j и $M_{[j]}$ совпадают.

§ 3. Исследование неоднородной задачи A

Обозначим

$$P_r^+(\sigma)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_r^+(\sigma)}(E\lambda-A(\sigma))^{-1}\,d\lambda;\quad P_r^{-1}(\sigma)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_r^-(\sigma)}(E\lambda-A(\sigma))^{-1}\,d\lambda,$$

где $\gamma_r^+(\sigma)$ и $\gamma_r^-(\sigma)$ — простые замкнутые контуры в комплексной плоскости λ, такие, что 1) они не пересекаются и не содержатся один внутри другого, 2) контур $\gamma_r^-(\sigma)$ охватывает корни $\lambda_1(\sigma)$, $\lambda_2(\sigma)$, $\cdots$ $\cdots$, $\lambda_r(\sigma)$, а контур $\gamma_r^+(\sigma)$ охватывает корни $\lambda_{r+1}(\sigma),\cdots,\lambda_m(\sigma)$ уравнения (6).

При наших предположениях на корни характеристического уравнения (6) матрицы $P_r^+(\sigma)$ и $P_r^-(\sigma)$ бесконечно дифференцируемы и

$$\begin{gathered}P_r^+(\sigma)+P_r^-(\sigma)=E,\quad \sigma\in R^1,\\ P_r^+(\sigma)=P^+(\sigma),\ P_r^-(\sigma)=P^-(\sigma),\ \text{при } \sigma\neq\sigma_1,\cdots,\sigma_q.\end{gathered}\tag{64}$$

Рассмотрим следующую задачу

З а д а ч а D. Найти решение $v(\sigma)=(v_1(\sigma),\ldots,v_m(\sigma))$ системы

$$P_r^+(\sigma)\,v=0,\tag{65}$$

$$Q(\sigma)\,v=g(\sigma),\tag{66}$$

принадлежащее классу $F[N]$, где $N=\bigcup\limits_{k=0}^{\infty}N_k$, $g=F[f(x)]$, $f\in N_{j_0}$.

Т е о р е м а 2. *Если $v(\sigma)$ является решением задачи D в классе $F(N_j)$, то*

$$u(x,t)=F^{-1}[\exp\{A(\sigma)t\}\,P_r^-(\sigma)\,v(\sigma)]\tag{67}$$

есть частное решение задачи A, принадлежащее классу M_j.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Теорему докажем для случая, когда $q=1$, $n=1$, то есть условие Лопатинского выполняется всюду, кроме точки $\sigma=\sigma_1$; $\rho(\sigma)=r$ при $\sigma\neq\sigma_1$ и $\rho(\sigma_1)>r$. Общий случай доказывается аналогично. Пусть

$$w(\sigma,t)=\exp\{A(\sigma)t\}\,P_r^-(\sigma)\,v(\sigma);\quad t>0.\tag{68}$$

Ясно, что $w(\sigma,t)$ удовлетворяет системе (5). Из (64)—(66) следует, что $w(\sigma,t)$ удовлетворяет также граничному условию (8). Докажем, что $w(\sigma,t)\in F[M_j]$.

Из (57) и (68) имеем

$$w(\sigma,t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_r^-(\sigma)}e^{\lambda t}(E\lambda-A(\sigma))^{-1}\,d\lambda\,v(\sigma),\tag{69}$$

В работе [7] доказано, что если $v(\sigma)\in F[N_j]$, то функционал (69): $w(\sigma,t)\in F[M_j]$. Следовательно, функция $u(x,t)$, определенная формулой (67), принадлежит классу M_j, что и требовалось доказать.

Теперь выясним следующий вопрос: в каком классе $F[M_j]$ система (65)—(66) имеет решение? Согласно лемме 2 $\operatorname{rang} P_r^{\mp}(\sigma) = m - r$. Обозначим $\Delta_k(\sigma)$ матрицу, строки которой составлены из строк матрицы $Q(\sigma)$ и линейно независимых строк матрицы $P_r^+(\sigma)$ в окрестности точки σ_k $(k=1, 2, \cdots, n)$, где σ_k — точки, в которых нарушается условие Лопатинского.

Пусть β_k — кратность нуля σ_k функции $\det \Delta_k(\sigma)$. Согласно лемме 5 в окрестности точки σ_k существует невырожденная квадратная матрица $\alpha_k(\sigma)$ порядка m такая, что

$$\alpha_k(\sigma)\Delta_k(\sigma) = \operatorname{diag}\left[(\sigma-\sigma_k)^{\gamma_{k1}}, \cdots, (\sigma-\sigma_k)^{\gamma_{km}}\right] B_k(\sigma) \tag{70}$$

при $|\sigma - \sigma_k| < \varepsilon$, где $\gamma_{k1}, \cdots, \gamma_{km}$ — неотрицательные целые числа $\gamma_{k1} + \cdots + \gamma_{km} = \beta_k$, $B_k(\sigma)$ — невырожденная квадратная матрица порядка m с аналитическими коэффициентами. Обозначим через

$$\beta_0 = \max\{\gamma_{ks}, \ k=1, 2, \cdots, n, \ s=1, \cdots, m\}. \tag{71}$$

В работе [7] показано, что если $g \in F[N_{j_0}]$, то задача (65)—(66) имеет решение в классе $F[N_{j_0+\beta_0}]$ и указан метод построения всех решений в этом классе.

Из формулы общего решения задачи (65)—(66) в классе $F[N_{j_0+\beta_0}]$, полученной в работе [7], следует, что всегда можно указать функционал $g(\sigma) \in F[N_{j_0}]$, для которого эта задача не имеет решения в классе $F[N_k]$ при любом $k < j_0 + \beta_0$, то есть класс $F[N_{j_0+\beta_0}]$ является минимальным классом, в котором существует решение задачи (65)—(66) для любого функционала $g \in F[N_{j_0}]$.

Отсюда и из теоремы 1 следует

Теорема 3. *Если $f(x) \in N_{j_0}$, то неоднородная задача A имеет решение в классе $M_{j_0+\beta_0}$.*

Теперь покажем, что этот класс тоже является минимальным, в котором существует решение задачи A при любой $f \in N_{j_0}$.

Сначала докажем это утверждение для случая, когда j_0 — нецелое положительное число.

Согласно вышесказанному, существует вектор-функция $f(x) \in N_{j_0}$ такая, что задача (65)—(66) имеет решение $v(\sigma)$, принадлежащее классу $F[M_{j_0+\beta_0}]$, но не принадлежащее $F[M_k]$ при любом $k < j_0 + \beta_0$.

Пусть $u_0(x, t)$ — вектор-функция, определенная через $v(\sigma)$ по формуле (67). Ясно, что $u_0(x, t) \in M_{j_0+\beta_0}$, но не принадлежит M_k при $k < j_0 + \beta_0$ (так как $u_0(x, 0) \overline{\in} M_k$) при $k < j_0 + \beta_0$).

Любое решение задачи A, принадлежащее классу $M_{j_0+\beta_0}$, представляется в виде

$$u(x, t) = u_0(x, t) + w(x, t), \tag{72}$$

где $w(x, t)$ — общее решение однородной задачи A в этом классе.

Из замечания 2 следует, что $w(x, t) \in M_{[j_0]+\beta_0}$. Отсюда и из формулы (72) непосредственно следует, что при указанной выше вектор-функции $f(x)$, все решения задачи A не принадлежат классу M_k при $k < j_0 + \beta_0$. При j целом доказательство проводится аналогично.

§ 4. Исследование задачи A при $f \in S$

Обозначим через $M(-\infty)$ класс функций $u(x, t)$ из M, удовлетворяющих условию

$$\lim_{x \to -\infty} u(x, t) = 0, \quad t > 0. \tag{73}$$

Аналогично определяется класс функций $N(-\infty)$, где $N = \bigcup\limits_{j=0}^{\infty} N_j$.

В этом параграфе исследуется задача A в классе $M(-\infty)$, когда $f(x) \in S$. Требования относительно коэффициентов системы и граничного условия те же, что и в предыдущих параграфах.

Предварительно рассмотрим следующую задачу.

Задача D_0. Найти решение системы (65)—(66), принадлежащее классу $F[N(-\infty)]$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 4. *Если $g(\sigma) \in S$, то задача D_0 имеет, и притом единственное, решение.*

Доказательство. Для простоты изложения приведем доказательство при $q = 1$, $n = 1$, $\sigma_1 = 0$. Общий случай доказывается аналогично.

Пусть сначала $g(\sigma) \in S$ и $g(\sigma) = 0$ в окрестности точки $\sigma_1 = 0$. Тогда система (65)—(66) имеет решение в классе S [7].

Пусть теперь $g(\sigma) \in S$ и носитель $g(\sigma)$ находится в окрестности точки $\sigma_1 = 0$. Пусть, далее, $\alpha_1(\sigma)$, $\Delta_1(\sigma)$ и $B_1(\sigma)$ — матрицы, построеные в § 3 (см. равенство (70)). Система (65)—(66) эквивалентна системе

$$\Delta_1(\sigma) v = \omega(\sigma), \tag{74}$$

где $\omega(\sigma) = (\underbrace{0, 0, \cdots, 0}_{m-r}, g_1(\sigma), \cdots, g_r(\sigma))$.

Умножая обе части (74) на $\alpha_1(\sigma)$ и имея в виду равенство (70) при $k_1 = 1$, получим

$$\sigma^{\gamma_{11}} w_1 = p_{11}(\sigma), \ \sigma^{\gamma_{12}} w_2 = p_{12}(\sigma), \cdots, \ \sigma^{\gamma_{1m}} w_m = p_{1m}(\sigma), \tag{75}$$

где

$$w \equiv (w_1, w_2, \cdots, w_m) = B_1(\sigma) v, \ (p_{11}(\sigma), \cdots, p_{1m}(\sigma)) = \alpha_1(\sigma) \omega(\sigma). \tag{76}$$

Делая обратное преобразование Фурье в (75), имеем

$$(i)^{\gamma_{1k}} \frac{d^{\gamma_{1k}} u_k}{dx^{\gamma_{1k}}} = f_k(x); \ k = 1, 2, \cdots, m, \tag{77}$$

где

$$f_k(x) = F^{-1}[p_{1k}(\sigma)], \quad u_k(x) = F^{-1}[w_k(\sigma)].$$

Ясно, что $f_k(x) \in S$. Частное решение уравнения (77) дается формулой

$$u_k(x) = \frac{(-i)^{\gamma_{1k}}}{(\gamma_{1k}-1)!} \int_{-\infty}^{x} (x-\tau)^{\gamma_{1k}-1} f_k(\tau)\, d\tau. \tag{78}$$

Легко показать, что $u_k(x) \in N(-\infty)$, поэтому

$$w_k(\sigma) = F[u_k(x)] \in F[N(-\infty)]; \quad w \in F[N(-\infty)].$$

Так как носитель ветор-функции $g(\sigma)$ находится в окрестности точки $\sigma_1 = 0$ и функционалы $w_1, w_2, \cdots, w_m$ удовлетворяют уравнению (75), то носители этих функционалов также находятся в этой окрестности. Из (76) имеем $v = B_2(\sigma)\, w$, где $B_2(\sigma) \in C_0^\infty$ и в окрестности нуля совпадают с $B_1^{-1}(\sigma)$, следовательно $v \in F[N(-\infty)]$.

Поскольку любую функцию $g(\sigma) \in S$ можно представить в виде суммы двух функций, обладающих вышеуказанными свойствами, то задача D_0 для любой функции $g(\sigma) \in S$ имеет решение. Теперь покажем, что однородная задача D_0 имеет только нулевое решение.

Так как по предположению

$$\operatorname{rang}\begin{bmatrix} P_r^+(\sigma) \\ Q(\sigma) \end{bmatrix} = m, \quad \text{при } \sigma \neq 0, \tag{79}$$

то решение однородной задачи (65)—(66) сосредоточено в этой точке, поэтому обратное преобразование Фурье этого решения является вектор-функцией с полиномиальными элементами. Следовательно, однородная задача D_0 не имеет нетривиальных решений.

Из формулы (72), в частности, следует, что решение задачи D_0 принадлежит классу $F[N_{\beta_0-1}]$, где β_0 определяется формулой (71). Отсюда, применяя теорему 2, получим, что при $f(x) \in S$ неоднородная задача A в классе M_{β_0-1} всегда имеет решение. Имеет место следующая

Теорема 5. *Если $f(x) \in S$, то задача A в классе $M(-\infty)$ имеет решение и оно единственно. Это решение принадлежит классу M_{β_0-1}.*

Доказательство. Пусть $u(x, t)$ — решение задачи A, определяемое формулой (67), где $v(\sigma)$ — решение задачи D_0. Легко проверить, что это решение принадлежит классу $M(-\infty)$. Как показано выше, это решение принадлежит также классу M_{β_0-1}.

Единственность решения задачи A в классе $M(-\infty)$ доказывается так же как и единственность решения задачи D_0, при этом используется представление (63).

Если $-1 \leqslant k < \beta_0-1, f \in S$, то для существования решения задачи A в классе M_k необходимо и достаточно, чтобы $f(x)$ удовлетворяла конечному числу условий ортогональности.

Следующие две теоремы позволяют нам выписать эти необходимые и достаточные условия разрешимости. Для формулировки этих теорем мы введем некоторые обозначения.

Пусть $a_k(\sigma)$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$ — матрицы, а γ_{kl} $(k = 1, 2, \cdots, n,$ $l = 1, 2, \cdots m)$ — целые неотрицательные числа, входящие в представление (70). Пусть, далее, $g(\sigma) = (g_1(\sigma), \cdots, g_m(\sigma))$ — правая часть уравнения (66), $\omega(\sigma)$ — вектор-столбец с компонентами $(\underbrace{0, 0, \cdots, 0,}_{m-r}$

$g_1(\sigma), \cdots, g_r(\sigma))$, а $(p_{k1}(\sigma), \cdots, p_{km}(\sigma))$ — вектор-функция $\alpha_k(\sigma)\, w(\sigma)$ $(k=1, 2, \cdots, n)$. $\nu_{klj} = \gamma_{kl} - [j] - 2$.

Теорема 6. *Если* $g(\sigma) \in S$ *и* $-1 \leqslant j < \beta_0 - 1$, *то для того, чтобы решение задачи* D_0 *принадлежало классу* $F[N_j]$ *(классу* $F[M_j]$*), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия*

$$p_{kl}^{(\mu)}(\sigma_k) = 0,\ \mu = 0, 1, \cdots, \nu_{klj};\ l = 1, 2, \cdots, m,\ k = 1, 2, \cdots, n. \quad (80)$$

Если для некоторых k *и* l *число* $\gamma_{kl} - [j] - 2$ *отрицательно, то для таких индексов условия* (80) *отсутствуют.*

Теорема 6 при $q = 1$, $n = 1$, $\sigma_1 = 0$ непосредственно следует из системы уравнений (75), к которой приведена система (65)—(66), и леммы 7. Общий случай доказывается аналогично.

Доказывается также, что условия (80) на вектор-функцию $g(\sigma)$ в совокупности линейно независимы, то есть никакое из них не следует из остальных.

Теорема 7. *Если* $f \in S$ *и* $-1 \leqslant j \leqslant \beta_0 - 1$, *то для того, чтобы задача* A *имела решение в классе* M_j, *необходимо и достаточно, чтобы вектор-функция* $f(x)$ *удовлетворяла условиям* (80), *где* $g(\sigma) = F[f]$.

Доказательство. Необходимость. Пусть задача A в классе M_j имеет решение $w(x, t)$, и пусть $u(x, t)$ — решение задачи A в классе $M(-\infty)$, которое определяется формулой (67), где $v(\sigma)$ — решение задачи D_0. Как указано выше, $u(x, t) \in M_{\beta_0 - 1}$.

Ясно, что $u_0(x, t) = w(x, t) - u(x, t)$ — решение однородной задачи A в классе $M_{\beta_0 - 1}$. Поэтому, согласно формуле (63), оно представляется в виде

$$w(x, t) - u(x, t) = \sum_{s=1}^{n} \sum_{l=0}^{\beta_0 - 1} c_{sl}(t)\, x^l \cdot \exp[-i\sigma_s t], \quad (81)$$

где $c_{sl}(t)$ — некоторые m-мерные вектор-функции, которые вместе с производными растут не быстрее полинома при $t \to +\infty$.

Так как $w(x, t) \in M_j$ и $u(-\infty, t) = 0$, то из (81) имеем $c_{sl}(t) = 0$ при $l > j$, то есть правая часть равенства (81) принадлежит классу M_j. Следовательно, $u(x, t)$ также принадлежит этому классу. Отсюда и из (67) следует, что $v(\sigma) = F[u(x, 0)) \in F[M_j]$, то есть решение задачи D_0 принадлежит классу $F(M_j]$, а для этого (согласно теореме 6) необходимо выполнение условий (80).

Достаточность. Пусть выполнено условие (80). Тогда по теореме 6 решение задачи D_0 принадлежит классу $F[N_j]$. Из теоремы 2 следует, что задача A также имеет решение в классе M_j. Теорема доказана.

Результаты этого параграфа остаются в силе, если условие (73) заменить условием $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x, t) = 0$.

Пусть $f(x) \in S$. Тогда имеет место

Теорема 8. *Задача* A *с дополнительным условием*

$$\lim_{|x| \to \infty} u(x, t) = 0$$

имеет решение тогда и только тогда, когда вектор-функция $g(\sigma)$ *удовлетворяет условиям* (80) *при* $j=-1$ $(g(\sigma)=F[f])$.

Теорема 8 доказывается аналогично теореме 7.

§ 5. Примеры

Рассмотрим следующую задачу:

Найти в классе M решение эллиптического уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+a\frac{\partial u}{\partial t}+b\frac{\partial u}{\partial x}+cu=0, \tag{82}$$

удовлетворяющее граничному условию

$$P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial t}+Q\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u=f(x), \quad \text{при } t=0, \tag{83}$$

где $f(x)\in N_{l_0}$, $P(\sigma)$, $Q(\sigma)$ — полиномы, $x\in R^1$, $t\geqslant 0$, a, b, c — действительные постоянные.

Делая преобразование Фурье по переменной x в уравнении (82) и граничном условии (83), получим

$$\frac{d^2 v}{dt^2}+a\frac{dv}{dt}-(\sigma^2+bi\sigma-c)v=0, \tag{84}$$

$$P(-i\sigma)\frac{dv(\sigma,0)}{dt}+Q(-i\sigma)v=g, \tag{85}$$

где $v=F[u]$; $g=F[f]$.

Характеристическим уравнением, соответствующим уравнению (84), является

$$\lambda^2+a\lambda-(\sigma^2+bi\sigma-c)=0. \tag{86}$$

Из (86) следует, что уравнение (82) удовлетворяет условиям 1) и 2) задачи A, если а) либо $c<0$, б) либо $c=0$ и $a\neq 0$. При выполнении условий а) и б) условие Лопатинского выполняется всюду, кроме конечного числа точек.

Пусть $\omega(\sigma)=P(-i\sigma)\lambda_1(\sigma)+Q(-i\sigma)$, где $\lambda_1(\sigma)=-\frac{a}{2}-$ $-\sqrt{\frac{a^2}{4}+\sigma^2+bi\sigma-c}$

(под квадратным корнем понимается то значение, действительная часть которого больше или равна нулю).

Легко показать, что при выполнении условий а) и б) функция $\omega(\sigma)$ аналитична по действительной переменной σ и имеет конечное число действительных нулей. Обозначим через $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n$ действительные нули функции $\omega(\sigma)$, отличные от $\sigma=0$; $l_1, l_2, \cdots, l_n$ — их кратности, $\mu_{jk}=\min\{l_k, [j]+1\}$. Пусть n_0 — наименьший порядок нуля точки $\sigma=0$ функций $P(-i\sigma)$ и $Q(-i\sigma)$.

Из теоремы 1 вытекают следующие два утверждения:

Следствие 1. Если $c=0$ и $a>0$, то однородная задача (82)—(83) в классе M_j имеет

$$\min\{n_0;\ [j]+1\}+\sum_{k=1}^{n}\mu_{jk}+1$$

линейно независимых решений.

Следствие 2. Если $c<0$ или $c=0$, $a<0$, то однородная задача (82), (83) в классе M_j имеет $\alpha=\sum_{k=1}^{m}\mu_{jk}+\mu_{j_0}$ линейно независимых решений, где $\mu_{j_0}=\min\{l_0, [j]+1\}$, l_0 — порядок нуля точки $\sigma_0=0$ функции $\omega(\sigma)$, (если $\omega(0)\neq 0$, то $l_0=0$).

Из теоремы 3 получаем

Следствие 3. Если $c<0$ или $c=0$ и $a\neq 0$, то неоднородная задача (82), (83) в классе $M_{j_0+\beta_0}$ всегде имеет решение, где $\overset{\circ}{\beta}_0=\max\{l_0, l_1,\cdots, l_n\}$.

Пусть теперь $f(x)\in S$. Тогда из теорем 5 и 7 вытекают следующие утверждения.

Следствие 4. Неоднородная задача (82), (83) в классе $M(-\infty)$ имеет, и притом единственное, решение, принадлежащее классу M_{β_0-1}.

Следствие 5. Для того, чтобы задача (82), (83) в классе M_j при $-1<j<\beta_0-1$ имела решение, необходимо и достаточно, чтобы $f(x)$ удовлетворяла условиям

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, x^q e^{-i\sigma_k x}\, dx=0;\ q=0, 1,\cdots, l_k-[j]-2;\ k=0, 1,\cdots, n. \quad (87)$$

Если $l_k-[j]-2<0$, то для таких k условие (87) отсутствует.

Ереванский политехнический
институт им. К. Маркса

Поступила 24. X. 1985

Ն. Ե. ԹՈՎՄԱՍՅԱՆ. Եզրային խնդիրներ մասնակի ածանցյալներով դիֆերենցիալ հավասարումների համար կիսահարթությունում, բազմանդամային աճ ունեցող ֆունկցիաների դասերում (*ամփոփում*)

Դիտարկվում է

$$\frac{\partial u}{\partial t}=A\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)u,\ t>0,\ x\in R^1 \quad (1)$$

դիֆերենցիալ հավասարումը

$$Q\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x, 0)=f(x),\ x\in R^1 \quad (2)$$

եզրային պայմանով.

Ենթադրվում է, որ (1), (2) խնդիրը բավարարում է Լոպատինսկու պայմանին ամենուրեք, բացի վերջավոր թվով կետերից։

Աշխատանքում ցույց է տրված $f(x)$-ի աճի և $u(x, t)$-ի թույլատրելի աճի միջև եղած ճշգրիտ կապը, որի դեպքում դիտարկված խնդիրը լուծելի է։ Ստացված է անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ $f(x)$-ի վրա, որի դեպքում այդ խնդիրը ունի լուծում տրված բազմանդամային աճ ունեցող ֆունկցիաների դասում։

N. E. TOVMASIAN. *Boundary value problem for a system of partial differential equations on the half of plane in a class of functions of polynomial growth*
(summary)

The system of differential equations

$$\frac{\partial u}{\partial t}=A\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)u,\ t>0,\ x\in R^1$$

and the boundary conditions

$$Q\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x,\ 0)=f(x),\ x\in R^1$$

are considered.

It is supposed that the problem (1), (2) satusfies Lopatinski condition everywhere outside a finite set of points. An exact relation between the growth of $f(x)$ and the growth of $u(x,\ t)$ is established under which the problem (1), (2) is solvable.

The necessary and sufficient orthogonality conditions on $f(x)$ guarantee a solution in the class of functions with prescribed growth.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Г. В. Дикополов.* О краевых задачах для дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами в полупространстве, Мат. сб., 1962, 59 (101), № 2, 215—228.
2. *А. Л. Павлов.* Об общих краевых задачах для дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами в полупространстве, Мат. сб., 1977, 103 (145), № 3 (7), 367—391.
3. *С. Агмон, С. Дуглис, А. Ниренберг.* Оценки решений эллиптических уравнений вблизи границы, М., ИЛ, 1962.
4. *Г. Е. Шилов.* Математический анализ. Второй спец. курс, М., «Наука», 1965, 327.
5. *Г. В. Дикополов, Г. Е. Шилов.* О корректных краевых задачах для уравнений в частных производных в полупространстве, Изв. АН СССР, «Математика» 1960, 24, 369—380.
6. *В. П. Паламодов.* Линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами, М., «Наука», 1967.
7. *Н. Е. Товмасян.* Общая граничная задача для системы дифференциальных уравнений в полуплоскости с нарушением условия Я. Б. Лопатинского, Дифф уравн., 1984, 20, № 1, 141—152.
8. *Ю. Л. Делецкий, М. Г. Крейн.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве, М., «Наука», 1970, 534.
9. *Т. М. Кошелева.* Краевые задачи для дифференциальных уравнений с частными производными с постоянными коэффициентами в полуплоскости в классах обобщенных функций, кандидатская диссертация, 1983.
10. *М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат.* Методы теории функций комплексного переменного, М., «Наука», 1973, 736.